9 5/8 yellow
x 6 5/16
Covers off

QK1
.S66
1921
v. 40

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

SHOUT
SHARE
IT

Louvain. — Imprimerie F. Ceuterick
60, rue Vital Decoster, 60

Ac 2 14

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

> *Nulla unquam inter fidem et rationem*
> *vera dissensio esse potest.*
> CONST. DE FID. CATH., C. IV.

QUARANTIÈME ANNEE, 1920-1921

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(M. F. WILLAERT)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1921

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

STATUTS

Article premier. — Il est constitué à Bruxelles une association qui prend le nom de *Société scientifique de Bruxelles,* avec la devise : « *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest* » (¹).

Art. 2. — Cette association se propose de favoriser, conformément à l'esprit de sa devise, l'avancement et la diffusion des sciences.

Art. 3. — Elle publiera annuellement le compte rendu de ses réunions, les travaux présentés par ses membres, et des rapports sommaires sur les progrès accomplis dans chaque branche (²).

Elle tâchera de rendre possible la publication d'une revue destinée à la vulgarisation (³).

Art. 4. — Elle se compose d'un nombre illimité de membres, et fait appel à tous ceux qui reconnaissent l'importance d'une culture scientifique sérieuse pour le bien de la société.

(¹) Conc. Vatic. Const. de Fid. cath., c. IV.

(²) Dans sa séance du 18 février 1907, le Conseil a décidé de ne plus publier des travaux trop étendus qui sont plutôt des livres que des mémoires.

(³) Depuis le mois de janvier 1877, cette revue paraît, par livraisons trimestrielles, sous le titre de Revue des Questions scientifiques.

Art. 5. — Elle est dirigée par un Conseil de vingt membres renouvelable annuellement par quart à la session de Pâques. Le Conseil choisit, dans son sein, le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire, le Trésorier. Toutefois, il peut choisir, en dehors du Conseil, le Président ou le premier Vice-Président. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles (1). En cas de décès ou de démission d'un membre du Bureau ou du Conseil, le Conseil peut lui donner un successeur pour achever son mandat (2).

Art. 6. — Pour être admis dans l'Association, il faut être présenté par deux membres. La demande, signée par ceux-ci, est adressée au Président, qui la soumet au Conseil. L'admission n'est prononcée qu'à la majorité des deux tiers des voix.

L'exclusion d'un membre ne pourra être prononcée que pour des motifs graves et à la majorité des deux tiers des membres du Conseil.

Art. 7. — Les membres qui souscrivent, à une époque quelconque, une ou plusieurs parts du capital social, sont *membres fondateurs*. Ces parts sont de 500 francs. Les *membres ordinaires* versent une cotisation annuelle de 15 francs, qui peut toujours être rachetée par une somme de 150 francs, versée une fois pour toutes.

Le Conseil peut nommer des *membres honoraires* parmi les savants étrangers à la Belgique.

Les noms des membres fondateurs figurent en tête des listes par ordre d'inscription, et ces membres reçoivent autant d'exemplaires des publications annuelles qu'ils ont souscrit de parts du capital social. Les membres ordinaires et les membres honoraires reçoivent un exemplaire de ces publications.

Tous les membres ont le même droit de vote dans les assemblées générales.

---

(1) Ancien art. 5. — Elle est dirigée par un Conseil de vingt membres, élus annuellement dans son sein. Le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire et le Trésorier font partie de ce Conseil. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles. (Cf. Annales de la Société scientifique, 1901, t XXV, 1re partie, p. 235.)

(2) D'après une décision du Conseil du 27 novembre 1907, les membres du Conseil, sortants ou démissionnaires, en restent membres honoraires avec voix consultative, s'ils le désirent.

Art. 8. — Chaque année, il y a trois sessions. La principale se tiendra dans la quinzaine qui suit la fête de Pâques, et pourra durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels (¹).

Les deux autres sessions se tiendront en octobre et en janvier. Elles pourront durer deux jours et auront pour objet principal de préparer la session de Pâques.

Art. 9. — Lorsqu'une résolution, prise par l'assemblée générale, n'aura pas été délibérée en présence du tiers des membres de la Société, le Conseil aura la faculté d'ajourner la décision jusqu'à la prochaine session de Pâques. La décision sera alors définitive, quel que soit le nombre des membres présents.

Art. 10. — La Société ne permettra jamais qu'il se produise dans son sein aucune attaque, même courtoise, à la religion catholique ou à la philosophie spiritualiste et religieuse.

Art. 11. — Dans les sessions, la Société se répartit en six sections : I. *Sciences mathématiques*. II. *Sciences physiques*. III. *Sciences naturelles*. IV. *Sciences médicales*. V. *Sciences économiques*. VI. *Sciences techniques* (²).

Tout membre de l'Association choisit chaque année la section à laquelle il désire appartenir. Il a le droit de prendre part aux travaux des autres sections avec voix consultative.

Chaque section peut avoir des réunions extraordinaires, en dehors des sessions, pourvu que les travaux scientifiques auxquels ces réunions donnent lieu soient soumis à la section, pendant les sessions ordinaires de la Société (³).

(¹) Ancien art. 8. — Chaque année, la Société tient quatre sessions. La principale, en octobre, pourra durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels et l'on y nomme le Bureau et le Conseil pour l'année suivante. Les trois autres sessions, en janvier, avril et juillet, pourront durer trois jours et auront pour objet principal de préparer la session d'octobre. (Cf. Annales, 1878, t. II, 1^{re} partie, p. 169; 1909, t. XXV, 1^{re} partie, p. 235.)

(²) Sur la création de la section des *sciences techniques*, détachée de la section des sciences mathématiques, voir les Annales, t. XXX (1906), 1^{re} partie, pp. 79, 117, 265, et t. XXXI (1907), 1^{re} partie, p. 307.

(³) Ce dernier paragraphe, voté par le Conseil général le 25 février 1902, a été soumis à l'Assemblée générale et approuvé le 10 avril 1902 (Cf. Annales, t. XXXI, 1^{re} partie, p. 198.)

Art. 12. — La session comprend des séances générales et des séances de section.

Art. 13. — Le Conseil représente l'Association. Il a tout pouvoir pour gérer et administrer les affaires sociales. Il place en rentes sur l'État ou en valeurs garanties par l'État les fonds qui constituent le capital social.

Il fait tous les règlements d'ordre intérieur que peut nécessiter l'exécution des statuts, sauf le droit de contrôle de l'Assemblée générale.

Il délibère, sauf les cas prévus à l'article 6, à la majorité des membres présents. Néanmoins, aucune résolution ne sera valable qu'autant qu'elle aura été délibérée en présence du tiers au moins des membres du Conseil dûment convoqué (1).

Art. 14. — Tous les actes, reçus et décharges sont signés par le Trésorier et un membre du Conseil, délégué à cet effet.

Art. 15. — Le Conseil dresse annuellement le budget des dépenses de l'Association et présente dans la session de Pâques le compte détaillé des recettes et dépenses de l'exercice écoulé. L'approbation de ces comptes, après examen de l'Assemblée, lui donne décharge.

Art. 16. — Les statuts ne pourront être modifiés que sur la proposition du Conseil, à la majorité des deux tiers des membres et dans l'Assemblée générale de la session de Pâques.

Les modifications ne pourront être soumises au vote qu'après avoir été proposées dans une des sessions précédentes. Elles devront figurer à l'ordre du jour dans les convocations adressées à tous les membres de la Société.

Art. 17. — La devise et l'article 10 ne pourront jamais être modifiés.

En cas de dissolution, l'Assemblée générale, convoquée extraordinairement, statuera sur la destination des biens appartenant à l'Association. Cette destination devra être conforme au but indiqué dans l'article 2.

---

(1) Peuvent assister aux séances du Conseil, avec voix consultative : 1° les Présidents, et, en cas d'empêchement des Présidents, les Secrétaires des sections ; 2° les membres du Conseil, sortants ou démissionnaires, qui en sont restés membres honoraires.

RÈGLEMENT

ARRÊTÉ PAR LE CONSEIL POUR L'ENCOURAGEMENT DES RECHERCHES SCIENTIFIQUES

1. — Le Conseil de la *Société scientifique de Bruxelles* a résolu d'instituer des concours et d'accorder des subsides pour encourager les recherches scientifiques.

2. — Le Conseil peut, sur la proposition de la section compétente, accorder des encouragements pécuniaires ou des médailles aux auteurs des meilleurs travaux présentés par les membres de cette section. L'ensemble de ces récompenses ne peut dépasser annuellement 1000 francs.

3. — A la session de Pâques, chaque section désignera une ou plusieurs questions à mettre au concours. Toute question, pour être posée, doit être approuvée par le Conseil qui donnera aux questions la publicité convenable (¹).

4. — Les questions auxquelles il n'aura pas été répondu d'une manière satisfaisante resteront au concours. Le Conseil pourra cependant inviter les sections compétentes à les remplacer par d'autres.

5. — Aucun prix ne pourra être inférieur à 500 francs. Une médaille sera en outre remise à l'auteur du mémoire couronné.

6. — Ces concours ne seront ouverts qu'aux membres de la Société.

7. — Ne sont admis que les ouvrages et les planches manuscrits.

8. — Le choix de la langue dans laquelle seront rédigés les mémoires est libre. Ils seront, s'il y a lieu, traduits aux frais de la Société : la publication n'aura lieu qu'en français.

9. — Les auteurs ne mettront pas leur nom à ces mémoires, mais seulement une devise qu'ils répéteront dans un billet cacheté renfermant leur nom et leur adresse.

(¹) Rédaction arrêtée par le Conseil, en sa séance du 12 mai 1910.

10. — Les jurys des concours seront composés de trois membres présentés par la section compétente et nommés par le Conseil.

11. — Les prix sont décernés par le Conseil sur le rapport des jurys.

12. — Toute décision du Conseil ou des sections relative aux prix sera prise au scrutin secret et à la majorité absolue des suffrages.

13. — La Société n'a obligation de publier aucun travail couronné ; les manuscrits de tous les travaux présentés au concours restent la propriété de la Société. En cas de publication, cent exemplaires seront remis gratuitement aux auteurs.

14. — Les résultats des concours seront proclamés et les médailles remises dans l'une des assemblées générales de la session de Pâques. Les rapports des jurys devront être remis à la section compétente, au plus tard à la session de janvier, autant que possible, et transmis au Conseil, avec l'avis de la section, au 1er février. Le 1er octobre de l'année qui suit celle où a été proposée la question, est la date de rigueur pour l'envoi des mémoires au secrétariat (1).

15. — Pour être admis à demander un subside, il faut être membre de la Société depuis un an au moins.

16. — Le membre qui demandera un subside devra faire connaître par écrit le but précis de ses travaux, au moins d'une manière générale ; il sera tenu, dans les six mois de l'allocation du subside, de présenter au Conseil un rapport écrit sur les résultats de ses recherches quel qu'en ait été le succès.

17. — Le Conseil, après avoir pris connaissance des diverses demandes de subsides, à l'effet d'en apprécier l'importance relative, statuera au scrutin secret.

18. — Les résultats des recherches favorisées par les subsides de la Société devront lui être présentés, pour être publiés dans ses Annales s'il y a lieu.

---

(1) Rédaction arrêtée par le Conseil, en sa séance du 24 novembre 1910.

LETTRES
DE
S. S. LE PAPE LÉON XIII
AU PRÉSIDENT ET AUX MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

I

A nos chers Fils le Président et les Membres
de la Société scientifique de Bruxelles

LÉON XIII, PAPE

CHERS FILS, SALUT ET BÉNÉDICTION APOSTOLIQUE

Votre lettre Nous a été agréable, ainsi que les Annales et les Questions publiées par vous et offertes en témoignage de votre piété respectueuse envers nous et le Siège Apostolique. Nous avons vu réellement avec plaisir que votre Société, qui a adopté le nom de Société scientifique, et s'est constituée à Bruxelles, depuis trois ans seulement, sous d'heureux auspices avec la bénédiction du Vicaire de Jésus-Christ, a déjà pris un grand développement et promet des fruits abondants. Certes, puisque les ennemis acharnés de la religion et de la vérité ne se lassent point et s'obstinent même de plus en plus à proclamer l'opposition entre la raison et la foi, il est opportun que partout surgissent des hommes distingués par la science et la piété, qui, attachés de cœur aux doctrines et aux enseignements de l'Église, s'appliquent à démontrer qu'*il ne peut jamais exister de désaccord réel entre la foi et la raison,* comme l'a déclaré, dans la Constitution IV *de fide catholica,* le Saint Concile du Vatican, affirmant la doctrine constante de l'Église et des Saints Pères. C'est pourquoi Nous félicitons votre Société de ce qu'elle s'est d'abord proposé cette fin, et aussi de ce qu'elle a mis dans ses statuts un article défendant à ses membres toute attaque aux saines doctrines de la philosophie chrétienne ; et en même temps Nous les exhortons tous à ne jamais s'écarter de la voie excellente qui leur vaut un tel éloge, et à poursuivre continuellement, de tout l'effort de leur esprit, l'objet assigné à la Société, par d'éclatants exemples et par leurs publications. Nous prions Dieu très bon et très grand, qu'Il vous soutienne tous et vous fortifie du céleste secours ; en présage duquel, et comme gage de Notre bienveillance envers vous, Nous accordons du fond du cœur à vous, chers fils, et à votre Société, la bénédiction Apostolique.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 15 janvier 1879, l'An Un de Notre Pontificat.

LÉON XIII, PAPE.

II

A nos chers Fils, les Membres de la Société scientifique de Bruxelles à Bruxelles

LÉON XIII, PAPE

CHERS FILS, SALUT ET BÉNÉDICTION APOSTOLIQUE

Ce qu'au début de Notre Pontificat, Nous avions présagé de votre Société, aujourd'hui, vingt-cinq ans après sa fondation, vos lettres Nous en apprennent l'heureux accomplissement. En travaillant au progrès des études scientifiques, soit par vos réunions savantes, soit par la publication de vos Annales, vous ne vous êtes jamais départis de votre dessein initial, celui de montrer que *entre la foi et la raison aucun vrai désaccord ne peut exister*. Nous vous exprimons Notre bienveillance pour vos efforts, et Nous vous exhortons en même temps à poursuivre avec ardeur votre entreprise si bien en rapport avec les nécessités actuelles. Car l'étude de l'Univers, si elle est menée avec droiture et sans préjugé, doit aider à la connaissance des choses de Dieu, et établir la foi à la révélation divine. Pour que ce bonheur vous advienne et par vous à beaucoup d'autres, Nous accordons avec la plus vive sympathie à votre Société, la bénédiction Apostolique, gage des faveurs célestes.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 20 mars 1901, l'An vingt-quatrième de Notre Pontificat.

Léon XIII, Pape.

LETTRE

DE

S. É. LE CARD. R. MERRY DEL VAL

Secrétaire d'État de

S. S. LE PAPE PIE X

AU PRÉSIDENT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES
EN RÉPONSE A L'ADRESSE AU SAINT-PÈRE

Illustrissime Seigneur,

La noble adresse de la Société scientifique, dont Votre Seigneurie illustrissime est le digne Président, est parvenue au Saint-Père par l'entremise de Mgr le Nonce de Bruxelles. Il m'est agréable de vous faire savoir, au nom de l'Auguste Pontife, que Sa Sainteté a reçu avec grande joie l'hommage rendu à Sa Personne Vénérée par cette illustre association qui s'est fait un impérieux devoir de témoigner son humble et respectueuse soumission au Vicaire du Christ dès sa première assemblée tenue sous le nouveau Pontificat. Sa Sainteté, appréciant justement cet hommage et considérant d'autre part avec une vive satisfaction le programme, si sage et si honorable, de votre Société, dont la devise s'inspire des principes mêmes sanctionnés par le Concile du Vatican, vous a très volontiers accordé, à vous et à tous les membres, un éloge spécial ; et en même temps qu'Elle exprimait ses remerciements les plus chaleureux pour votre aimable attention, Elle n'a pas hésité à déclarer que la bienveillance dont votre Société a été honorée par Pie IX et Léon XIII, de sainte mémoire, demeure entière et qu'elle s'est même beaucoup accrue dans son cœur. Le Saint-Père a l'espoir fondé que tous les membres, pour le savoir desquels Il aime à nourrir l'estime la plus flatteuse, s'efforceront sans trêve de mériter toujours davantage de la religion et des sciences, et tandis qu'Il invoquait pour eux les secours célestes, Il les a bénis de grand cœur.

Je saisis avec plaisir cette occasion de me déclarer, avec des sentiments de considération distinguée,

De Votre Seigneurie illustrissime
le très affectionné serviteur

R. Card. Merry del Val.

Rome, le 5 mai 1904.

LETTRE

DE

S. S. LE PAPE BENOIT XV

AU PRÉSIDENT ET AUX MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

A nos chers Fils, Membres de la Société scientifique de Bruxelles

BENOIT XV, PAPE

salut et bénédiction Apostolique

Votre illustre Société fut de la part de nos prédécesseurs l'objet d'un amour paternel ; Nous ressentons aussi pour elle une bienveillance toute particulière, Nous qui voyons croître chaque jour son importance et son utilité. Aujourd'hui, en effet, plus que jamais, c'est le devoir des meilleurs de mettre tout en œuvre pour sauver les principes chrétiens d'un tel déluge d'erreurs et pour éclairer des lumières de la religion tous les genres d'études. Votre zèle à poursuivre ce but Nous est prouvé par le livre (le tome LXXVI de la Revue des Questions scientifiques et le tome XXXVIII des

Annales) dont vous avez voulu Nous faire un précieux présent, et votre lettre collective si respectueuse Nous a montré la déférence avec laquelle vous accueillez et vous exécutez tout ce que le Saint-Siège ordonne pour le progrès de la vie catholique. Aussi louons-Nous de grand cœur votre activité, et puisque, après la guerre, vous avez repris votre ardeur première, poursuivez avec confiance votre entreprise, afin qu'en tenant compte des progrès de la science, vous puissiez montrer qu'aucune découverte moderne véritable n'est en conflit avec l'enseignement de l'Eglise. En effet, les vérités doivent être entre elles dans l'accord le plus parfait, puisque toutes procèdent du Maître unique de la Science. Ainsi vous parviendrez à mériter de l'Eglise autant que de la société civile, car l'éclat d'une érudition solide peut apporter à la Sainte Foi des avantages appréciables. De notre côté, Nous aurons à cœur d'implorer pour vous le secours d'en-haut. Trouvez-en le gage dans la bénédiction apostolique que Nous vous accordons très volontiers, à vous, très chers fils, et à tous ceux qui participent à vos labeurs.

Donné à Rome, près de Saint-Pierre, le 26 juin de l'an 1920, de Notre pontificat le sixième.

Benoit XV, Pape.

LISTES
DES
MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES
ANNÉE 1921

Liste des membres fondateurs

S. É. le cardinal Dechamps (1), archevêque de	Malines.
François de Cannart d'Hamale (1)	Malines.
Charles Dessain	Malines.
Jules van Havre (1)	Anvers.
Le chanoine Maes (1)	Bruges.
Le chanoine De Leyn (1)	Bruges.
Leirens Eliaert (1)	Alost.
Frank Gillis (1)	Bruxelles.
Joseph Saey	Bruxelles.
Le Ch^{er} de Schoutheete de Tervarent (1)	Saint-Nicolas.
Le Collège Saint-Michel	Bruxelles.
Le Collège Notre-Dame de la Paix	Namur.
Le Duc d'Ursel, sénateur (1)	Bruxelles.
Le P^{ce} Gustave de Croy (1)	Le Rœulx (Hainaut).
Le C^{te} de T' Serclaes (1)	Gand.
Auguste Dumont de Chassart (1)	Mellet (Hainaut).
Charles Hermite (1), membre de l'Institut	Paris.
L'École libre de l'Immaculée-Conception	Vaugirard (Paris).
L'École libre Sainte-Geneviève	Versailles.
Le Collège Saint-Servais	Liége.
Le C^{te} de Bergeyck (1)	Beveren-Waes.
L'Institut Saint-Ignace	Anvers.
Philippe Gilbert (1), correspond^{t} de l'Instit.	Louvain.
Le R. P. Provincial de la Compagnie de Jésus en Belgique	Bruxelles.
Le Collège Saint-Jean-Berchmans	Louvain.
Le Collège Saint-Joseph	Alost.

---

(1) Décédé.

Le chanoine de Wouters (1)	Braine-le-Comte.
Antoine d'Abbadie (1), membre de l'Institut	Paris.
S. É. le cardinal Haynald (1), archevêque de Kalocsa et Bâcs	Kalocsa (Hongrie).
S. É. le cardinal Séraphin Vannutelli (1).	Rome.
S. G. Mgr Du Roussaux (1), évêque de	Tournai.
S. É. le cardinal Goossens (1), archevêque de	Malines.
R. Bedel	Marseille.
S. G. Mgr Belin (1), évêque de	Namur.
Eugène Pécher (1)	Bruxelles.
S. É. le cardinal Ferrata	Rome.
S. É. le cardinal Nava di Bontife	Catane.
S. É. le cardinal Rinaldini	Rome.
S. É. le cardinal Granito di Belmonte	Rome.
Éd. Goedseels	Uccle.

Liste des membres honoraires

S. A. R. Charles-Théodore (1), duc en Bavière	Possenhofen.
Antoine d'Abbadie (1), membre de l'Institut	Paris.
E. H. Amagat (1), membre de l'Institut	Saint-Satur (France).
Joachim Barrande (1)	Prague.
Barrois, membre de l'Institut	Lille.
Mgr Baunard (1), recteur honoraire de l'Université catholique	Lille.
A. Béchamp (1)	Paris.
Aug. Béchaux, correspondant de l'Institut.	Paris.
Le Prince Boncompagni (1), de l'Académie des Nuovi Lincei	Rome.
J. Boussinesq, membre de l'Institut	Paris.
É. Branly, membre de l'Institut	Paris.
L. de Bussy (1), membre de l'Institut	Paris.
L. de Launay, membre de l'Institut	Paris.
Dr H. Desplats (1).	Lille.

---

(1) Décédé.

P. Duhem (1), membre de l'Institut	Bordeaux.
J.-H. Fabre (1), correspondant de l'Institut	Sérignan (France).
Dr Fiessinger, correspondant de l'Académie de Médecine	Paris.
Le docteur Foerster (1)	Aix-la-Chapelle.
J. Gosselet (1), membre de l'Institut	Lille.
C. Grand'Eury (1), corresp. de l'Institut	Malzéville (France).
J. N. Haton de la Goupillière, membre de l'Institut	Paris.
P. Hautefeuille (1), membre de l'Institut.	Paris.
Dr Heis (1)	Münster.
Charles Hermite (1), membre de l'Institut.	Paris.
G. Humbert, membre de l'Institut	Paris.
Le vice-amiral de Jonquières (1), membre de l'Institut	Paris.
Camille Jordan, membre de l'Institut	Pont-Authon (Fr.).
A. de Lapparent (1), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences	Paris.
H. Le Chatelier, membre de l'Institut.	Paris.
G. Lemoine, vice-président de l'Académie des Sciences	Paris.
F. Le Play (1), membre de l'Institut	Paris.
Dr W. Lossen (1)	Heidelberg.
Le général J. Newton (1)	New-York.
D.-P. Œhlert (1), correspond. de l'Institut	Laval (France).
Louis Pasteur (1), membre de l'Institut	Paris.
R. P. Perry, S. J. (1), de la Société Royale de Londres	Stonyhurst.
É. Picard, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences	Paris
Victor Puiseux (1), membre de l'Institut	Paris.
P. Puiseux, membre de l'Institut.	Paris.
Paul Sabatier, membre de l'Institut	Toulouse.
A. Barré de Saint-Venant (1), membre de l'Institut	Paris.

---

(1) Décédé.

R. P. A. SECCHI, S. J. (1), de l'Académie des Nuovi Lincei	Rome.
Cte DE SPARRE, correspondant de l'Institut	Lyon.
Paul TANNERY (1)	Pantin (France).
Pierre TERMIER, membre de l'Institut	Paris.
R. P. A. VERSCHAFFEL, correspondant de l'Institut	Hendaye (France).
R. P. E. WASMANN, S. J.	Valkenburg (Pays-Bas).
Aimé WITZ, correspondant de l'Institut	Lille.
WOLF (1), membre de l'Institut	Braine (France).
R. ZEILLER (1), membre de l'Institut.	Paris.

Liste générale des membres de la Société scientifique de Bruxelles (1921)

ABAURREA (Luis), Molviedro, 6. — Séville (Espagne).

D'ADHÉMAR (Vte Robert), professeur aux Facultés catholiques, 14, place de Geneviėres. — Lille (Nord - France).

AGNIEL (G.), ingénieur à la Cie des Mines de Vicoigne et de Nœux. — Verquin (Pas-de-Calais — France).

ALLIAUME (Maurice), professeur à l'Université, 130, rue de Bruxelles. — Louvain.

ANDRÉ (J.-B.), inspecteur général au ministère de l'Intérieur, 127, avenue Brugman. — Bruxelles.

ANNYCKE (Abbé Théophile), professeur à la Faculté libre des Sciences, 7, rue Lestiboudois. — Lille (Nord-France).

ARDUIN (Abbé Alexis), à N.-D. d'Aiguebelle, par Grignan (Drôme — France).

ARIÈS (Colonel), correspondant de l'Institut, 9, boulevard du Roi. — Versailles (Seine-et-Oise — France).

BAECKELMANS (Abbé Louis), professeur de sciences à l'Institut Ste-Marie, 160, chaussée de Haecht. — Schaerbeek (Bruxelles).

---

(1) Décédé.

Baeckeroot (Abbé Georges), professeur de géographie à l'École libre des hautes études commerciales, 60, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

Bagnall (R. S.), Maître de Forges, 5, Hygham Place. — Newcastle-on-Tyne (Angleterre).

Baivy (Dr Zénon), rue Louise. — Namur.

Barrois, membre de l'Institut, 41, rue Pascal. — Lille (Nord — France).

Baseil (Abbé), professeur au Séminaire. — Floreffe.

Bastin (F.), 104, chaussée de Malines. — Anvers.

Battez (Dr Gustave), agrégé des Facultés de médecine, professeur à l'Université catholique, 91, rue Jacquemars-Gielée. — Lille (Nord — France).

Beaujean (Charles), directeur général de la Caisse Générale d'Épargne et de Retraite, 20, rue de l'Église. — Rixensart.

Béchaux (Aug.), correspondant de l'Institut, 56, rue d'Assas. — Paris.

Bellette (Paul), conservateur du Musée de Douai. — Douai.

Belpaire (Abbé Jules), docteur en sciences physiques et mathématiques, directeur du Collège St-Rombaut. — Malines.

Berleur (Adolphe), ingénieur, 17, rue Saint-Laurent. — Liége.

Berlingin (Melchior), ingénieur-directeur des Établissements de la Société de la Vieille-Montagne. — Viviez (Aveyron — France).

Bernard (Louis), professeur à l'École libre des hautes études industrielles, 28, rue de Roubaix. — Lille (Nord — France).

Bertrand (Abbé G.), astronome, observatoire d'Abbadia. — Hendaye (Basses-Pyrénées — France).

Besson (Dr A.), professeur suppléant à la Faculté libre de médecine, 17, square Rameau. — Lille (Nord — France).

de Béthune (Bon Gaston), officier d'artillerie, répétiteur à l'École militaire, 151, chaussée de Haecht. — Bruxelles.

Beyls (Chan. R.), vice-recteur de l'Université, 6, rue St-Michel. — Louvain.

Bibot (Dr), 55, rue Namèche. — Namur.

de Bien (Ferdinand), 150, rue du Trône. — Bruxelles.

Biot (Auguste), docteur en sciences physiques et mathématiques. 40, rue Liévin de Winne. — Gand.

Biourge (O.), professeur à l'Université, 20, rue du Canal. — Louvain.

Blondel (Alfred), ingénieur, 1, place du Parc. — Tournai.

Blondel (G.), professeur au Collège de France, 31, rue de Bellechasse. — Paris.

de la Boëssière-Thiennes (M^is), 19, rue aux Laines. — Bruxelles ; ou, château de Lombise, par Lens (Hainaut).

Boine (D^r J.), 134, avenue des Alliés. — Louvain.

Bolsius (R. P. Henri), S. J., 18a, Kerkstraat. — Oudenbosch (Pays-Bas).

Bosmans (R. P. Henri) S. J., Nouveau Collège St-Michel, 24, Boulevard St-Michel. — Bruxelles.

Bouckaert, 131, boulevard Lambermont. — Bruxelles.

Boulangé (Henry), maître de conférences de zoologie aux facultés catholiques, 95, rue des Stations. — Lille (Nord — France).

Boule (Abbé L.), professeur de biologie, directeur de la section agricole de l'Institut catholique, 31, rue de la Fonderie. — Toulouse (Haute-Garonne. — France).

Boussinesq (J.), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université, 22, rue Berthollet. — Paris.

du Boys (Paul), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, 19, rue Oudinot. — Paris.

Branly (Édouard), membre de l'Institut, professeur à l'Institut catholique, 31, avenue de Tourville. — Paris.

Braun (Alexandre), sénateur, 102, rue du Prince Royal. — Bruxelles.

Brifaut (Valentin), membre de la Chambre des Représentants, 131, rue de Stassart. — Bruxelles.

de Broqueville (B^on Charles), ministre d'Etat. — Bruxelles.

Brunhes (Jean), professeur au Collège de France, 1, Grand'Rue. — Bellevue (Seine-et-Oise. — France).

Bruylants (G.), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, 32, rue des Récollets. — Louvain.

Bruylants (P.), professeur à l'Université, 39, boulevard de Tirlemont. — Louvain.

Cabeau (Abbé Charles), professeur au Collège St-Joseph — Virton.

Camboué (R. P. Paul), S. J., missionnaire catholique. — Tananarive (Madagascar).

Capart (Jean), membre correspondant de l'Académie Royale de Belgique, professeur à l'Université de Liége, conservateur et secrétaire des Musées Royaux du Cinquantenaire, 8, avenue Roger Van den Driessche. — Woluwe-Saint-Pierre.

Capellen-Smolders (Guillaume), commissaire d'arrondissement, rue de Namur. — Louvain.

Cappe de Baillon (P.), 73, rue des Stations. — Lille (Nord — France).

Caratheodory (Costa), 12, rue Petzmazoglon. — Athènes (Grèce).

Carlier (Joseph), ingénieur, 4, Montagne du Parc. — Bruxelles.

Caron (Hubert), professeur suppléant à la Faculté libre des Sciences, Allée des Jardins. — St-André-lez-Lille (Nord — France).

Carpentier (Abbé A.), professeur de botanique à la Faculté des Sciences de l'Institut catholique, 11, rue de Toul. — Lille (Nord — France).

Carpentier (Fritz), docteur en sciences naturelles, assistant à l'Université de Liége, 10, rue Vivegnis. — Liége.

Carton de Wiart (Edmond), directeur de la Société Générale, 13, avenue des Gaulois. — Bruxelles.

Carton de Wiart (Henri), ministre de l'Intérieur et chef du Cabinet, 137, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

Casarès (Jésus), 93, Calle San Andrès. — La Coruña (Espagne).

Casteels (L.), docteur en sciences physiques et mathématiques, assistant à l'Observatoire royal, 11, avenue Houzeau. — Uccle (Bruxelles).

Caufriez (Henri), ingénieur en chef, directeur d'administration au Ministère des Chemins de fer, directeur général de la Société nationale des chemins de fer vicinaux, 28, avenue Albert-Elisabeth, ou 14, rue de la Science. — Bruxelles.

Charles (R. P. Jean), S. J., Institut Saint-Ignace, 37, Courte rue Neuve. — Anvers.

Charles (R. P. Pierre), S. J., 11, rue des Récollets. — Louvain.

Charron (E), docteur ès sciences physiques, professeur à l'Université catholique, 13, rue de Toul. — Lille (Nord-France).

Claerhout (Abbé J.), curé de Caster, par Anseghem.

Claes (F.), conservateur du Musée du Steen, 12, rue St-Vincent. — Anvers.

Claeys-Boúúaert (A.), sénateur, 6, rue d'Orange. — Gand.

Cocheteux (Chan.), directeur de l'Institut Saint-Louis, rue du Marais. — Bruxelles.

Cogels (J.-B.-Henri), 181, avenue des Arts. — Anvers.

Colegio de Estudios superiores de Deusto (R. P. J. Man. Obeso, S. J.). — Bilbao (Espagne).

Colens, ingénieur et secrétaire général du Département des Chemins de fer, Marine, Postes et Télégraphes, 40, rue Juste-Lipse. — Bruxelles.

Collangettes (R. P.), S. J., professeur de physique à l'Université Saint-Joseph. — Beyrouth (Syrie).

Collantes (Pedro), 2ª calle del Puente de Alvarado, 39. — Mexico (Mexique).

Collège Notre-Dame de la Paix, 57, rue de Bruxelles. — Namur.

Collège Saint-François-Xavier, 30, Park Street. — Calcutta (Indes anglaises, via Brindisi).

Collège Saint-Ignace. — Sarria (Barcelone. — Espagne).

Collège Saint-Jean Berchmans, 35, Place de Meir. — Anvers.

Collège Saint-Jean Berchmans, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Collège Saint-Joseph, 13, rue de Bruxelles. — Alost.

Collège Saint-Michel, 24, boulevard Saint-Michel. — Bruxelles.

Collège Saint-Servais, 92, rue Saint-Gilles. — Liége.

Collège de la Sainte-Trinité, Vieux Marché. — Louvain.

Collin (Abbé Henri), professeur à l'Institut catholique de Paris, École des Carmes, rue de Vaugirard. — Paris (XV^{e}).

Conroy (Charles-C.), P. O. Box, 281. — Pasadena (Californie).

Convent (Alf.), docteur en médecine. — Woluwe-Saint-Lambert (Brabant).

Cooreman (Gérard), membre de la Chambre des Représentants, 161, avenue Louise. — Bruxelles.

Coppens (A.), professeur à l'Université de Louvain, rue St-Éloi. — Liége.

Cousot (Dr Georges), membre de l'Académie royale de médecine. — Dinant.

Crame (Auguste), colonel d'artillerie retraité, 42, quai des Moines. — Gand.

Crooy (S. G. Mgr), évêque de Tournai.

Crousse (Dr), 13, rue du Méridien. — Bruxelles.

Cuylits (Jean), docteur en médecine, 44, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.

Cuylits (Joseph), avocat, 30, rue du Japon. — Uccle (Bruxelles).

Daels (Dr Frans), professeur à l'Université, 103, rue Neuve Saint-Pierre. — Gand.

Dardel (Jean), médecin consultant aux eaux d'Aix et de Marlioz, à Aix-les-Bains. — Savoie (France).

Daubresse (Paul), ingénieur, professeur à l'Université, 98, rue de Paris. — Louvain.

Davelooze (Abbé A.), professeur de sciences au Collège. — Courtrai.

David (P.), docteur en droit et en sciences politiques. — Stavelot; ou 50, boulevard Piercot. — Liége.

David (Dr Alphonse), maître de conférences à la Faculté libre de médecine, 14, rue Saint-Jacques. — Lille (Nord — France).

Davignon (Vte Henri), Directeur de la *Revue Générale*, 76, rue de Trèves. — Bruxelles.

De Backer (Dr Paul), assistant à l'Université, 67, Coupure. — Gand.

De Baets (Herman), 11, rue des Boutiques. — Gand.

Debaisieux (Paul), professeur à l'Université, 7, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

De Becker (Mgr Jules), professeur à l'Université, 112, rue de Namur. — Louvain.

Deboucq (Léon), ingénieur en chef, directeur du 5e arrondissement des Mines, 12, rue Chapelle-Beaussart. — Mont-sur-Marchienne.

De Brabandère (Victor), avocat près la Cour d'appel, 57, rue du Marteau. — Bruxelles.

Dechevrens (R. P. Marc), S. J., directeur de l'Observatoire Saint-Louis. — Saint-Hélier (Jersey — Iles de la Manche — Angleterre).

Declercq (J.), professeur à l'Université, 38, rue Neuve Saint-Pierre. — Gand.

De Jace (Charles), professeur à l'Université, 272, boulevard d'Avroy. — Liége.

Dejardin (L.), directeur général honoraire des Mines, 138, avenue Defré. — Uccle.

De Jonghe (E.), professeur à l'Université de Louvain, 28, avenue Longchamp. — Uccle (Bruxelles)

De Lantsheere (Dr J.), oculiste, 11, rue Traversière. — Bruxelles.

Delassus (Dr Agile), professeur à l'Université catholique, doyen de la Faculté libre de médecine, 46, boulevard de la Liberté. — Lille (Nord — France).

Delattre (Dr Antoine), prosecteur d'anatomie à la Faculté libre de médecine, 116, rue d'Isly. — Lille (Nord — France).

De Launay, membre de l'Institut, professeur à l'École Nationale supérieure des Mines, 55, rue de Babylone. - Paris.

Delépine (Abbé Gaston), professeur de géologie à l'Université catholique, 13, rue de Toul. — Lille (Nord — France).

Delépine (Dr Joseph), assistant de clinique chirurgicale à la Faculté libre de médecine, 15, rue de Puebla. — Lille (Nord — France).

Delétrez (Dr A.), correspondant de l'Académie Royale de Médecine, 259, avenue de Tervueren. — Bruxelles.

Deleval (Henri), ingénieur aux Ateliers métallurgiques de Tubize, 1, rue de Bruxelles. — Tubize.

Delmarcel (G.), professeur à l'Université de Louvain, 232, avenue Molière. — Ixelles.

Delmer (Alexandre), ingénieur au Corps des Mines, 129, avenue de l'Hippodrome. — Bruxelles.

Delvigne (R. P. René), S. J., professeur à la Faculté des Sciences, Collège N.-D. de la Paix, 57, rue de Bruxelles. — Namur.

Delvosal (Jules), docteur en sciences physiques et mathématiques, astronome adjoint à l'Observatoire royal de Belgique, 84, rue Rouge. — Uccle (Bruxelles).

Demanet (Abbé Félix), professeur au Collège de Belle-Vue. — Dinant.

Demanet (Chan. S.), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Université, 23, rue de Bériot. — Louvain.

Demanet (M.), ingénieur, 161, avenue Molière. — Bruxelles.

de Meulemeester (D.), chargé de cours à l'Université, 58, boulevard Léopold. — Gand.

De Munnynck (R. P.), O. P., professeur à l'Université, Albertinum. — Fribourg (Suisse).

De Muynck (Chan. R.), professeur à l'Université, 8, place Saint-Jacques. — Louvain.

De Neyer (Abbé Léon), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur de mathématiques à l'Institut Saint-Louis, boulevard Botanique. — Bruxelles.

Denoël, ingénieur au Corps des Mines, 93, rue Bois-l'Évêque. — Liége.

Denys (D^r J), professeur à l'Université, correspondant de l'Académie Royale de Médecine, Institut Bactériologique, 96, rue Vital Decoster. — Louvain.

Depape (Abbé Georges), maître de conférences à la Faculté libre des sciences, 60, rue du Port. — Lille (Nord — France).

Deploige (Mgr), professeur à l'Université, Président de l'Institut supérieur de Philosophie, 1, rue des Flamands. — Louvain.

Deroitte (D^r Victor), ancien médecin de la colonie de l'État à Gheel, inspecteur-adjoint des asiles et colonies d'aliénés du Royaume, 192, avenue Albert. — Bruxelles.

Descamps-David (Baron), ministre d'État, professeur à l'Université de Louvain, 40, rue Belliard. — Bruxelles.

De Smedt (Abbé), chargé de cours à l'Université, 95, rue de Namur. — Louvain.

Desplats (D^r René), 181, rue Nationale. — Lille (Nord — France).

Dessain (Charles), libraire-éditeur, rue de la Blanchisserie. — Malines.

De Vadder (Victor), avocat à la Cour d'appel, 14, rue Blanche. — Ixelles (Bruxelles).

De Veer (R. P.), S. J., directeur der Vereenigingen G. en W., Abstederdijk, 303. — Utrecht (Pays-Bas).

Devisé (R. P. R.), S. J., Ancienne Abbaye. — Tronchiennes (Gand).

De Vos (Abbé Joseph), curé de Heestert (Flandre Occidentale).

De Walque (François), professeur émérite de l'Université, 28, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

De Wildeman (É.), directeur du Jardin Botanique de l'État, 122, rue des Confédérés. — Bruxelles (N.-E.)

D'Halluin (D^{r} Maurice), professeur suppléant à la Faculté catholique de Médecine, 8, rue Nicolas Leblanc. — Lille (Nord — France).

D'Hoop (E.), ingénieur, 80, rue Gachard. — Ixelles.

Diderrich (N.), membre du Conseil colonial, 64, rue Royale. — Bruxelles.

Dierckx (R. P. Fr.), S. J., professeur à la Faculté des Sciences, Collège Notre-Dame de la Paix, 57, rue de Bruxelles. — Namur.

Dochain-Defer (Félix), industriel. — Couillet.

Dopp (R. P. Henri), S. J., docteur en sciences physiques et mathématiques, 11, rue des Récollets. — Louvain.

de Dorlodot (J.), ingénieur civil des Mines, directeur du Musée houiller, 44, rue de Bériot. — Louvain.

de Dorlodot (Chan. H.), docteur en théologie, professeur à l'Université, 42, rue de Bériot. — Louvain.

Drion (B^{on} Adolphe), avocat. — Gosselies.

Dubois-Verbrugghen (D^{r} É.), 53, rue Marie-Thérèse. — Bruxelles.

Dubois (Ernest), directeur de l'Institut supérieur de commerce, membre du Conseil colonial, 36, rue de Vrière. — Anvers.

Dubois (Vital), docteur en géographie, professeur à l'École normale. — Couvin.

Du Bost, sénateur, 50, avenue des Arts. — Bruxelles.

Dufrane (D^{r} C.), chirurgien à l'hôpital, 36, rue d'Havré. — Mons.

Dumas-Primbault (Henri), ingénieur, Château de la Pierre. — Cérilly (Allier — France).

Dumez (Abbé Robert), docteur en sciences naturelles, professeur au Petit Séminaire. — Roulers (Flandre Occidentale).

Duplat (G.), avocat à la Cour d'appel, 48, rue aux Laines. — Bruxelles.

Dupont (Dr Émile), médecin principal, directeur de l'hôpital militaire de Bruxelles, 12, rue Goffart. — Bruxelles.

Dupret, sénateur, 148, rue Royale. — Bruxelles.

Dupriez (Léon), professeur à l'Université, 194, rue de Bruxelles. — Louvain.

Dupuis (Henri), ingénieur, administrateur de la Société anonyme des Usines de Montcherret. — Acoz (Hainaut).

Duquenne (Dr Louis), 15, rue Lonhienne. — Liége.

Duret (Dr), doyen de la Faculté catholique de Médecine, 21, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

Dusausoy (Clément), professeur émérite de l'Université de Gand. — Virginal (Brabant).

Dusmet y Alonso (José-Marie), docteur en sciences naturelles, 19, Claudio Coello. — Madrid.

Duthoit (E.), professeur à la Faculté catholique de Droit, 141, rue Jacquemars-Gielée. — Lille (Nord — France).

Dutilleux (Maurice), ingénieur, 3, place François-Bossuet. — Bruxelles.

Dutordoir (Hector), ingénieur en chef, directeur du service technique provincial, 217, boulevard du Château. — Gand.

Dutordoir (Augustin), 217, boulevard du Château. — Gand.

École libre de l'Immaculée-Conception. — Vaugirard (Paris).

École libre Sainte-Geneviève. — Versailles.

Egan (R. P Michel), S. J., M. A., F. R. U. I., 35, Lower Leeson Street. — Dublin (Irlande).

Fabry (Louis), correspondant de l'Institut, astronome à l'Observatoire, 49, chemin des Chartreux. — Marseille (Bouches-du-Rhône — France).

de Favereau de Jenneret (Bon), président du Sénat, 10, rue Belliard. — Bruxelles.

Favrelle (Maurice), 14, rue des Pyramides. — Lille (Nord — France).

Fernandès (Dr Rob.), 1, rue du Pôle. — Saint-Josse-ten-Noode (Bruxelles).

Ferrata (S. É. le cardinal). — Rome.

Fiessinger (Dr), membre correspondant de l'Académie de médecine, 4, rue de la Renaissance. — Paris.

Petit Séminaire épiscopal de Floreffe.

de Fooz (Guillaume), ingénieur civil des Mines, docteur en sciences physiques et mathématiques, 52, boulevard Albert. — Gand.

Fournier (Dom Grégoire), O. S. B., abbaye de Maredsous. — Denée-Maredsous.

François (Dr Adhémar), 97, rue Belliard. — Bruxelles.

Francotte (Xavier), membre de l'Académie Royale de Médecine, professeur à l'Université, 15, quai de l'Industrie. — Liége.

Gaillard (R. P. José), S. J., Collège St-Michel, 24, boulevard Saint-Michel. — Bruxelles.

Gelin (Abbé E.), docteur en philosophie et en théologie, professeur de mathématiques supérieures au Collège Saint-Quirin. — Huy.

Georgetown College Observatory (Rev. Director of the). — Washington D. C. (États-Unis d'Amérique).

Gerard (Ernest), secrétaire général honoraire du Ministère des Chemins de fer, 21, avenue de la Renaissance. — Bruxelles.

Gilbert (Paul), ingénieur. — Heer-Agimont (Namur).

Gillain (Abbé Jules), ingénieur agricole, professeur de sciences au Collège St-Joseph. — Virton.

Gillès de Pélichy (Bon Ch.), membre de la Chambre des Représentants. — Gits-lez-Roulers ; ou, rue Fossé-aux-Loups. — Bruges.

Gillet (R. P. Charles), S. J., St-John's School. — Ranchi, Bengale (East-India).

Gillet (J.), docteur en sciences, 106, rue Saint-Bernard. — Bruxelles.

Gillon (G.), professeur à l'Université, 5, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Glorieux, docteur en médecine, 236, avenue de Tervueren. — Woluwe-Saint-Lambert.

Goedseels (Édouard), administrateur-inspecteur de l'Observatoire royal de Belgique, avenue Circulaire. — Uccle (Bruxelles).

Goedseels (Joseph), avocat près la Cour d'appel, conseiller juridique à l'armée belge, 152, chaussée d'Ixelles. — Bruxelles.

Goffinet (H.), avocat à la Cour d'appel, 36, rue des Deux Églises. — Bruxelles.

Gollier (Théophile), professeur à l'Université de Liége, 92, rue Africaine. — Bruxelles.

Gonzalez de Castejon (Miguel), comte d'Aybar, lieutenant-colonel d'État-Major, intendant général de la Maison Royale d'Espagne, Real palacio. — Madrid.

Goris (Ch.), docteur en médecine, membre titulaire de l'Académie Royale de Médecine, 181, rue Royale. — Bruxelles.

Goubau (R.), docteur ès sciences, professeur à l'Université, 27, Cour du Prince. — Gand.

Granito di Belmonte (S. É. le cardinal). Rome.

de Greeff (R. P. Henri), S. J., professeur à la Faculté des Sciences, Collège Notre-Dame de la Paix, 57, rue de Bruxelles. — Namur.

Grégoire (Chan. Victor), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 42, rue de Bériot. — Louvain.

Greindl (B^{on}), général, directeur du Génie d'Armée, 19, rue Tasson-Snel. — Bruxelles.

Grinda (Jésus), inspecteur général des chaussées, canaux et ports, 24, rue Sagasta. — Madrid.

de Grossouvre (A.), correspondant de l'Institut, ingénieur en chef des Mines en retraite, 7, rue Mayet-Genetry. — Bourges (Cher — France).

Groussau (C.), député du Nord, professeur aux Facultés libres de Lille, 26, rue St-Louis. — Versailles.

Guermonprez (D^r), professeur aux Facultés catholiques, membre correspondant de l'Académie Royale de médecine de Belgique et de la Société de chirurgie de Paris, 63, rue d'Esquermes. — Lille (Nord — France).

Hachez (F.), professeur à l'Université de Louvain, 19, rue de Pavie. -- Bruxelles.

Hagen (R. P. Jean), S. J., directeur de l'Observatoire du Vatican. — Rome.

Haibe (Dr Achille), directeur de l'Institut provincial de Bactériologie, rue Louise. — Namur.

Hallez (E.),ingénieur-directeur au charbonnage du Grand-Hornu. — Hornu (Hainaut).

Hamonet (Chan.), professeur à l'Institut catholique, 5, place du Château. — Le Mans (Sarthe — France).

Harmant (Émile), ingénieur, membre du Conseil supérieur du Travail, 121, rue de Pâturages. – Wasmes(Hainaut).

Haton de la Goupillière (J.-N.), membre de l'Institut, directeur honoraire de l'École des Mines, 9, rue du Lycée. — Pau (Basses-Pyrénées — France).

Hauptmann (Max), directeur de la Banque commerciale de Belgique, 71, rue Royale. — Bruxelles.

Havenith (J.), adjoint d'État-Major, 2, place Quetelet. — Bruxelles.

Havet (Dr J.), professeur à l'Université, 87, rue des Flamands. — Louvain.

Hebbelynck (Mgr A.), recteur magnifique honoraire de l'Université de Louvain. — Meirelbeke (Gand).

Helleputte (G.), ministre d'État, 10, place St-Antoine. — Louvain.

de Hemptinne (Alexandre), professeur à l'Université de Louvain, 51, rue Basse des Champs. – Gand.

Henrard (Dr Étienne), 11, rue Joseph II. — Bruxelles.

Henrard (Dr Félix), 38, rue Washington. — Bruxelles.

Henry (Albert), docteur en droit, directeur général au Ministère de l'Agriculture, 216, avenue Rogier. — Bruxelles.

Henseval (Dr Maurice), professeur à l'Université, correspondant de l'Académie Royale de Médecine, Institut d'hygiène, rue Kluyskens. — Gand.

Heylen (S. G. Mgr), évêque de Namur.

Heymans (Dr F.), docteur en sciences, professeur à l'Université, 7, boulevard de l'Hospice. — Gand.

Humbert (G.), membre de l'Institut, ingénieur en chef des Mines, professeur honoraire de l'École polytechnique. — Pont-Authon (Eure — France).

Iniguez y Iniguez (Francisco), catedràtico de astronomia en la Universidad central, ex-director del Observatorio astronomico, calle de Atocha, 57 y 59. — Madrid.

Institut Saint-Ignace, 37, Courte rue Neuve. — Anvers.

Jacobs (Fernand), président de la Société belge d'astronomie, 344, avenue Louise. — Bruxelles.

Janne (Henry), ingénieur civil des Mines, docteur en sciences physiques et mathématiques, répétiteur à l'Université, 142, avenue de l'Observatoire. — Liége.

Janssen (A.), docteur en droit, 81, rue d'Arlon. — Bruxelles.

Janssens (Chan. F. A.), professeur à l'Université, 20, rue du Canal. — Louvain.

Javaux (Dr), 79, rue des Eburons. — Bruxelles.

Joly (Albert), juge au Tribunal de première instance, 8, rue de la Grosse-Tour. — Bruxelles.

Joly (Léon), conseiller au Conseil des Mines, 58, avenue Brugman. — Bruxelles.

Jordan (Camille), membre de l'Institut, professeur honoraire de l'École polytechnique, 46, rue de Varennes. — Paris.

Kaisin (Félix), professeur à l'Université, 38, rue de Bériot. — Louvain.

Kersten (Joseph), inspecteur général des charbonnages patronnés par la Société Générale, 3, Montagne du Parc. — Bruxelles.

Kieffer (Abbé J. Jacques), docteur en philosophie naturelle, professeur au Gymnase épiscopal. — Bitche (Moselle — France).

Kirsch (R. P. Alexandre-M.), C. S. C., Université de Notre-Dame (Indiana — États-Unis).

Kirsch (Mgr J.-P.), professeur à l'Université. — Fribourg (Suisse).

de Kowalski (Dr Joseph), ministre de Pologne auprès du St-Siège, 56, Via Nomentana. — Rome.

Kowalski (J.), docteur en sciences naturelles, 97, rue de Paris. — Nantes.

Ladeuze (Mgr Paulin), recteur magnifique de l'Université, 110, rue de Namur. — Louvain.

Lagae, professeur de mathématiques supérieures. — Drèves-Thuin.

Lagasse de Locht (Charles), directeur général honoraire des Ponts et Chaussées, président de la Commission royale des monuments et des sites, 167, chaussée de Wavre. — Bruxelles.

Lagasse de Locht (Édouard), ingénieur. — Reckheim (Limbourg).

Lagasse de Locht (Victor), ingénieur civil des Mines et ingénieur électricien, 36, rue Capouillet. — Bruxelles.

Lambin (A.), ingénieur en chef, directeur des Ponts et Chaussées, 181, avenue de Tervueren. — Woluwe-St-Pierre (Bruxelles).

Lambiotte (Omer), directeur-gérant des charbonnages Élisabeth. — Auvelais (prov. de Namur).

Lambo (R. P. Charles), S. J., supérieur de l'Institut Saint-Ignace, 37, Courte rue Neuve. — Anvers.

Lambot (Oscar), professeur à l'Athénée royal d'Ixelles, 56, avenue Malou. — Bruxelles.

Laminne (S. G. Mgr Jacques), Évêque titulaire d'Inschilla, auxiliaire de Sa Grandeur Mgr l'Évêque de Liége. — 14, rue de l'Évêché. — Liége.

Lange (R. P. René), S. J., 11, rue des Récollets. — Louvain.

Lannoy (R. P. Jules), S. J., Collège Saint-Michel, 14, rue des Ursulines — Bruxelles.

de Lapparent (Jacques), professeur de pétrographie à la Faculté des sciences de Strasbourg, 12, quai Koch. — Strasbourg (Alsace — France).

Laurent (Camille), docteur en médecine, 5, rue Joseph Jaquet. — Bruxelles.

Lebizay (Major A. E. M.), professeur d'artillerie à l'École Militaire, 116, avenue de Woluwe. — Woluwe-Saint-Lambert.

Lebrun (Dr Hector), professeur à l'Université, 43, boulevard Léopold. — Gand.

Lecat (Maurice), docteur en sciences physiques et mathématiques, docteur en sciences naturelles, ingénieur civil des Mines, 92, avenue des Alliés. — Louvain.

Le Chatelier (H.), membre de l'Académie des Sciences, professeur à la Sorbonne et à l'École Nationale Supérieure des Mines, associé de l'Académie Royale de Belgique, 76, rue Notre-Dame des Champs. — Paris (VIe).

Lefebvre (Mgr Ferdinand), professeur à l'Université, 34, rue de Bériot. — Louvain.

Lefebvre (R. P. Maurice), provincial des Missions de Scheut, docteur en sciences naturelles, 476, chaussée de Ninove. — Scheut (lez-Bruxelles).

Le Grand (Chanoine Alfred), 37, rue de Bruxelles. — Namur.

Lejeune de Schiervel (Charles), ingénieur des Mines, 12, rue Stévin. — Bruxelles.

Lejeune-Simonis, château de Sohan. — Pepinster (prov. de Liége).

Lemaire (Abbé), docteur en sciences naturelles et en philosophie, professeur de philosophie au Petit Séminaire. — Malines.

Lemaire (Dr A.), professeur à l'Université, 88, rue de Tirlemont. — Louvain.

Lemoine (Georges), membre de l'Institut, inspecteur général des Ponts et Chaussées en retraite, professeur honoraire de l'École Polytechnique, 76, rue Notre-Dame des Champs. — Paris.

Lenoble, professeur aux Facultés catholiques, 36, rue Négrier. — Lille (Nord — France).

Le Paige (G.), membre de l'Académie Royale de Belgique, administrateur-inspecteur de l'Université, plateau de Cointe. — Liége.

Lepoutre (Dr Carlos), professeur suppléant à la Faculté libre de médecine, 19, rue de Bourgogne. — Lille (Nord — France).

Lesne (Mgr Émile), recteur de l'Université catholique, 60, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

Levie (Michel), ministre d'État, 68, rue du Méridien. — Bruxelles.

Lhoest (Henri), ingénieur, directeur-gérant du charbonnage de La Haye, 6, avenue Mahiels. — Liége.

Liévin (Abbé Omer), maître de conférences à la Faculté libre des Sciences, 58, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

de Limburg-Stirum (Cte Adolphe), membre de la Chambre des Représentants, 72, rue du Trône. — Bruxelles.

Limpens (Émile), avocat. — Termonde.

Lucas (R. P. J. Désiré), S. J., professeur à la Faculté des Sciences, Collège Notre-Dame de la Paix, 57, rue de Bruxelles. — Namur.

Maes (Joseph), docteur en géographie, conservateur de la Section ethnographique au Musée du Congo. — Tervueren.

Maffi (S. É. le Cardinal), archevêque de Pise.

Majorin-Antoine (Frère), des Écoles chrétiennes, professeur au Pensionnat St-Berthuin. — Malonne (pr. de Namur).

Malengreau (F.), professeur à l'Université, Institut de physiologie. — Louvain.

Mansion (Augustin), professeur à l'Université, 126, rue de Tirlemont. — Louvain.

Mansion (Hubert), ingénieur, 76, boulevard Victor Hugo. — Neuilly (Seine — France).

Marchal (chan. Louis), professeur à l'Université, 36, rue de Diest. — Louvain.

Maréchal (R. P. Joseph), S. J., docteur en sciences naturelles, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Maroy (Dr L.), 4, boulevard St-Michel. — Bruxelles.

Martin (Dr Is.), 6, boulevard d'Omalius. — Namur.

Masen (Dr Aimé), docteur en médecine, 30, rue de Middelbourg. — Boitsfort (Brabant).

Matagne (Dr Henri), docteur en médecine, 31, avenue des Courses. — Bruxelles.

Matignon, professeur de chimie au Collège de France, 9, place Marcellin Berthelot. — Paris.

Maubert (Frère), des Frères des Écoles chrétiennes, au Scolasticat de Jesu Placet. — Louvain.

de Maupeou (Cte), ingénieur, directeur du Génie maritime, 4, place du Gast. — Laval (Mayenne — France).

de Meester (Emmanuel), sénateur, 27, rue Montebello. — Anvers.

de Meeus (Cte Louis), docteur en droit, château d'Argenteuil. — Waterloo.

Mélot (Aug.), rue Grandgagnage. — Namur.

de Mendizabal Tamborrel (Joaquin), ingeniero geógrafo, profesor de astronomia y geodesia en el colegio militar, 5a calle de Manuel Doblado, no 67. — Mexico (Mexique).

Mennes (Dr), 21, Rosier. — Anvers.

Mennes (Auguste), ingénieur, 16, avenue Albert-Elisabeth. — Bruxelles.

Mercier (S. É. le cardinal), archevêque de Malines.

Merten (Albert), ingénieur, professeur à l'Université, 25, boulevard Albert. — Gand.

Mertens (Albert), professeur à l'Université de Louvain. — Cruybeke.

Meurice (Léon), professeur à l'Université de Liége. — Visé.

Meuwissen (J.), ingénieur, professeur à l'Université, 176, chaussée de Courtrai. — Gand.

Meyer (R. P. Léon), S. J., Collegio Nobrega. — Recipe (Brésil).

Michiels (L.), chargé de cours à l'Université, 150, rue Frédéric Lints. — Louvain.

Michotte (Albert), professeur à l'Université, 1, rue des Flamands. — Louvain.

Michotte (abbé P.), professeur à l'Université, 17, rue des Récollets. — Louvain.

Moeller (Dr A.), membre de l'Académie Royale de médecine, 23, rue du Taciturne. — Bruxelles.

de Moffarts (Bon Paul), château de Botassart, par Noirefontaine (prov. de Luxembourg).

de Montessus de Ballore (Cte F.), directeur du Service séismologique du Chili, 206, av. A. Varas, Providencia. — Santiago (Chili).

de Montessus de Ballore (Vte Robert), lauréat de l'Institut, docteur ès sciences mathématiques, professeur à l'Université catholique de Lille, professeur libre à la Faculté des Sciences de Paris, membre du Comité de rédaction du Journal de mathématiques pures et appliquées, 15, boulevard Bigo-Danel. — Lille (Nord — France).

Moreau (Fernand), docteur en sciences physiques et mathématiques, assistant à l'Observatoire royal. — Uccle (Bruxelles).

Moreau (R.), ingénieur aux mines d'Anzin, 3, rue de Paris. — Denain (Nord — France).

Morelle (Dr Aimé), chef du service d'urologie et de dermatologie à l'Institut chirurgical, 26, rue Archimède. — Bruxelles.

Moreux (Abbé Th.), directeur de l'Observatoire. — Bourges (Cher — France).

Morisseaux (Ch.), ingénieur honoraire des Mines, membre du Conseil Colonial, directeur du Crédit Général Liégeois à Bruxelles, 60, rue Royale. — Bruxelles.

Mullie (Gilbert), inspecteur vétérinaire adjoint au Ministère de l'Agriculture, 23, avenue Jean Linden. — Bruxelles.

Nava di Bontife (S. É. le cardinal), archevêque de Catane (Sicile — Italie).

Navas (R. P. Longin), S. J., Colegio del Salvador. - Zaragoza (Espagne).

Nelis (C.), professeur à l'Université de Louvain, 334, chaussée de Namur. — Héverlé.

Nerincx (Alfred), professeur à l'Université, secrétaire de l'Institut de Droit international, 36, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Neuberg (J.), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur émérite de l'Université de Liége, 6, rue de Sclessin. — Liége.

Noblesse (Chan. C.), professeur à l'Université, Collège Adrien VI, place de l'Université. — Louvain.

Noyons (A.), professeur à l'Université, 35, boulevard de Tirlemont. — Louvain.

Nyssens (Pierre), directeur du Laboratoire agricole de l'État, 58, boulevard du Château. — Gand.

Obeso (R. P. Manual), S. J., Colegio de Estudios Superiores de Deusto. — Bilbao (Espagne).

d'Ocagne (Maurice), inspecteur général des Ponts et Chaussées, professeur à l'École Polytechnique, 30, rue de la Boétie. — Paris.

Orban de Xivry (B^{on}), sénateur, avenue des Alliés. — Louvain.

Pasquier (Alfred), docteur en médecine. — Châtelet (Hainaut).

Pasquier (Ern.), professeur à l'Université, 22, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Pauwels (R. P. Joseph), S. J., docteur en sciences naturelles, professeur de chimie, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Picard (É.), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, professeur à la Sorbonne, Palais de l'Institut, quai Conti. — Paris (VI^e).

Pieraerts (J.), conservateur au Musée colonial de Tervueren, 161, avenue F. Lambeau. — Bruxelles.

de Pierpont (Édouard), député permanent, château de Rivière (prov. de Namur).

du Plessis (Joachim), licencié ès sciences, chimiste à la soierie de Tubize. — Tubize.

Poskin (Paul), professeur de physique à l'Institut agricole de l'État. — Gembloux.

Poullet (Prosper), professeur à l'Université de Louvain, membre de la Chambre des Représentants, délégué de Belgique à la Société des Nations, 30, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Proost (Alphonse), directeur général honoraire au Ministère de l'Agriculture, 227, rue Royale S^te^-Marie.— Bruxelles.

Provincial (R. P.) de la Compagnie de Jésus, 165, rue Royale. — Bruxelles.

Pruvost (Pierre), docteur ès sciences, maître de conférences à la Faculté des Sciences, 159, rue Brûle-Maison. — Lille (Nord — France).

Puiseux (P.), membre de l'Institut, 2, rue Le Verrier. — Paris.

Quilliet (S. G. Mgr Hector-Raphaël), évèque de Lille, 68, rue Royale. — Lille (Nord — France).

Rachon (Abbé Prosper), curé de Ham, par Longuyon (Meurthe-et-Moselle. — France).

Raquet (Désiré), pharmacien de 1re classe, professeur suppléant à l'Université catholique, 114, rue Solférino. — Lille (Nord — France).

Raymond (Frère), professeur de Sciences, 19, rue Moris. — St-Gilles (Bruxelles).

Rector (R. P.) del Colegio del Jesús. — Tortosa (Tarragona — Espagne).

Renaud, professeur de métallurgie à l'Université de Gand, 54, Boulevard Lousbergs. — Gand.

de Renesse (C^{te}), sénateur, 25, rue de la Science. — Bruxelles.

Renier (Armand), ingénieur au Corps des Mines, chef du Service géologique de Belgique, chargé de cours à l'Université de Liége, 97, avenue de l'Armée. — Bruxelles.

de Ribaucourt (C^{te} Gaston), ingénieur électricien, château de Perck (par Vilvorde).

Richald (Jos.), professeur à l'Université de Gand, ingénieur en chef, directeur des Ponts et Chaussées, 69, rue Archimède. — Bruxelles.

Rinaldini (S. É. le Cardinal). — Rome.

Rodriguez Risueno (Emiliano), catedrático de historia natural en la Universidad, Obispo, 9, prâl. — Valladolid (Espagne).

Roersch (A.), professeur à l'Université, 16, place du Casino. — Gand.

Rogie (Dr), professeur à la Faculté catholique de médecine, 56, rue du Port. — Lille (Nord — France).

Roland (Pierre), ingénieur, avenue Louis Lepoutre. — Bruxelles.

Rome (Abbé A.) professeur au Collège Ste-Gertrude. — Nivelles.

Rutten (S. G. Mgr), évêque de Liége.

Sabatier (Paul), membre de l'Académie des Sciences de Paris. — Toulouse (Haute-Garonne — France).

Sageret, château de Kervihan, par Carnac (Morbihan — France).

de Saintignon (Cte), maître de Forges. — Longwy-Bas (Meurthe-et-Moselle — France).

Salée (Achille), professeur à l'Université, Musée et laboratoire de Paléontologie, 38, rue de Bériot. — Louvain.

Schaffers (R. P. Victor), S. J., docteur en sciences physiques et mathématiques, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Scherpereel (Abbé Clément), aumônier militaire, Caserne rouge. — Aix-la-Chapelle.

Scheuer (R. P. Pierre), S. J., 11, rue des Récollets. — Louvain.

de Schilde (Bon), château de Schilde (province d'Anvers).

de Schilde (Bon G.), gouverneur de la province d'Anvers. — Anvers.

Schmitz (R. P. Gaspard), S. J., professeur et directeur du Cabinet de Géologie au Collège St-Jean-Berchmans, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Schockaert (R.), professeur à l'Université, 133, rue de Tirlemont. — Louvain.

Schoonjans (R. P. Charles), S. J., Collège Saint-Servais, 92, rue Saint-Gilles. — Liége.

Schreiber, directeur général au Ministère de l'Agriculture, 58, rue des Boers. — Etterbeek (Bruxelles).

Schul (R. P. Jean), S. J., Institut S^t^-Ignace, 37, Courte rue Neuve. — Anvers.

Segers (Paul), ministre d'État, 73, chaussée de Malines. — Anvers.

Seghers (S. G. Mgr), évêque de Gand.

de Selliers de Moranville (Ch^er^ A.), lieutenant-général, 152, avenue Molière. — Ixelles.

Senderens (Mgr), directeur des sciences de l'Institut catholique, 31, rue de la Fonderie. — Toulouse.

Sibenaler (N.), professeur à l'Université, 31, boulevard de Jodoigne. — Louvain.

Sièges, docteur en droit et en philosophie, 11, Ienaerstrasse. — Berlin, Wilmersdorf.

Silveryser (Abbé Florent), professeur au collège de Herck-la-Ville.

Simonart (Fernand), chargé de cours à l'Université, Collège du St-Esprit, rue de Namur. — Louvain.

de Sinéty (Abbé Robert), Séminaire. — Vals (Haute-Loire — France).

Siret (Henri), ingénieur, administrateur-délégué, directeur général de la Société anonyme Union Allumettière, 27, avenue Brugman. — Bruxelles.

Siret (Louis), ingénieur, avenue Louis Lepoutre. — Ixelles.

Slingeneyer de Goeswin, général-major, 11, rue van Schoonbeke. — Anvers.

Smedts (Arthur), répétiteur à l'Université, 60, boulevard St-Liévin. — Gand.

Smekens (Th.), président honoraire du Tribunal de 1^re^ instance, 34, avenue Quentin Metsys. — Anvers.

Smets (D^r^ H.), 104, rue van de Weyer. — Bruxelles.

Smits (Eugène), ingénieur, 93, avenue Brugman. — Bruxelles.

Soisson (G.), ingénieur, docteur en sciences, professeur, 6, rue Goethe. — Luxembourg (Grand-Duché).

Solé (D^r^ Victor), médecin en chef de l'Institut SS. Jean et Elisabeth, 251, avenue de Tervueren. — Bruxelles.

Somville (Oscar), docteur en sciences physiques et mathématiques, 64, avenue de la Floride. — Uccle (Bruxelles).

de Sparre (C^te^), correspondant de l'Institut, doyen de la Faculté catholique des Sciences, 2, place St-Jean. — Lyon (France).

Stainier (Xavier), professeur à l'Université, 7, boulevard des Hospices. — Gand.

Standaert (A.), membre de la Chambre des Représentants, 8, rue Dyver. — Bruges.

Stillemans (Jean), ingénieur, directeur des travaux d'Etterbeek, 25, rue Champ du Roi. — Bruxelles.

Stoffaes (Chan.), professeur à la Faculté catholique des Sciences, directeur de l'Institut des Arts et Métiers, 6, rue Auber. — Lille (Nord — France).

Storms (Ernest), ingénieur, 6, rue du Receveur. — Bruges.

Stouffs (Dr Jules), 166, avenue Louise. — Bruxelles.

Stouffs (Dr L.), 53, rue de Charleroi. — Nivelles.

Struelens (Alfred), docteur en médecine, 18, rue Hôtel des Monnaies. — Saint-Gilles (Bruxelles).

Swolfs (Dr Oscar), 118, chaussée de Vleurgat. — Bruxelles.

Swyngedauw (René), professeur de physique à l'Université, directeur de l'Institut électrotechnique, 14, rue Fulton. Lille (Nord — France).

Taymans (Émile), notaire. — Tubize (Brabant).

Teilhard (Abbé), 13, rue du Vieux Colombier. — Paris (VIe).

Terlinden (C.), professeur à l'Université de Louvain, 61, avenue Legrand. — Bruxelles.

Termier (Pierre), membre de l'Institut, directeur du Service de la Carte Géologique de la France, professeur à l'École des Mines, 166, rue de Vaugirard. — Paris.

Thébault (V.), directeur de manufacture à Ernée (Mayenne — France).

Théron (Joseph), docteur en sciences physiques et mathématiques, préfet des études à l'Athénée royal. — Chimay.

Theunissen (Franz), ingénieur, Thiers des Bedennes. — Chênée (Liége).

Thiébaut (Fernand), 199, avenue du Longchamp. — Bruxelles.

Thiéry (Chan. Armand), Institut supérieur de Philosophie, 1, rue des Flamands. — Louvain.

Thilliez (Dr Léonce), professeur à la Faculté libre de médecine, 33, boulevard de la Liberté. — Lille (Nord — France).

Tibbaut (Emile), avocat à la Cour d'appel, membre de la Chambre des Représentants, 4, avenue de l'Astronomie. — Bruxelles.

Tillieux (Abbé J.), directeur du Collège. — Mechelen-sur-Meuse.

Timmermans (François), ingénieur, directeur-gérant de la Société anonyme des ateliers de construction de la Meuse, 30, quai de Fragnée. — Liége.

Tits (Dr A.), oculiste, 89, rue de Bruxelles. — Louvain.

de T'Serclaes (Mgr Charles), président du Collège belge. — Rome.

de T'Serclaes (Cte Jacques), lieutenant du génie, 82, rue Saint-Georges. — Bruxelles.

de Valckeneer (Sylvain), ingénieur civil A. I. G., ingénieur électricien, candidat en sciences physiques et mathématiques, 39, rue Ste-Catherine. — Bruxelles.

de la Vallée Poussin (Ch.-J.), correspondant de l'Institut, membre de l'Académie Royale de Belgique, professeur à l'Université, 149, avenue des Alliés. — Louvain.

Van Ballaer (Mgr), Prélat de la Maison de S. S. le Pape, Chanoine de l'Église métropolitaine, 34, avenue Van Beneden. — Malines.

Van Bastelaer (Léonce), ingénieur civil des Mines, 13, rue Bonneels. — Bruxelles.

Van Brabant (Léon), ingénieur en chef, directeur des Ponts et Chaussées, directeur général au ministère des Chemins de fer, Marine, Postes et Télégraphes, 89, rue Joseph II. — Bruxelles.

Van Caeneghem (Chanoine F.), curé-doyen du Rœulx (Hainaut).

Van den Bossche (Abbé). — Ophasselt (Flandre Orientale).

Van den Heuvel (J.), ministre d'État, 29, rue Savaen. — Gand.

Vanderlinden, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, administrateur-inspecteur de l'Université, 27, Cour du Prince. — Gand.

Vanderlinden (Émile), météorologiste à l'Institut Royal Météorologique, 1026, chaussée de Waterloo. — Uccle.

Van der Mensbrugghe (André), 33, rue de Châteaudun. — Paris.

Van der Mensbrugghe (Robert), ingénieur principal des Chemins de fer de l'État, 36, rue du Tabellion. — Bruxelles.

Van der Smissen (Édouard), avocat, professeur à l'Université de Liége et à l'École de Guerre, 13, rue des Cultes. — Bruxelles.

Vanderstraeten (Dr A.), professeur à l'Université de Louvain, 79, rue du Trône. — Bruxelles.

Van der Vaeren (J.), chef de cabinet au Ministère de l'Agriculture, professeur à l'Université de Louvain, 255, chaussée de Vleurgat. — Bruxelles.

Vandevyver (Maurice), docteur en droit, boulevard De Kerchove, — Gand.

Van de Vyvere, ministre des régions dévastées, 8, boulevard Léopold. — Gand.

Van Durme, docteur en médecine, professeur à l'Université, 34, rue de la Monnaie. — Gand.

Van Gehuchten (Paul), docteur en médecine, chez M. Van Biervliet, 1, rue Saint-Hubert. — Louvain.

Van Hoeck (D^r Émile), 86, rue Dupont. — Bruxelles.

Van Keerberghen, docteur en médecine, 21, rue du Trône. — Bruxelles.

Van Mollé (Abbé J.), docteur en sciences naturelles et en philosophie, professeur au Petit Séminaire. — Malines.

Van Ortroy (Fernand), professeur à l'Université, 35, quai des Moines. — Gand.

Van Swieten (Raymond), 41, rue des Drapiers. — Bruxelles.

Van Velsen, docteur en médecine, 61, rue Godefroid de Bouillon. — Bruxelles.

Van Ysendyck (William), docteur en médecine, 77, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

Verbrugge (R. P.), des Missions de Scheut, Sanatorium de Schilde, près d'Anvers.

Verhelst (Abbé F.), aumônier du Pensionnat du Sacré-Cœur, 9, avenue Henri Dietrich. — Bruxelles.

Vermeersch (R. P. Arthur), S. J., docteur en droit et en sciences politiques et administratives, professeur à l'Université grégorienne, 120, via del Seminario. — Rome.

Vermeersch (Paul), avocat, professeur à l'Université, 71, digue de Brabant. — Gand.

Verriest (Gustave), docteur en sciences physiques et mathématiques, ingénieur civil des Mines, professeur à l'Université, 40, rue du Canal. — Louvain.

Verschaffel (R. P. A.), membre correspondant de l'Institut de France, directeur de l'Observatoire d'Abbadia, par Hendaye (Basses-Pyrénées — France).

Versteylen, rue d'Hérenthals. — Turnhout.

Vervaeck, docteur en médecine, directeur du Service d'Anthropologie pénitentiaire, 35, rue Verhulst. — Uccle.

Visart de Bocarmé, avocat, 10, rue Grandgagnage. — Namur.

Visart de Bocarmé (Vte Amédée), membre de la Chambre des Représentants, bourgmestre de Bruges.

Vitoria (R. P. Eduardo), S. J., directeur de l'Institut de Chimie de Sarriá. — Barcelone.

de Vorges (Alb.). — Paray-le-Monial (Saône-et-Loire — France).

de Vrégille (R. P. Pierre), S. J., professeur à la Faculté Française de Médecine, Université Saint-Joseph. — Beyrouth (Syrie).

Waffelaert (S. G. Mgr), évêque de Bruges.

Warlomont (René), médecin général en retraite, docteur en sciences naturelles, 66, avenue de Cortenberg. — Bruxelles.

Wasmann (R. P. Éric), S. J., Collège St-Ignace. — Valkenburg (Limbourg Hollandais).

Wasteels (C.), professeur à l'Université, 30, rue d'Akkergem. — Gand.

Wéry (Dr Aug.). — Sclayn (prov. de Namur).

Wibo (Dr Maurice), 107, avenue de la Toison d'Or. — Bruxelles.

Willaert (R. P. Fernand), S. J., docteur en sciences physiques et mathématiques, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Williame (Aimé), ingénieur, 20, place Dailly. — Schaerbeek.

Witz (Aimé), correspondant de l'Institut, professeur aux Facultés catholiques, 29, rue d'Antin. — Lille (Nord — France).

Witz (Abbé F.), professeur à l'École d'électricité des Facultés catholiques, 29, rue d'Antin. — Lille (Nord — France).

Wolters (Frédéric), ingénieur principal des Ponts et Chaussées, professeur à l'Université, 17, avenue des Moines. — Gand.

Liste géographique des membres de la Société scientifique de Bruxelles (1921)

BELGIQUE

Flandre Occidentale : **Bruges** : Standaert (A.). — Visart de Bocarmé (C^{te} A.). — Waffelaert (S. G. Mgr).

Caster, par **Anseghem** : Claerhout (Abbé J.). — **Courtrai :** Davelooze (Abbé A.). — **Heestert** : De Vos (Abbé J.). — **Iseghem** : Gillès de Pélichy (B^{on} Ch.). — **Roulers** : Dumez (Abbé R.).

Flandre Orientale : **Gand** : Biot (A.). — Claeys-Bouüaert. — Crame (Aug.). — Daels (D^{r} Fr.). — De Backer (D^{r} P.). — De Baets (H.). — Declercq. — De Meulemeester (D.). — Dutordoir (A.). — Dutordoir (H.). — de Fooz. — Goubau. — de Hemptinne (A.). — Henseval (D^{r} M.). — Heymans (J.-F.). — Lebrun (D^{r} H.). — Merten (Alb.). — Meuwissen. — Nyssens (P.). — Renaud. — Roersch (A.). — Seghers (S. G. Mgr). — Stainier (X.). — Van den Heuvel. — Vanderlinden. — Vandevyver (M.). — Van de Vyvere. — Van Durme (D^{r}). — Van Ortroy (F.). — Vermeersch (P.). — Wasteels (C.). — Wolters (F.).

Alost : Collège Saint-Joseph. — **Meirelbeke** : Hebbelynck (Mgr A.). — **Mont-Saint-Amand** (Gand) : Wolters (G.). — **Ophasselt** : Van den Bossche (Abbé). — **Termonde** : Limpens (Émile). — **Tronchiennes** : Devisé (R. P. R.), S. J.

Province d'Anvers : **Anvers** : Bastin (F.). — Charles (R. P. J.), S. J. — Claes (F.). — Cogels (J.-B. Henri). — Dubois (E.). — Institut Saint-Ignace. — Lambo (R. P. Ch.), S. J. — de Meester (Emm.). — Mennes. — de Schilde (B^{on} G.). — Schul (R. P. J.), S. J. — Segers (P.). — Siret (L.). — Slingeneyer de Goeswin. — Smekens (Th.). — Supérieur du Collège Saint-Jean Berchmans.

Cruybeke : Mertens (A.). — **Malines** : Belpaire (Abbé J.). — Dessain (Ch.). — Lemaire (Abbé). — Mercier (S. É. le Cardinal). — Van Ballaer (Mgr). — Van Mollé (Abbé J.). — **Schilde** : de Schilde (B^{on}). — Verbrugge (R. P.). — **Turnhout** : Versteylen.

Limbourg : **Herck-la-Ville** : Silveryser (Abbé Pl.). — **Mechelen-sur-Meuse** : Tillieux (Abbé J.). — **Reckheim** : Lagasse de Locht (Ed.).

Luxembourg : **Noirefontaine** : de Moffarts (Bon P.). — **Virton** : Cabeau (Abbé Ch.). — Gillain (Abbé J.).

Brabant : **Bruxelles** : André (J.-B.). — de Béthune (Bon G.). — de Bien (E.). — de la Boëssière-Thiennes (Mis). — Bosmans (R. P. H.), S. J. — Bouckaert. — Braun (A.). — Brifaut. — de Broqueville (Bon Ch.). — Carlier (J.). — Carton de Wiart (Edm.). — Carton de Wiart (H.). — Cocheteux (Chan.). — Colens. — Collège Saint-Michel. — Cooreman (G.). — Crousse (Dr). — Cuylits (Dr J.). — Davignon (H.). — De Brabandère. — De Jonghe. — De Lantsheere (Dr J.). — Delétrez (Dr A.). — Demanet. — De Neyer (Abbé L.). — Deroitte (Dr V.). — Descamps-David (Bon). — De Wildeman (E.). — d'Huart (Bon). — Diderrich (N.). — Dubois-Verbrugghen (Dr É.) — Du Bost. — Duplat. — Dupret. — Dutilleux (M.). — Eeckhout (G.). — de Favereau de Jenneret (Bon V.). — Fernandès (Dr R.). — François (Dr A.). — Gaillard (R. P. J.), S. J. — Gerard (E.). — Gillet (J.). — Goedseels (J.). — Goffinet (H.). — Gollier (Ch.). — Goris (Ch.). — Greindl (Bon). — Hachez (F.). — Hauptmann (M.). — Havenith. — Hélin (E.). — Henrard (Dr É.). — Henrard (Dr F.). — Henry (A.). — Jacobs (F.) — Janssen (A.). — Javaux (Dr). — Joly (A.). — Joly (L.). — Kersten (J.). — Lagasse de Locht (Ch.). — Lagasse de Locht (V.) — Lambot (O.). — Lannoy (R. P. J.), S. J. — Laurent (Dr C.). — Lejeune de Schiervel (Ch.). — Levie (M.). — de Limburg-Stirum (Cte Ad.). — Maroy (Dr L.) — Matagne (Dr H.). — Mennes (A.). — Moeller (Dr). — Morelle (Dr A.). — Morisseaux. — Mullie (G.). — Pieraerts (J.). — Proost (A.). — Provincial (R. P.) de la Compagnie de Jésus. — Raymond (Fr.). — de Renesse (Cte). — Renier (A.). — Richald (J.). — Roland (P.). — Siret (H.). — Siret (L.) — Smets (Dr). — Smits (E.). — Stillemans (J.). — Stouffs (Dr J.). — Terlinden (Ch.). — Thiébaut. — de T'Serclaes (Cte J.). — de Valckeneer (Sylv.). — Van Bastelaer (L.). — Van der Mensbrugghe (R.). — Van der Smissen (Éd.). — Vanderstraeten (Dr A.). — Vandervaeren. — Van Hoeck (Dr Ém.). —

Van Keerberghen (Dr). — Van Swieten (R.). — Van Velsen (Dr). — Van Ysendyck (Dr). — Verhelst (Abbé F.). — Warlomont (Dr R.). — Wibo (Dr W.). — de Wouters d'Oplinter (Cher F.).

Boitsfort : Masen (A.). — **Etterbeek** : Schreiber. — **Ixelles** : Delmarcel (G.). — De Vadder (V.). — D'Hoop (F.). — Janssens. — Proost (Chan.). — de Selliers de Moranville (Cher A.). — **Herent** : Deleval (H.). — **Gembloux** : Poskin (P.).

Louvain : Alliaume (M.). — Beyls (Chan.). — Biourge (P.). — Boine (Dr J.). — Bruylants (G.). Bruylants (P.). — Cappellen (G.). — Charles (R. P. P.), S. J. — Collège Saint-Jean-Berchmans. — Daubresse (P.). — Debaisieux (P.). — De Becker (Mgr J.). — de Dorlodot (Chan. H.). — de Dorlodot (J.). — Demanet (Chan. S.). — De Muynck (Chan. R.). — Denys (Dr J.). — Deploige (Mgr). — De Smedt (Abbé). — De Walque (F.). — Dopp (R. P. H.), S. J. — Dupriez. — Gillon (G.). — Grégoire (Chan. V.). Helleputte. — Janssens (Chan. F. A.). — Kaisin (F.) — Ladeuze (Mgr P.). — Lange (R. P. R.), S. J. — Lecat (M.). — Lefebvre (Mgr F.). — Lemaire (Dr A.). — Malengrau. — Mansion (Aug.). — Marchal (Chan. L.). — Maréchal (R. P. J.), S. J. — Maubert (Frère). — Michiels (L.). — Nerincx (A.). — Noblesse (Chan. C.). — Noyons (A.). — Orban de Xivry. — Pasquier (Ern.). — Pauwels (R. P. J.), S. J. — Poullet (P.). — Salée (A.) — Schaffers (R. P. V.), S. J. — Scheuer (R. P. P.), S. J. — Schockaert (R.). — Sibenaler (N.). — Simonart (F.). — Supérieur du Collège des Joséphites. — Thiéry (Chan. A.). — Tits (Dr A.). — de la Vallée Poussin (Ch.-J.). — Van Gehuchten (P.). — Verriest (Gust.). — Willaert (R. P. F.), S. J. — **Héverlé** : Nelis (C.). — **Kessel-Loo** : Michotte (Alb.). — **Nivelles** : Rome (Abbé A.). — Stouffs (Dr). — **Perck** : de Ribaucourt (Cte Gaston). — **Rixensart** : Beaujean (Ch.). — **Saint-Gilles** (Bruxelles) : Struelens (Dr). — **Schaerbeek** (Bruxelles) : Baeckelmans (Abbé L.). — Delmer. — Williame (A.). — **Scheut** : Lefebvre (R. P. M.). — **Tervueren** : Maes (Dr J.). — **Tubize** : du Plessis (J.). — Taymans (É.). — **Uccle** (Bruxelles) : Casteels. — Cuylits (Jos.). — Dejardin (L.). — Delvosal (J.). — Goedseels (Éd.). — Somville (O.). — Vanderlinden (É.). — Vervaeck (Dr). — **Virginal** : Dusausoy (A.). — **Waterloo** : de Meeus (Cte Louis). — **Woluwe-Saint-Lambert** : Convent (Dr A.). — Glorieux (Dr). — Lebizay (A. E. M.). — **Woluwe-Saint-Pierre** : Capart (J.). — Lambin (A.). — Van Brabandt.

Province de Liége : **Liége** : Berleur (Ad.). — Carpentier (Fr.). — Collège Saint-Servais. — Coppens (A.). — De Jace (Ch.). — Denoël. — Duquenne (Dr L.). — Francotte (Dr X.). — Janne (H.). — Laminne (S. G. Mgr J.). — Le Paige (C.). — Lhoest (H.). — Neuberg (J.). — Rutten (S. G. Mgr). — Timmermans (F.). — **Chênée** : Theunissen (Fr.). — **Huy** : Gelin (Abbé E.). — **Pepinster** : Lejeune-Simonis. — **Stavelot** : David (P.). — **Visé** : Meurice (L.).

Hainaut : **Mons** : Dufrane (Dr).

Acoz : Dupuis (H.). — **Châtelet** : Pasquier (Dr A.). — **Chimay** : Théron (J.). — **Couillet** : Dochain-Defer. — **Gosselies** : Drion (Bon Ad.) — **Hornu** : Halez (E.). — **Mont-sur-Marchienne** : Deboucq (L.). — **Le Rœulx** : Van Caeneghem (Chan. F.). — **Thuin** : Lagae (R.). — **Tournai** : Blondel (A.). — Crooy (S. G. Mgr). — Dupont (E.). — **Wasmes** : Harmant (É.).

Province de Namur : **Namur** : Baivy (Dr). — Bibot (Dr). — Collège Notre-Dame de la Paix. — Delvigne (R. P. R.), S. J. — Dierckx (R. P. Fr.), S. J. — de Greeff (R. P. H.), S. J. — Haibe (Dr). — Heylen (S. G. Mgr). — Le Grand (Chan. A.). — Lucas (R. P. D.), S. J. — Martin (Dr). — Mélot (A.). — Visart de Bocarmé.

Auvelais : Lambiotte (O.). — **Couvin** : Dubois (V.) — **Dinant** : Cousot (P.). — Demanet (Abbé). — **Floreffe** : Baseil (Abbé). — Petit Séminaire épiscopal. — **Heer-Agimont** : Gilbert (P.). — **Lustin** : de Pierpont (Éd.). — **Malonne** : Majorin-Antoine (Fr.). — **Maredsous** : Fournier (O. S. B.). — **Sclayn** : Wéry (Dr A.).

FRANCE

Paris : Béchaux (A.). — Blondel (G.). — du Boys (P.). — Boussinesq (J.). — Branly (Éd.). — Collin (Abbé H.). — de Launay (L.). — École libre de l'Immaculée-Conception. — Fiessinger (Dr). — Humbert (G.). — Jordan (C.). — Le Châtelier. — Lemoine (G.). — Matignon. — d'Ocagne (M.). — Picard (É.). — Puiseux (P.). — Teilhard (Abbé). — Termier (P.). — Van der Mensbrugghe (A.).

Départements : *Allier* : **Cérilly** : Dumas-Primbault (H.). — *Alpes-Maritimes* : **Menton** : Farina (D^{r}). — **Nice** : Dardel (D^{r}). — *Alsace* : **Strasbourg** : de Lapparent (J.). — *Aveyron* : **Viviez** : Berlingin (M.). — *Basses-Pyrénées* : **Abbadia** (par Hendaye) : Bertrand (Abbé G.). — Verschaffel (R. P. A.). — **Pau** : Haton de la Goupillière (J. N.). — *Bouches-du-Rhône* : **Marseille** : Fabry (L.). — *Cher* : **Bourges** : de Grossouvre (A.). — Moreux (Abbé Th.). — *Drôme* : **Aiguebelle** (par Grignan) : Arduin (Abbé A.). — *Eure* : **Pont-Authou** : Humbert (G.). — *Haute-Garonne* : **Toulouse** : Boule (Abbé L.). — Sabatier (P.) — Senderens (Mgr). — *Haute-Loire* : **Vals** : de Sinéty (Abbé R.). — *Haute-Marne* : **Langres** : Raclot (Abbé V.). — *Loire* : **Nantes** : Kowalski (G.). — *Loiret* : **Laval** : de Maupeou (C^{te}). — *Mayenne* : **Ernée** : Thébault (V.). — *Meurthe-et-Moselle* : **Ham** (par Longuyon) : Rachon (Abbé P.). — **Longwy** : de Saintignon (C^{te}). — *Moselle* : **Bitche** : Kieffer (Abbé J. J.). — *Morbihan* : **Kervihan** : Sageret. — *Nord* : **Denain** : Moreau (R.). — **Douai** : Bellette (P.). — **Lille** : d'Adhémar (V^{te} R.). — Annycke (Abbé Th.). — Baeckeroot (Abbé G.). — Barrois. — Battez (D^{r} G.). — Bernard (L.). — Besson (D^{r}). — Boulangé (H.). — Cappe de Baillon (P.). — Carpentier (Abbé). — Charron (E.). — David (D^{r} A.). — Delassus (D^{r} A.). — Delattre (D^{r} A.). — Delépine (Abbé G.). — Delépine (D^{r} J.). — Depape (Abbé G.). — Desplats (D^{r} R.). — D'Halluin (D^{r} M.). — Duret (D^{r}). — Duthoit (E.). — Favrelle (M.). — Guermonprez (D^{r}). — Lenoble. — Lepoutre (D^{r} C.). — Lesne (Mgr E.). — Liévin (Abbé O.). — de Montessus de Ballore (V^{te} R.). — Pruvost (P.). — Quilliet (Mgr H.). — Raquet (D.). — Rogie (D^{r}). — Stoffaes (Chan.). — Swyngedauw (R.). — Thilliez (D^{r} L.). — Witz (A). — Witz (Abbé F.). — **St-André-lez-Lille** : Caron (H.). — *Pas-de-Calais* : **Verquin** : Agniel (G.). — *Rhône* : **Lyon** : de Sparre (C^{te}). — *Saône-et-Loire* : **Paray-le-Monial** : de Vorges (A.). — *Sarthe* : **Le Mans** : Hamonet (Chan.). — *Savoie* : **Aix-les-Bains** : Dardel (D^{r}). — *Seine* : **Neuilly** : Mansion (H.). — *Seine-et-Oise* : **Bellevue** : Brunhes (J.). — **Versailles** : Ariès (Colonel). — École libre de S^{te} Geneviève. — Groussau (C.).

ESPAGNE

Madrid : Dusmet y Alonso (J.-M.). — Gonzalez de Castejon. — Grinda (I.). — Iniguez y Iniguez (Fr.) — Torroja Caballe (Ed.).

— **Barcelone** (Sarriá) : Collège St-Ignace. — Vitoria (R. P. E.), S. J. — **Bilbao** : Colegio de Estudios Superiores de Deusto (R. P. J. Man. Obeso), S. J. — **La Coruña** : Casarès (J.). — **Séville** : Abaurrea (L.). — **Tortosa** (Tarragona) : Observatorio del Ebro. — Rector del Colégio del Jesús (R. P.). — **Valladolid** : Rodriguez-Risueno (E.). — **Zaragoza** : Navàs (R. P. L.), S. J.

PAYS DIVERS

ALLEMAGNE : **Aix-la-Chapelle** : Scherpereel (Abbé C.). — **Berlin** : Sièges.

ANGLETERRE : **Dublin** (Irlande) : Egan (R. P. M.), S. J. — **Newcastle-on-Tyne** (Angleterre) : Bagnall (R. S.). — **Saint-Hélier** (Jersey — Iles de la Manche) : Dechevrens (R. P. M.), S. J.

ITALIE : **Rome** : Ferrata (S. É. le cardinal). — Granito di Belmonte (S. É. le cardinal). — Hagen (R. P. J.), S. J. — Rinaldini (S. É. le cardinal). — de T'Serclaes (Mgr Ch.). — Vermeersch (R. P. A.), S. J. — **Catane** (Sicile) : Nava di Bontife (S. É. le cardinal). — **Pise** : Maffi (S. É. le cardinal).

PAYS-BAS : **Oudenbosch** : Bolsius (R. P. H.), S. J. — **Utrecht** : De Veer (R. P.), S. J. — **Valkenburg** (Limbourg Hollandais) : Wasmann (R. P. E.), S. J.

GRAND-DUCHÉ DU LUXEMBOURG : **Luxembourg** : Soisson (G.).

SUISSE : **Fribourg** : De Kowalski (Dr). — De Munnynck (R. P.), O. P. — Kirsch (Mgr J. P.).

ÉTATS-UNIS : **Pasadena** (Californie) : Conroy (Ch. C.). — **Notre-Dame** (Indiana) : Kirsch (R. P. Al. M.). — **Washington** : Georgetown College Observatory.

BRÉSIL : **Recipe** : Meyer (R. P. L.), S. J.

CHILI : **Santiago** : Cte de Montessus de Ballore.

MEXIQUE : **Mexico** : Collantes (P.). — de Mendizabal Tamborrel (J.).

INDES ANGLAISES : **Calcutta** : Collège Saint-François-Xavier. — **Ranchi** : Gillet (R. P. Ch.), S. J.

MADAGASCAR : **Tanararive** : Camboué (R. P.), S. J.

SYRIE : **Beyrouth** : Collangettes (R. P.), S. J. — de Vrégile (R. P. P.), S. J.

Membres décédés

Van der Bruggen (B^{on})		Gand.
Mgr Baunard		Lille.
De Jaer (Jules)	III et VI	Uccle.
Francotte (H.)	V	Liége.
Grand'Eury (Cyrille)	III	St-Etienne.
Sarret (Jean)	II	Constantinople.
Béco (Lucien)	IV	Liége.
Adan de Yarza (Ramon)	III	Madrid.
Springael (Auguste)	II et VI	Uccle.
Guicheteau (Abbé F. H.)	II	New-York.
Debaisieux (Th.)	IV	Louvain.
de Dorlodot (Sylvain)	III	Floreffe.
Helleputtte (Louis)	VI	Kessel-Loo.
Oehlert (D. P.)	III	Laval.
Dumont (André)	III et VI	Louvain.
Evrard (Nestor)	III et VI	Marcinelle.

Liste des membres inscrits dans les sections (¹)

1re Section

Mathématiques, Astronomie, Géodésie, Mécanique

MM. Vte d'Adhémar.
M. Alliaume.
Abbé Th. Annycke.
Abbé J. Belpaire.
Abbé G. H. Bertrand.
*Bon G. de Béthune.
F. de Bien.
A. Biot.
R. P. H. Bosmans, S. J.
J. Boussinesq.
P. du Boys.
C. Caratheodory.
L. Casteels.
Ch. Conroy.
*A. Crame.
*P. Daubresse.
Abbé De Neyer.
*R. P. H. Dopp, S. J.
C. Dusausoy.
*M. Dutilleux.
H. Dutordoir.
A. Dutordoir.
R. P. M. Egan, S. J.
L. Fabry.
*G. de Fooz.
R. P. J. Gaillard, S. J.
Abbé E. Gelin.
*P. Gilbert.
J. Gillet.
Ed. Goedseels.
M. Gonzalez de Castejon.
J. Grinda.
*A. de Grossouvre.
*F. Hachez.
R. P. J. Hagen, S. J.
MM. *J. N. Haton de la Goupillière.
*M. Hauptmann.
*J. Havenith.
*G. Helleputte.
G. Humbert.
F. Iniguez.
Fern. Jacobs.
H. Janne.
Camille Jordan.
Lagae.
*Ch. Lagasse de Locht.
A. Lambin.
R. P. J. Lannoy, S. J.
A. E. M. Lebizay.
M. Lecat.
G. Le Paige.
S. É. le cardinal Maffi
Majorin-Antoine (Frère).
*Cte de Maupeou
*Cte L. de Meeus.
J. de Mendizabal.
*A. Merten.
L. Meurice
Vte J. de Monge.
Vte R. de Montessus.
F. Moreau.
Abbé Th. Moreux.
J. Neuberg.
Chan. C. Noblesse.
M. d'Ocagne.
E. Pasquier.
É. Picard.
P. Puiseux.

(¹) L'astérisque indique les membres qui désirent prendre part aux travaux de plusieurs sections (cf. Art. 11 des Statuts).

MM. *J. Richald.
Sageret.
R. P. J. Schul, S. J.
*N. Sibenaler.
F. Simonart.
*E. Smits.
*G. Soisson.
C^te^ de Sparre.
*J. Stillemans.
Chan. Stoffaes.
*E. Storms
V. Thébault.

MM. J. Théron.
F. Thiébaut
F. Timmermans.
S. de Valckeneer.
Ch.-J. de la Vallée Poussin.
Vanderlinden.
G. Verriest.
R. P. A. Verschaffel.
C Wasteels.
R. P. F. Willaert, S. J.
F. Wolters.

2^e^ Section

Physique. · Chimie, Métallurgie. — Météorologie et Physique du globe

MM. L. Abaurrea.
*J.-B. André.
Ariès.
Abbé L. Baeckelmans.
Abbé Baseil.
L. Bernard.
A. Blondel.
E. Branly.
G. Bruylants
P. Bruylants.
*C. Carlier.
H. Caron.
J. Casarès.
E. Charron.
Chan. Cocheteux.
R. P Collangettes, S. J.
Abbé A. Davelooze.
R. P. M. Dechevrens, S. J.
J. Declercq.
J. Delvosal.
Chan. S. Demanet.
Chan. R. De Muynck.
Abbé De Smedt.
F. De Walque.
*R. P. H. Dopp, S. J.
M. Dumas-Primbault.
*E. Gerard.
Abbé J. Gillain.
R. Goubau.

MM. R. P. H. de Greeff, S. J.
Abbé Hamonet.
A. de Hemptinne.
J. de Kowalski.
*O. Lambiotte.
R. P. Ch. Lambo, S. J.
O. Lambot.
S. Gr. Mgr J. Laminne.
R. P. R. Lange, S J.
H. Le Châtelier.
Abbé Lemaire.
G. Lemoine.
Lenoble.
Abbé O. Liévin.
R. P. D. Lucas, S J.
A. Mansion.
Chan. Marchal.
Matignon.
A. Mennes.
A. Mertens.
R. P L. Meyer, S. J.
L. Michiels.
R. P. J. Pauwels, S. J.
*J. du Plessis.
D. Raquet.
Raymond (Fr.).
P. Roland.
P. Sabatier.
C^te^ de Saintignon.

MM. R. P. V. Schaffers, S. J.
R. P. P. Scheuer, S. J.
Mgr Senderens.
A. Smedts.
O. Somville.
R. Swyngedauw.
Chan. A. Thiéry.
Abbé J. Tillieux.
MM. Abbé Van den Bossche.
E. Vanderlinden.
M. Vandevyver.
Abbé F. Verhelst.
R. P. E. Vitoria, S. J.
A. Williame.
*A. Witz.
Abbé F. Witz.

3e Section

Géologie, Minéralogie. — Zoologie. — Paléontologie. — Anthropologie, Ethnographie, Science du langage. — Géographie

MM. G. Agniel.
Abbé A. Arduin.
Abbé G. Baeckeroot.
R. S. Bagnall.
Barrois.
F. Bastin.
P. Bellette.
P. Biourge.
M$^{\text{is}}$ de la Boëssière-Thiennes.
R. P. H. Bolsius, S. J.
Bouckaert.
H. Boulangé.
Abbé L. Boule.
J. Brunhes.
Abbé C. Cabeau.
R. P. Camboué, S. J.
J. Capart.
P. Cappe de Baillon.
Abbé A. Carpentier.
F. Carpentier.
R. P. P. Charles, S. J.
Abbé J. Claerhout.
F. Claes.
Abbé H. Collin.
P. Debaisieux.
*L. Deboucq.
*V. De Brabandère.
J. Declercq.
De Jonghe.
L. De Launay.
Abbé G. Delépine.
MM. R. P. R. Delvigne, S. J.
Abbé Demanet.
R. P. De Munnynck, O. P.
Denoël
Abbé G. Depape.
R. P. R. Devisé, S. J.
Abbé J. De Vos
É. De Wildeman.
R. P. Fr. Dierckx, S. J.
Chan. H. de Dorlodot.
J. de Dorlodot.
B$^{\text{n}}$ Drion.
V. Dubois.
Abbé R. Dumez.
J. M. Dusmet y Alonso.
M. Favrelle.
Dom Grég. Fournier, O. S. B.
B$^{\text{on}}$ Gillès de Pélichy.
*J. Gillet.
Th. Gollier.
Chan. V. Grégoire.
*B$^{\text{on}}$ Greindl.
*M. Hauptmann.
Mgr A. Hebbelynck.
M. Henseval.
Chan. F. A. Janssens.
F. Kaisin.
*J. Kersten.
Abbé J. J. Kieffer.
R. P. A.-M. Kirsch.
Mgr J.-P. Kirsch, C. S. C.

MM. J. Kowalski.
J. de Lapparent.
D^{r} H. Lebrun.
Mgr F. Lefebvre.
R. P. M. Lefebvre.
Ch. Lejeune de Schiervel.
*H. Lhoest.
C^{te} Ad. de Limburg Stirum.
J. Maes.
E. Malengrau.
R. P. J. Maréchal, S. J.
Frère Maubert.
C^{te} F. de Montessus.
R. Moreau.
R. P. L. Navas, S. J.
P. Nyssens.
J. Pieraerts.
Éd. de Pierpont.
*J. du Plessis.
P. Poskin.
P. Pruvost.
Abbé P. Rachon.

MM. *A. Renier.
R. Risueno.
Abbé A. Salée.
Abbé G. Scherpereel.
R. P. G. Schmitz, S. J.
Schreiber.
Abbé Fl. Silveryser.
Abbé R. de Sinéty.
*H. Siret.
L. Siret.
X. Stainier.
P. Termier.
Abbé Teilhard.
C^{te} J. de T'Serclaes.
L. Van Bastelaer.
Chan. F. Van Caeneghem.
Abbé J. Van Mollé.
F. Van Ortroy.
A. de Vorges.
R. P. P. de Vrégille, S. J.
R. P. E. Wasmann, S. J.
Ch^{er} de Wouters.

4^{e} Section

Anatomie, Physiologie. — Hygiène. — Pathologie, Thérapeutique, etc.

MM. Baivy.
G. Battez.
Besson.
Bibot.
Boine.
Convent.
Cousot.
Crousse.
J. Cuylits.
F. Daels.
Dardel.
A. David.
De Backer.
J. De Lantsheere.
A. Delassus.
A. Delattre.
J. Delépine.

MM. Delétrez.
J. Denys.
V. Deroitte.
R. Desplats.
M. D'halluin.
E. Dubois-Verbruggen.
C. Dufrane.
É. Dupont.
L. Duquenne
Duret.
R. Fernandès.
Fiessinger.
A. François.
X. Francotte.
Glorieux.
Ch. Goris.
Guermonprez.

MM. A. Haibe.
Ét. Henrard.
F. Henrard.
F. Heymans.
Javaux.
C. Laurent.
A. Lemaire.
C. Lepoutre.
L. Maroy.
J. Martin.
A. Masen.
H. Matagne.
Mennes.
A. Moeller.
A. Morelle.
G. Mullie.
C. Nelis.
A. Noyons.
A. Pasquier.
A. Proost.
Rogie.

MM. R. Schockaert.
H. Smets.
V. Solé.
J. Stouffs.
L. Stouffs.
A Struelens.
O. Swolfs.
L. Thilliez.
A. Vanderstraeten.
Van Durme.
P. Van Gehuchten.
Em. Van Hoeck.
Van Keerberghen.
R. Van Swieten.
Van Velsen.
Van Ysendyck.
R. P. Verbrugge.
Vervaeck.
R. Warlomont.
A. Wéry.
M. Wibo.

3e Section

Agronomie. — Économie sociale, Statistique. — Sciences commerciales
Économie industrielle

MM. *Ch. Beaujean.
A. Béchaux.
*A. Berleur.
Chan. R. Beyls.
G. Blondel.
*V. De Brabandère.
A. Braun.
*V. Brifaut.
Bon de Broqueville.
G. Cappellen.
E. Carton de Wiart.
H. Carton de Wiart.
R. P. J. Charles, S. J.
A. Claeys-Boúúaert.
G. Cooreman.
Jos. Cuylits.
P. David.
H. Davignon.

H. De Baets.
Mgr J. De Becker.
C. De Jace.
E. De Meester.
Mgr Deploige.
Bon Descamps.
V. De Vadder.
N. Diderrich.
E. Dubois.
Dubost.
G. Duplat.
Dupret.
L. Dupriez.
E. Duthoit.
J. Goedseels.
H. Goffinet.
C. Groussau.
*M. Hauptmann.

MM. A. Henry.
A. Janssen.
A. Joly.
L. Joly.
Chan. A. Le Grand.
M. Levie.
E. Limpens.
*H. Mansion.
A. Mélot.
P. Michotte.
A. Nerincx.
Bon Orban de Xivry.
P. Poullet.
Cte de Renesse.
A. Roersch.
Abbé A. Rome.
Bon de Schilde.
Bon G. de Schilde.
MM. P. Segers.
*Cher de Selliers de Moranville.
Sièges.
Th Smekens
A. Standaert.
E Taymans.
C. Terlinden.
E Tibbaut
J. Van den Heuvel.
A. Van der Mensbrugghe.
E. Van der Smissen.
Van de Vyvere.
R. P. A. Vermeersch, S. J.
P. Vermeersch.
Versteylen.
Cte A Visart de Bocarmé.
Visart de Bocarmé.

6e Section

Sciences techniques

MM. *J.-B. André.
*Ch. Beaujean.
*A. Berleur.
*M. Berlingin.
*Bon G. de Béthune.
*J. Barlier.
H. Caufriez.
Colens.
*A. Crame.
*P. Daubresse.
*P. Deboucq.
L. Dejardin.
H. Deleval.
G. Delmarcel.
A. Delmer.
M. Demanet.
D. De Meulemeester.
E. D'Hoop.
F. Dochain-Defer.
H. Dupuis.
*M. Dutilleux.
*G. de Fooz.
MM. *E Gerard.
R. P. Ch. Gillet, S. J.
G. Gillon.
*D. Glibert.
*Bon Greindl.
*A. de Grossouvre.
*F. Hachez.
E. Hallez.
É. Harmant.
J. N. Haton de la Goupillière.
*J. Havenith.
*G. Helleputte
*J. Kersten.
*Ch. Lagasse de Locht.
E. Lagasse de Locht.
V. Lagasse de Locht.
*O. Lambiotte.
*H. Lhoest.
*H. Mansion.
*Cte de Maupeou.
*Cte L. de Meeus.
*A. Merten.

MM. J. Meuwissen.
*R. Moreau.
Ch. Morisseaux.
*M. d'Ocagne.
Renaud.
*A. Renier.
C^te G. de Ribaucourt.
*J. Richald.
R. P. Ch. Schoonjans, S. J.
*Ch^er de Selliers de Moranville.

MM. *N. Sibenaler.
*H. Siret.
Slingeneyer de Goeswin.
*E. Smits.
*G. Soisson.
*E. Storms.
F. Theunissen.
L. Van Brabandt.
R Van der Mensbrugghe.
*A. Witz.

MEMBRES DU CONSEIL

1914-1920

Président : M. A. Witz.
Vice-Présidents : M. Ch. Lagasse de Locht (1922) (1).
M. Éd. Van der Smissen (1920).
Secrétaire : M. P. Mansion (1920) (2).
Trésorier : M. Éd. Goedseels (1921).
Membres : MM. Ch. Beaujean (1921).
le M^{is} de la Boëssière-Thiennes (1923).
le R. P. H. Bosmans (1920) (3).
Fr. De Walque (1923).
É. De Wildeman (1920).
le D^{r} X. Francotte (1921).
le Chanoine V. Grégoire (1922).
É. Harmant (1922).
le C^{te} Ad. de Limburg Stirum (1921).
E. Pasquier (1922).
A. Proost (1923).
A. Renier (1923).
le R. P. J. Thirion (1920) (2).
Ch.-J. de la Vallée Poussin (1923) (4).
le D^{r} A. Van Gehuchten (1921) (2).
le D^{r} R. Warlomont (1920).
le R. P. F. Willaert (1920) (5).

---

(1) Le nom de chaque membre du Conseil est suivi de l'indication de l'année où expire son mandat.

(2) Décédé.

(3) Achève le mandat du R. P. Thirion.

(4) Est nommé secrétaire général au décès de M. Mansion.

(5) Achève le mandat de M. Mansion et est nommé secrétaire.

MEMBRES DU CONSEIL

1920-1921

Président : M. Lagasse de Locht (1922).
Vice-Présidents : M. M. d'Ocagne.
M. A. Renier (1923).
Secrétaire général : M. Ch.-J. de la Vallée Poussin (1923).
Secrétaire : R. P. F. Willaert (1924).
Trésorier : M. Éd. Goedseels (1921).
Membres : MM. Ch. Beaujean (1921).
le M^{is} de la Boëssière-Thiennes (1923).
le R. P. H. Bosmans (1924).
le Chanoine Cocheteux (1924).
Fr. De Walque (1923).
É. De Wildeman (1924).
le D^{r} X. Francotte (1921).
le Chanoine V. Grégoire (1922).
E. Harmant (1922).
le C^{te} Ad. de Limburg Stirum (1921).
E. Pasquier (1922).
A. Proost (1923).
le D^{r} R. Warlomont (1924).

BUREAU DES SECTIONS

1920-1921

1re SECTION

Président : M. Éd. Goedseels.
Vice-Présidents : M. M. Lecat.
M. H. Janne.
Secrétaire : M. H. Dutordoir.

2e SECTION

Président : M. G. Lemoine.
Vice-Présidents : M. Éd. Branly.
R. P. Schaffers, S. J.
Secrétaire : R. P. Lucas, S. J.

3e SECTION

Président : M. É. De Wildeman.
Vice-Présidents : M. l'Abbé G. Delépine.
M. le Cte A. de Limburg Stirum.
Secrétaire : M. F. Van Ortroy.

4e SECTION

Président : M. le Dr Ch. Goris.
Vice-Présidents : M. le Dr R. Schockaert.
M. le Dr A. Delétrez.
Secrétaire : M. le Dr R. Warlomont.

5e SECTION

Président : M. Ch. Morisseaux.
Vice-Président : M. F. Dechamps.
Secrétaire :

6e SECTION

Président : M. le Bon G. de Béthune.
Vice-Présidents : M. J. Carlier.
M. Ch. Beaujean.
Secrétaire : M. R. Van der Mensbrugghe.

SESSION DU 20 NOVEMBRE 1920

A LILLE

SÉANCES DES SECTIONS

Première Section

Réunion à la Faculté catholique des Sciences, sous la présidence de M. Éd. Goedseels.

M. le Comte de Sparre, empêché d'assister à la séance, fait hommage à la Société du résumé de ses travaux *sur la théorie des coups de bélier,* ainsi que d'un exposé des expériences de MM. *Camichel, Eydoux* et *Gariel* vérifiant d'une manière remarquable les résultats déduits des formules de M. de Sparre.

M. Alliaume fait la communication suivante :

La puissance réfractive et son influence sur le calcul de la réfraction astronomique.

1. Dans la session d'avril 1920 de la Société scientifique (Annales, t. XXXIX, p. 189), j'ai présenté à la Première Section le calcul des *termes du troisième ordre de la réfraction astronomique,* en appelant quantités petites du premier ordre des constantes de dimensions nulles α et β, définies à cette occasion. Ces calculs ont été faits pour une *puissance réfractive* de la forme $(\mu^{\gamma} - 1)$, où μ est l'indice de réfraction, et il a été montré que les termes du premier et du deuxième ordre sont indépendants de la valeur attribuée à γ : on rencontre cette valeur à partir des termes du troisième ordre seulement, et, dans ces derniers, par l'intermédiaire (par exemple) du rapport $\frac{\gamma + 1}{2}$.

Mais la théorie électromagnétique de la lumière a fourni à Lorentz et Lorenz une expression plus complexe de la puissance réfractive, à savoir

$$\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 2},$$

et j'ai refait les calculs pour une puissance réfractive de la forme

$$(\mu^\gamma - 1)(\mu^2 + 2)^n$$

au moyen de laquelle on retrouve la formule de

Newton-Laplace en faisant $\gamma = 2,\ n = 0,$
Gladstone-Gale — $\gamma = 1,\ n = 0,$
Lorentz-Lorenz — $\gamma = 2,\ n = -1.$

Dans l'équation finie entre la distance ρ au centre de symétrie de l'atmosphère et la variable θ telle que

$$1 + \theta\alpha = \frac{\mu_0}{\mu},$$

où μ_0 est la valeur que prend μ au point d'observation, le terme logarithmique devient :

$$\beta \log \frac{\left[\left(\frac{1+\alpha}{1+\alpha\theta}\right)^\gamma - 1\right]\left[\left(\frac{1+\alpha}{1+\alpha\theta}\right)^2 + 2\right]^n}{[(1+\alpha)^\gamma - 1]\,[(1+\alpha)^2 + 2]^n};$$

et, dans le calcul des termes du troisième ordre, son développement est :

$$\beta \log (1 - \theta) - \beta\left(\frac{\gamma + 1}{2} + \frac{2}{3}n\right)\theta\alpha.$$

L'extension des résultats antérieurs au cas plus général actuel consiste donc à remplacer partout

$$\frac{\gamma + 1}{2} \quad \text{par} \quad \frac{\gamma + 1}{2} + \frac{2}{3}n\,;$$

ceci donne, pour la correction de réfraction z en fonction de la distance zénithale apparente Z, et jusqu'aux termes du troisième ordre, l'expression suivante :

$$z = \alpha \left[1 - \beta - \left(\frac{\gamma + 1}{2} + \frac{2}{3}\, n\right) \frac{\alpha\, \beta}{2}\right] \operatorname{tg} Z +$$

$$- \alpha \left[\beta - \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{\gamma + 10}{2} + \frac{2}{3}\, n\right) \frac{\alpha\, \beta}{2} - \frac{\alpha^2}{6} - 3\, \beta^2\right] \operatorname{tg}^3 Z +$$

$$+ \alpha \left[\frac{\alpha^2}{2} - \frac{9}{4}\, \alpha\, \beta + 3\, \beta^2\right] \operatorname{tg}^5 Z.$$

En particulier, pour la formule Lorentz-Lorenz de la puissance réfractive,

$$z = \alpha \left(1 - \beta - \frac{5}{12}\, \alpha\, \beta\right) \operatorname{tg} Z +$$

$$- \alpha \left(\beta - \frac{\alpha}{2} + \frac{8}{3}\, \alpha\, \beta - \frac{\alpha^2}{6} - 3\, \beta^2\right) \operatorname{tg}^3 Z$$

$$+ \alpha \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{9}{4}\, \alpha\, \beta + 3\, \beta^2\right) \operatorname{tg}^5 Z.$$

2. Pas plus que la valeur attribuée à γ, la valeur attribuée à n n'a donc d'influence sur les termes du premier et du deuxième ordre de la réfraction astronomique. — Généralisant encore, adoptons pour puissance réfractive une fonction tout à fait quelconque de μ, pourvu que s'annulant, comme il est nécessaire, pour $\mu = 1$, c'est-à-dire de la forme

$$(\mu - 1)\, f(\mu)$$

où $f(\mu)$ reste fini pour μ tendant vers l'unité.

Dans l'équation finie entre ρ et θ, le terme logarithmique est :

$$\beta \log \frac{\left(\dfrac{1 + \alpha}{1 + \alpha\theta} - 1\right) f\left(\dfrac{1 + \alpha}{1 + \alpha\theta}\right)}{\alpha\, f(1 + \alpha)}$$

ou

$$\beta \log \frac{1 - \theta}{1 + \alpha\theta} + \beta \log \frac{f\left(\dfrac{1 + \alpha}{1 + \alpha\theta}\right)}{f(1 + \alpha)},$$

dont le développement est, en vue du calcul des termes du troisième ordre,

$$\beta \log (1 - \theta) - \beta \frac{f(1) + f'(1)}{f(1)} \theta \alpha,$$

$f'(\mu)$ désignant la dérivée de $f(\mu)$.

On voit que *les termes du premier et du deuxième ordre sont indépendants de l'expression attribuée à la puissance réfractive*, et que celle-ci intervient dans les termes du troisième ordre de manière que, à cette approximation,

$$z = \alpha \left[1 - \beta - \frac{f(1) + f'(1)}{f(1)} \frac{\alpha \beta}{2}\right] \operatorname{tg} Z +$$

$$- \alpha \left[\beta - \frac{\alpha}{2} + \frac{9}{4} \alpha \beta + \frac{f(1) + f'(1)}{f(1)} \frac{\alpha \beta}{2} - \frac{\alpha^2}{6} - 3 \beta^2\right] \operatorname{tg}^3 Z +$$

$$+ \alpha \left[\frac{\alpha^2}{2} - \frac{9}{4} \alpha \beta + 3 \beta^2\right] \operatorname{tg}^5 Z.$$

Le R. P. Willaert fait rapport sur les mémoires de M. Goedseels intitulés : A) *Correction des erreurs systématiques. Pendules et chronomètres.* B) *Sur les alidades multiples.*

Je propose, dit-il, l'insertion au *Bulletin* de ces deux mémoires.

Dans le premier, M. Goedseels précise utilement des notions et des termes, en soi très simples, mais où certains praticiens ont introduit une regrettable confusion.

Dans le second, il découvre le véritable avantage des alidades multiples. Elles n'ont pas pour unique effet de réduire les erreurs finales en multipliant le nombre des lectures pour chaque observation ; elles permettent surtout de diminuer dans des proportions considérables le nombre des erreurs dues à l'irrégularité de la graduation et aux autres défauts de construction et qu'il faut déterminer expérimentalement. M. Goedseels donne des formules simples et commodes pour calculer ces erreurs.

M. Alliaume se rallie aux conclusions de ce rapport et celles-ci sont adoptées par la Section.

Voici la première des deux notes de M. Goedseels ; la seconde sera publiée dans la seconde partie réservée aux mémoires (¹).

(¹) Voir pages 37 et suiv.

Correction des erreurs systématiques. Pendules et chronomètres, par P. J. E. Goedseels, professeur honoraire de l'Université catholique de Louvain, administrateur-inspecteur de l'Observatoire royal et de l'Institut royal météorologique de Belgique.

1. *Préliminaires.*

Les praticiens ont introduit une terminologie spéciale dans le réglage et l'emploi des chronomètres et des pendules de précision. Cette terminologie comprend des mots tels que état, état absolu, marche diurne, etc. L'emploi de ces expressions présente l'inconvénient de ne pas montrer que les procédés dont on fait usage ne sont qu'un cas particulier très simple d'une théorie générale applicable à tous les instruments affectés d'erreurs systématiques, c'est-à-dire d'erreurs susceptibles d'être exprimées en fonction des résultats fournis par les instruments.

Nous nous proposons d'exposer cette théorie générale dans ce travail, et d'en faire spécialement l'application aux pendules et aux chronomètres.

2. *Réglage des instruments. Régions linéaires.*

Supposons qu'un instrument soit destiné à fournir les valeurs X, Y, Z de trois inconnues, mais donne, en réalité, des valeurs x, y, z affectées d'erreurs systématiques.

Nous aurons donc, par hypothèse, trois relations :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= F(x, y, z), \\ Y &= f(x, y, z), \\ Z &= \varphi(x, y, z), \end{aligned} \right.$$

et l'opération désignée sous le nom de *réglage* a pour but de déterminer les paramètres contenus dans les seconds membres des relations ci-dessus, dans le cas où les formes des fonctions F, f, φ sont connues.

La principale difficulté réside donc dans la détermination de ces formes.

Pour la tourner, on considère trois valeurs particulières quelconques x_0, y_0, z_0 et on pose :

$$x = x_0 + h,$$
$$y = y_0 + k,$$
$$z = z_0 + l.$$

On a donc :

$$(2)\quad \begin{cases} X = F(x_0, y_0, z_0) + h\dfrac{\delta F}{\delta x_0} + k\dfrac{\delta F}{\delta y_0} + l\dfrac{\delta F}{\delta z_0} + R, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Lorsque les dérivées qui figurent dans les restes R, ... ci-dessus ont des valeurs finies au point (x_0, y_0, z_0), on peut toujours prendre h, k et l assez petits pour que ces restes soient négligeables, et, par suite, pour que X, Y, Z soient des fonctions linéaires de h, k et l.

$$(3)\quad \begin{cases} X = a_1 + b_1 h + c_1 k + d_1 l, \\ Y = a_2 + b_2 h + c_2 k + d_2 l, \\ Z = a_3 + b_3 h + c_3 k + d_3 l, \end{cases}$$

Nous donnons le nom de *région linéaire* à toute région limitée par les valeurs extrêmes qu'on peut donner à h, k et l.

Le réglage correspondant à une région linéaire a pour but de déterminer les constantes des seconds membres ci-dessus.

En théorie on peut se borner à appliquer les équations (3) à trois cas dans lesquels on connaît X, Y, Z, h, k et l.

Mais dans la pratique on doit déterminer des équations surabondantes et voir si l'application de l'une ou l'autre des méthodes de la théorie des erreurs fournit des valeurs finales satisfaisantes.

Dans l'affirmative, les équations (3) méritent une confiance d'autant plus grande qu'on a opéré sur un plus grand nombre d'équations de condition.

Dans la négative, les valeurs particulières sur lesquelles on a opéré n'appartiennent pas à une même région linéaire.

Il n'y a, dans ce second cas, que deux alternatives : Ou bien on doit restreindre les intervalles. Ou bien on doit introduire les termes du second degré dans les développements en séries des formules (2), et renoncer, par suite, aux relations linéaires.

Les régions auxquelles on arrive de cette manière pourraient être désignées sous le nom de régions du second degré, ou coniques, etc.

3. *Instruments réguliers.*

Nous disons qu'un instrument est *régulier*, *satisfaisant* ou *bon* lorsque la région dans laquelle on en fait usage constitue une seule région linéaire.

Les chronomètres et les pendules de précision appartiennent à cette catégorie. En d'autres termes, si on désigne par T le temps que devrait fournir un instrument de cette espèce, et par t le temps qu'il donne en réalité, on a une relation

$$T = a_1 + b_1 t.$$

Il est donc inutile d'inventer de nouveaux noms pour désigner la constante a_1, et le coefficient b_1 ; et de faire remarquer que a_1 est la valeur de T pour $t = 0$, et que b_1 est l'accroissement que subit T lorsque t varie d'une unité.

Dans la pratique on calcule généralement de préférence la quantité qu'on doit ajouter à t pour obtenir T, c'est-à-dire la différence $(T - t)$. On a donc, en désignant cette correction par c,

$$c = T - t = a_1 + (b_1 - 1)t.$$

La correction c est donc aussi une fonction linéaire de t. Nous écrivons :

$$c = a_1 + bt. \tag{4}$$

4. *Remarque.*

Lorsqu'on remplace, dans l'équation (4), t par sa valeur en fonction de T, on obtient :

$$c = \frac{a_1}{1 + b} + \frac{b}{1 + b} T. \tag{5}$$

La correction c est donc aussi une fonction linéaire de T.

Lorsque b a une valeur suffisamment petite pour qu'on puisse développer $\frac{1}{1 + b}$ en série limitée aux termes du premier degré, cette série se réduit à 1, et la formule (5) devient :

$$c = a_1 + bT. \tag{6}$$

Le problème résolu par la formule (4) est quasi le seul qu'on rencontre dans l'emploi des chronomètres.

Cependant on y fait généralement usage de la formule (6).

Puisque T est inconnu, on est obligé de procéder par approximations successives.

Il serait évidemment beaucoup plus simple de s'en tenir à la formule (4).

Dans le même ordre d'idées, il y a lieu de relever qu'on dit généralement de b que c'est la quantité dont c augmente lorsque T augmente de $+ 1$. Cette affirmation est basée sur la formule inexacte (6). Pourquoi ne dit-on pas plutôt, comme il est vrai, que b est la quantité dont c augmente lorsque t augmente de $+ 1$?

M. Neuberg adresse à la Section la communication suivante :

A la dernière session de la *Société scientifique de Bruxelles* j'avais annoncé une prochaine communication sur la dualisation du cercle de Brocard. Cette question fait l'objet de mes nouvelles *Notes de Géométrie ;* elle m'a été suggérée par un travail manuscrit que D^r^ L. Berwald m'avait communiqué en 1914 et 1915, désirant connaître le degré de nouveauté de ses résultats. Ce géomètre y fait intervenir deux triples de cercles auxquels je consacre ma première note.

Mes développements, qui remontent à quelques années, diffèrent assez sensiblement de ceux de mon correspondant, qui, si je ne me trompe, n'ont pas été publiés.

Le mémoire de M. Neuberg sera inséré dans les ANNALES (¹).

Monsieur Thébault, directeur de manufacture à Ernée (France, Mayenne), présente un mémoire de géométrie portant le titre : *Cercles et sphères remarquables du triangle et du tétraèdre.* L'auteur y étudie : 1° des circonférences et des sphères signalées par S. Roberts ; 2° une nouvelle génération des cercles de Tucker et une analogie du cercle de Taylor dans le tétraèdre ; 3° une généralisation d'une triade de cercles considérée par Ed. Lucas.

Cette étude constitue une contribution intéressante à la géométrie récente du triangle et du tétraèdre. M. Neuberg propose son insertion dans les ANNALES (²).

M. Alliaume remet à la Section, au nom de M. Pasquier, un mémoire *sur la condition suffisante pour qu'un solide soit un*

(¹) Voir 2^e^ partie, pages 46 et suiv.

(²) Voir 2^e^ partie, pages 59 et suiv.

gyroscope. MM. de Sparre et de Montessus de Ballore sont nommés commissaires pour l'examen de ce travail.

M. Goedseels présente une étude *sur les coordonnées polaires*. A sa demande, M. d'Ocagne est désigné pour en faire rapport à la Section.

Deux notes sont alors présentées par M. Goedseels :

I. Certains auteurs de géographie ou de topographie, non familiarisés avec l'analyse mathématique, exposent néanmoins des notions de cartographie dans leurs ouvrages sans invoquer cette analyse, quoiqu'il soit impossible de traiter cette question de cette manière. Il en résulte nécessairement que leurs exposés fourmillent d'erreurs et d'absurdités.

Nous avons été amené à traiter le même sujet, et nous nous sommes proposé de n'énoncer aucune proposition qui ne soit de nature à être démontrée rigoureusement par l'analyse.

Nous nous sommes heurté à la difficulté de faire comprendre ce qu'on doit entendre par l'échelle d'une courbe *quelconque* tracée sur une carte, en un point quelconque de cette courbe ; c'est-à-dire par le rapport entre la différentielle de l'arc de la courbe en ce point et la différentielle de l'arc correspondant du géoïde représenté.

Nous avons réussi à tourner la difficulté en distinguant des lignes particulières que nous avons qualifiées de *régulières* et qui jouissent chacune de la propriété que le rapport entre un arc quelconque et l'arc terrestre correspondant est constant. Ce rapport est appelé *échelle* et ne nécessite aucune intervention infinitésimale.

En partant de cette notion on peut classer toutes les cartes en deux catégories.

En chaque point d'une carte de la première catégorie passe une seule ligne *régulière*. Les autres lignes passant par le même point sont irrégulières.

Il est facile de montrer que les parallèles terrestres tracés sur la carte de Mercator sont réguliers.

Il est évidemment impossible de démontrer sans l'analyse que les autres lignes ne le sont pas, ou, ce qui revient au même, que la carte de Mercator appartient à la première catégorie. Mais en affirmant qu'il en est ainsi, et qu'on peut le démontrer par l'analyse, on ne commet ni erreur ni absurdité.

Toutes les cartes qui n'appartiennent pas à la première catégorie appartiennent à la seconde.

Par chaque point d'une carte quelconque de cette deuxième catégorie passent une infinité de lignes régulières. Les échelles de ces lignes varient entre un maximum et un minimum, et il est possible d'énoncer rigoureusement toutes les autres propriétés des cartes de la deuxième catégorie sans induire le lecteur ou l'auditeur en erreur.

Il est possible notamment de lui faire comprendre ce qu'on entend par une surface développable sans avoir recours à cette affirmation inepte que ce sont des surfaces susceptibles d'être appliquée sur un plan sans déchirure ni duplicature. Il suffit de dire qu'une surface S est applicable sur une surface s lorsqu'il est possible de la représenter sur cette dernière de manière que chaque ligne tracée sur s soit régulière et que toutes les lignes tracées sur s aient la même échelle.

On doit évidemment commencer l'exposé par la définition des coordonnées, et montrer que représenter une surface S sur une autre, s, est l'opération qui revient à exprimer que les coordonnées des points de s sont des fonctions des coordonnées des points correspondants de S. Mais les expériences que nous avons faites avec de jeunes auditeurs nous ont prouvé que ce dernier point ne soulève aucune difficulté.

II. Les calculs astronomiques sont si fréquents et si laborieux qu'on rend service à ceux qui en sont chargés, chaque fois qu'on leur signale une simplification dans les formules dont ils font usage. Cette considération nous engage à faire remarquer que les formules indiquées par la Connaissance des temps pour la réduction des étoiles sont susceptibles d'une petite amélioration.

Une de ces formules (Année 1922, p. 707) est la suivante :

$$\text{Asc. dr. app. (en temps)} = \alpha + Aa + Bb + Cc + Dd + \frac{1}{15}E + t\omega.$$

Les quantités A, B, C, D et E sont des constantes dont les valeurs diurnes sont données pour toute l'année (pp. 306 à 323).

Les quantités a, b, c, d doivent être calculées pour chaque étoile en particulier.

La Connaissance des temps indique à cette fin (p. 706) :

$$a = 3^s,07274 + 1^s33633 \sin \alpha \cdot \text{tang}\ \delta.$$

Les calculs se font plus simplement si on pose :

$$a_1 = 1^s33633 \sin \alpha \ \text{tang}\ \delta,$$

$$f = \frac{1}{15}(46'',0912 \,.\, \mathrm{A} + \mathrm{E}).$$

La formule devient ainsi :

$$\text{Asc. dr. app. (en temps)} = \alpha + \mathrm{A}a_1 + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c + \mathrm{D}d + \frac{1}{15} f + t\omega,$$

et les valeurs diurnes de $\frac{1}{15} f$ sont données également dans les tables (pp. 306 à 323), mais pour un autre calcul.

M. d'Ocagne entretient la Section des *applications de la nomographie aux techniques de la guerre*, notamment en matière de rectification du tir. Il fait hommage à la Société de l'ouvrage qu'il a récemment édité sur cet objet à la librairie Gauthier-Villars.

Des communications annoncées, par le R. P. Bosmans, *sur une lettre de Fermat à Mersenne, récemment retrouvée,* de M. de Montessus de Ballore, *sur le mathématicien français Painvin ;* de M. Ch. de la Vallée Poussin, *sur le théorème d'intégration terme à terme de Osgood,* sont, faute de temps pour les développer, renvoyées à une prochaine session.

Deuxième Section

Réunion à l'École libre d'Électricité sous la présidence de M. Lenoble, doyen de la Faculté catholique des sciences à Lille.

Le secrétaire donne lecture du rapport du R. P. Schaffers, S. J.

sur le Mémoire de M. l'abbé Lemaire intitulé : *Note sur le mouvement local.* Le premier rapporteur, à l'opinion et à la conclusion duquel se rallie M. Alliaume, second rapporteur, prie l'auteur de bien vouloir compléter son travail en précisant de quelle nature est cette réaction des énergies de l'éther qu'il invoque. La Section adopte ce vœu.

Suivent les appréciations de MM. Witz et Alliaume, rapporteurs, au sujet du Mémoire de M. Charron intitulé : *La notion mathématique de l'indicatrice illustrée par les franges des lames minces.* Les deux rapporteurs proposent l'impression du Mémoire dans les ANNALES et cette conclusion est agréée par la Section (¹).

Le secrétaire résume une note de M. Vanderlinden : *A propos d'annotations météorologiques anciennes*, destinée à paraître dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

M. Charron présente : *Une nouvelle méthode de mesure de la tension superficielle.*

Principe. — Le principe de cette méthode consiste à produire une légère déformation de la surface libre L d'un liquide et à mesurer, en un point M de cette surface libre, les deux rayons de courbure principaux R et R′, ainsi que la différence de pression p entre les deux faces de L. La formule de Laplace $p = A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ donne la valeur de la tension superficielle A.

Le liquide étudié (je n'ai opéré que sur de l'eau) est versé dans un petit cristallisoir d'une douzaine de centimètres de diamètre, au fond duquel est placée une lame de verre noir, complètement immergée dans le liquide, et dont la face supérieure S, exactement plane et horizontale, se trouve à $\frac{1}{10}$ mm. environ au dessous de la surface libre L. Je dépose alors sur S, dans le prolongement l'un de l'autre, deux petits morceaux rectilignes de fils de verre BB′, CC′ de 1 à 2 mm. de diamètre et de 1 à 2 cm. de longueur, l'intervalle BC étant environ 16 mm. Ces fils font saillie sur le liquide, et

---

(¹) **Cf. 2ᵉ partie, pp. 65 et suiv.**

comme celui-ci les mouille, sa surface libre L se trouve soulevée tout le long de leurs bords. Au point M, milieu de BC, les deux lignes de courbure principales de L ont, l'une la direction BC et l'autre la direction perpendiculaire yy'. La première a sa concavité tournée vers le haut, et la seconde, de plus faible courbure, a sa concavité vers le bas. J'éclaire ce système, sous incidence normale, par une lumière monochromatique de longueur d'onde λ, au moyen d'un dispositif semblable à celui que l'on utilise pour observer les anneaux de Newton, et je vois ainsi les franges produites entre S et L. On sait qu'elles se trouvent à l'intersection de L par des plans parallèles à S et équidistants de $\frac{\lambda}{2n}$, n : indice du liquide. Je compte les franges depuis M jusqu'aux régions éloignées où elles disparaissent et où, par suite, la surface libre devient plane et horizontale : soit f franges. La surface libre, L, au point M, est donc soulevée de $\frac{f\lambda}{2n}$ au-dessus de ces régions éloignées, et par suite la variation de pression p entre les deux faces de L en M est : $p = \frac{f\lambda}{2n} mg$; m : masse spécifique ; g : accélération de la pesanteur.

Pour mesurer les rayons de courbure principaux R et R', je place, tout près de la surface libre, un écran percé d'une ouverture circulaire de 8 mm. de diamètre environ, ayant son centre juste au-dessus de M, et j'envoie verticalement, à travers ce diaphragme, un faisceau lumineux issu d'un point éloigné P. Les rayons réfléchis par la surface libre donnent deux focales de Stürm, l'une réelle, l'autre virtuelle, dont la position permet de calculer très simplement R et R'. En effet, l'une quelconque des focales, par exemple la focale parallèle à BC, se trouve à la même distance de la surface libre que serait l'image P' du point P, si cette surface était sphérique et avait, pour rayon, le rayon de courbure qu'elle a effectivement suivant la direction yy' perpendiculaire à la focale considérée.

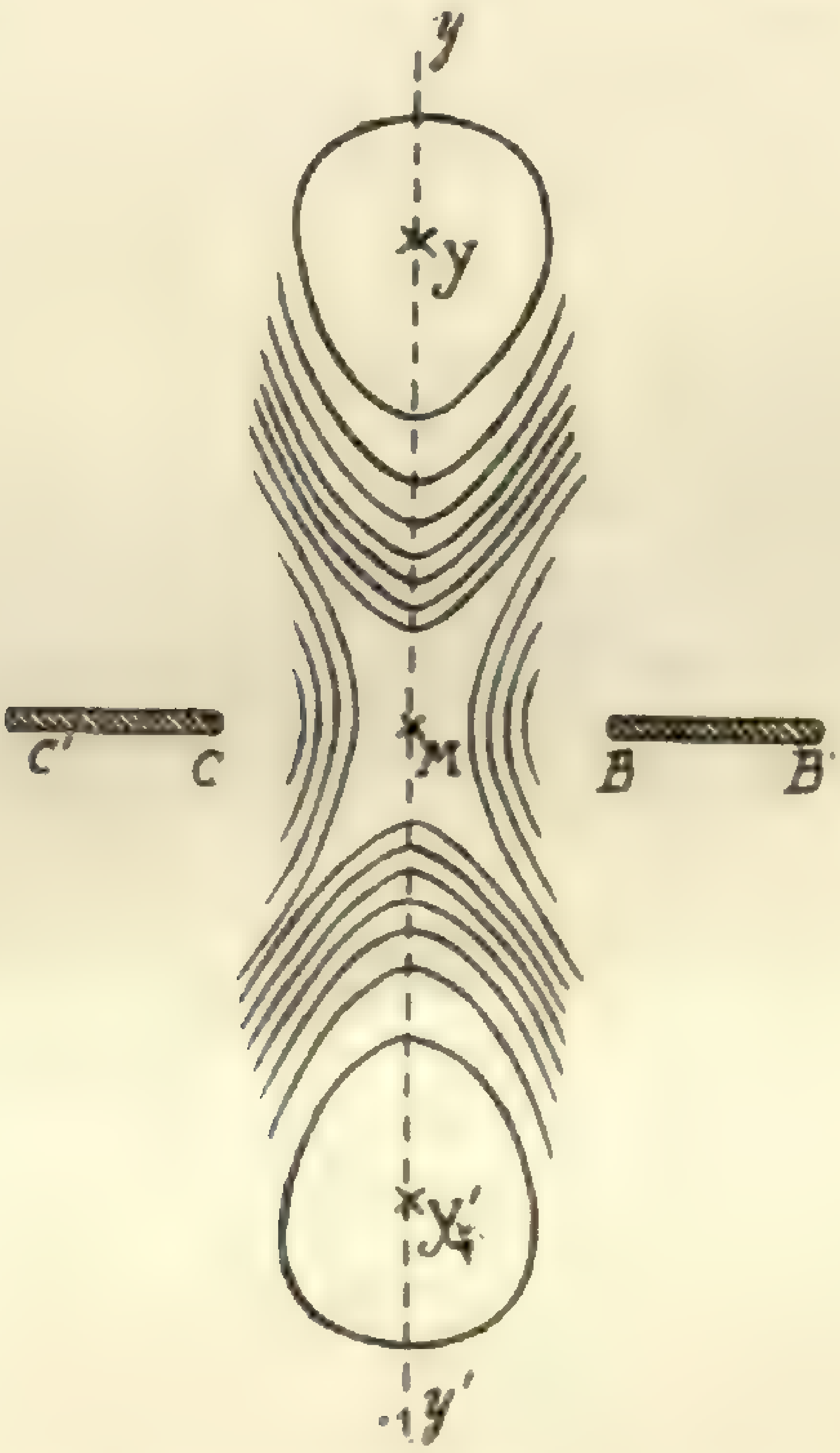
Quelques détails expérimentaux.

Réglage de l'appareil. — Le cristallisoir contenant le liquide et la lame de verre noir repose sur un trépied à vis placé lui-même sur un support en maçonnerie très stable. Je rends, au juger, la face de verre S à peu près parallèle à la surface libre L que j'amène, au moyen d'une pipette, à quelques dixièmes de millimètre de S. Je regarde alors en lumière monochromatique sous l'incidence normale et, après quelques tâtonnements, je vois des franges rectilignes entre S et L qui ne sont pas encore exactement parallèles. J'agis alors sur les vis du trépied de façon à écarter les franges jusqu'à disparition. Cette méthode est extrêmement sensible. En réalité, même avec un cristallisoir d'une douzaine de centimètres de diamètre, il reste de larges franges circulaires révélant une légère concavité de la surface libre L.

Il y a un double inconvénient à ce que la couche liquide, entre S et L, soit un peu plus épaisse. Tout d'abord, si la lumière n'est pas bien monochromatique, les franges deviennent moins nettes et peuvent même disparaître. Ensuite, le sol n'étant jamais tout à fait en repos, même la nuit, la surface libre tremble un peu, et comme ses moindres mouvements entraînent un déplacement considérable des franges, celles-ci deviennent invisibles. Au contraire, quand la pellicule liquide entre S et L est suffisamment mince, le rôle de la viscosité intervient pour étouffer les petites vagues sur la surface libre.

Dénombrement des franges. — Lorsque le réglage est terminé, je dépose les fils de verre BB′ et CC′. Il se forme alors tout un réseau de franges qui, au voisinage de M, milieu de BC, affectent très nettement la forme de petites hyperboles conjuguées extrêmement fines et serrées ayant pour centre ce point M. On s'explique aisément cette forme, car le plan tangent à la surface libre L, en M, est horizontal et l'on sait que les franges sont l'intersection de L par des plans horizontaux extrêmement rapprochés les uns des autres : ces intersections sont donc, au voisinage de M, des courbes à peu près semblables à l'indicatrice de la surface L en ce point. Or, cette surface ayant en M des courbures opposées, l'indicatrice est un système de deux hyperboles conjuguées.

Considérons le groupe de franges hyperboliques dont les sommets sont sur yy'. A une certaine distance de M, ces sommets deviennent plus écartés deux à deux ; la forme des franges se modifie et finit par donner des courbes fermées ovales ayant approximativement un centre en Y et Y′. On peut s'expliquer cette forme en se rappelant que la surface libre est soulevée le long des bords du cristallisoir en sorte que Y et Y′ se trouvent au fond de légères concavités. Néanmoins, j'ai pu m'assurer, d'après les dimensions des franges entourant Y et Y′, que la courbure de la surface libre, en ces points, est négligeable en comparaison de la courbure en M et que je puis, sans erreur appréciable, considérer ces régions comme planes. J'observe les franges avec un microscope à oculaire micrométrique dont j'oriente le fil mobile parallèlement à BC, et, en déplaçant ce fil dans la direction yy', je compte les franges comprises entre M et Y (environ 70) et entre M et Y′, et, s'il y a une petite différence, je prends la moyenne.



Détermination de la position des focales. — Le faisceau incident que je fais arriver sur la surface libre autour du point M part, à peu près horizontalement, d'une très petite ouverture vivement éclairée, éloignée de 3,30 m. environ et est renvoyé verticalement sur le liquide par un miroir plan. Les rayons réfléchis par la surface libre sont, à leur tour, renvoyés horizontalement par le miroir. Je les reçois dans un viseur que je déplace horizontalement sans changer sa mise au point, de façon à voir successivement les deux focales et la surface libre du liquide, ou, plus exactement, un repère placé tout auprès. Les déplacements du viseur donnent les distances des focales à la surface libre.

Les rayons réfractés par cette surface L puis réfléchis par la lame de verre et de nouveau réfractés par L donnent également deux focales ; elles sont aussi brillantes que les autres, mais il est facile de les distinguer par leur position.

Résultats. — J'ai fait plusieurs expériences sur de l'eau. Dans la plus soignée, j'ai compté 65,8 franges, avec erreur possible de 2 franges ; la focale réelle était à 21,8 cm. de la surface libre, la focale virtuelle à 51 cm. (erreur possible de 2 à 3 cm.) et le point objet à 333 cm. Il en résulte A = 88 au lieu de 80, environ.

En somme, cette méthode est compliquée, expérimentalement difficile et elle donne peu de précision.

M. de Hemptinne communique à la Section les résultats préliminaires d'une série de mesures faites sur l'ionisation dans les gaz dans le but de jeter quelque nouvelle lumière sur les notions de : *Ions, électrons et atomicité.* M. de Hemptinne poursuit ce travail.

M. l'abbé Liévin expose une note de M. H. Colin et de M^lle^ A. Chaudun intitulée : *L'inversion diastasique du sucre de canne obéit-elle à la loi d'action de masse ?* Voici le texte de cette note :

L'inversion acide du saccharose est régie, quelles que soient les concentrations en acide et en sucre, par la loi de Wilhelmy : *la vitesse d'hydrolyse est, à chaque instant, proportionnelle à la quantité de sucre cristallisable présente dans la liqueur ;* on a donc, en désignant par a la concentration initiale en saccharose et par x le poids de sucre transformé au temps t, a et x étant rapportés à 100 cm³ de solution,

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)\,;$$

l'intégration de cette équation donne, en tenant compte des conditions initiales :

$$x = a(1 - e^{-kt}).$$

La vitesse de réaction est proportionnelle à la concentration en saccharose ; elle varie avec l'acide et, pour chaque acide, employé en solution étendue, elle est, d'après les auteurs, proportionnelle à la dose d'acide.

L'hydrolyse diastasique obéit-elle aux mêmes lois et, s'il existe des divergences, à quoi sont-elles imputables ?

Si l'on s'en tient aux résultats admis jusqu'alors (¹), la vitesse d'inversion est toujours proportionnelle à la quantité de sucrase ; elle augmente avec la teneur en sucre tant que celle-ci reste inférieure à 3 gr. 62 p. 100, puis elle cesse de croître pour diminuer de plus en plus lorsque la proportion de saccharose dépasse 18 gr. p. 100. Enfin, les produits de la réaction, le lévulose notamment, exercent, sur la marche du phénomène, une action retardatrice d'autant plus grande que la quantité des produits d'hydrolyse est plus considérable et la proportion desaccharose plus faible.

Nous avons repris ce problème avec des moyens nouveaux ; nous nous sommes servis de solutions diastasiques très actives, exemptes de glycogène et parfaitement limpides (²), de telle sorte que l'hydrolyse était terminée dans un temps relativement court et pouvait être suivie au polarimètre. L'inversion s'effectuait dans le tube polarimétrique lui-même, maintenu à température constante.

Soient α_0 la déviation initiale, α_t la rotation au temps t ; on a, en désignant par l la longueur en décimètres du tube polarimétrique et par $[\alpha']$ le pouvoir rotatoire du sucre interverti à la température de l'expérience :

$$x = \frac{100(\alpha_0 - \alpha_t)}{l(66,5 - \frac{20}{19}[\alpha'])}.$$

Si l'on suit l'hydrolyse d'une solution contenant, pour 100 cm³, 4 gr. de saccharose et quelques gouttes d'une solution d'invertine, on obtient les nombres suivants pour le poids x de sucre hydrolysé à chaque instant et pour la vitesse V (quantité de sucre transformée dans 100 cm³ de liqueur pendant l'unité de temps).

(¹) Victor Henri (*Lois générales de l'action des diastases*, Thèse, 1903, Paris).

(²) H. Colin, *Préparation facile d'une solution de sucrase très active*, Bull. Chim. Suc. Dist., t. XXXV, 1917, p. 85.

TEMPS EN $^1/_4$ D'HEURE	x	V
1	$0^{gr}228$	$0^{gr}228$
2	0 456	0 228
3	0 678	0 222
4	0 904	0 226
5	1 126	0 222
6	1 354	0 228
7	1 578	0 224
8	1 798	0 220
9	2 020	0 222
10	2 200	0 180
11	2 372	1 172
12	2 532	0 160
13	2 674	0 142
14	2 802	0 128
15	2 920	0 118
16	3 032	0 112
18	3 234	0 202 : 2
20	3 392	0 158 : 2
22	3 514	0 122 : 2

On voit immédiatement que l'allure du phénomène change au cours de la réaction : la vitesse, constante pendant les neuf premiers quarts d'heure, diminue ensuite jusqu'à la fin de l'expérience ; la courbe qui figure les variations de la vitesse en fonction du temps présente donc un point anguleux pour $t = T$.

Si, *laissant fixe la quantité de diastase*, on enrichit progressivement la liqueur en saccharose, T augmente, le point anguleux se déplace vers la droite et les quantités de sucre cristallisable présentes dans les solutions au temps T sont rigoureusement égales. Si, au contraire, on fait croître la teneur en sucrase, *la concentration en saccharose restant la même,* T diminue, le point anguleux se déplace vers la gauche et les quantités de sucre cristallisable présentes dans les solutions au temps T augmentent avec la proportion d'enzyme.

La loi mathématique du phénomène dépend donc, non pas des concentrations propres en saccharose ou en diastase, mais du *rapport de ces concentrations*, ce qui fait songer à la possibilité d'une combinaison entre le sucre et l'enzyme.

Supposons, en effet, que le sucre se combine transitoirement à la sucrase, la vitesse de formation étant infiniment grande relativement à la vitesse de décomposition, et examinons successivement deux cas suivant que le saccharose ou l'enzyme est en excès (1).

1er *Cas. Le saccharose est en excès.* La combinaison saccharose-enzyme se reformera au fur et à mesure de sa destruction, et cela aussi longtemps que le sucre restera en excès. Par suite, la vitesse d'hydrolyse sera d'abord constante, puis décroîtra progressivement, le quotient $\dfrac{\frac{dx}{dt}}{a - x}$ conservant alors une valeur fixe ; tant que la vitesse restera constante, le poids de sucre hydrolysé au temps t sera proportionnel à la quantité de diastase, n, et indépendant de la concentration initiale en saccharose, a.

L'expérience se montre parfaitement d'accord avec la théorie.

1°) La vitesse d'hydrolyse, d'abord constante, décroît ensuite et le rapport $\dfrac{\frac{dx}{dt}}{a - x}$ conserve alors une valeur fixe.

Conditions expérimentales :

$a = 10$ gr. p. 100 cm^3, $n = 5$ cm^3 p. 100 cm^3, température = 24°5.

TEMPS EN $^1/_4$ D'HEURE	x	VITESSE MOYENNE	$\dfrac{\frac{dx}{dt}}{a - x}$
1	$1^{gr}358$	$1^{gr}358$	0,145
2	2 716	1 358	0,156
3	4 077	1 361	0,172
5	6 410	0 980	0,204
8	8 488	0 449	0,234
14	9 742	0 068	0,254
16	9 860	0 058	0,253
18	9 919	0 029	0,254

---

(1) H. Colin et A. Chaudun (*Sur la loi d'action de la sucrase.* C. R. Ac. Sc., t. CLXVII, 1918, p. 338).

2°) La concentration en saccharose, *a*, restant constante, le poids *x* de sucre hydrolysé au temps *t* est proportionnel à la teneur en sucrase, *n*.

Conditions expérimentales :

$a = 4$ gr. p. 100 cm^3, température = 16°.

TEMPS EN $^1/_4$ D'HEURE	POIDS DE SUCRE HYDROLYSÉ DANS 100 CM^3				
	$n = 1$ cm^3 p. 100	$n = 2$ cm^3 p. 100	$n = 3$ cm^3 p. 100	$n = 4$ cm^3 p. 100	$n = 5$ cm^3 p. 100
1	$0^{gr}137$	$0^{gr}308$	$0^{gr}452$	$0^{gr}632$	$0^{gr}744$
2	0 575	0 595	0 904	1 226	1 440
3	0 412	0 878	1 350	1 762	2 032
4	0 550	1 206	1 762	2 261	2 572
5	0 695	1 534	2 107	2 664	3 035
6	0 832	—	2 391	2 970	3 344
7	0 970	—	2 659	3 257	—
8	1 108	—	2 912	3 437	3 751
9	1 245	2 605	3 321	—	—
10	1 382	2 734	3 311	3 540	3 810

3°) La teneur en sucrase, *n*, étant constante, le poids *x* de sucre hydrolysé au temps *t* est indépendant de la concentration en saccharose, *a*.

Conditions expérimentales :

$n = 4$ cm^3 p. 100, température = 14°.

Concentration en saccharose p. 100 cm^3	Poids de sucre hydrolysé en $^1/_2$ heure dans 100 cm^3
5^{gr}	$0^{gr}400$
8	0 396
12	0 408
15	0 390

2^{me} *Cas. L'enzyme est en excès.* La totalité du sucre se combine instantanément à la sucrase et la loi d'action de masse permet de prévoir les faits suivants : la vitesse décroîtra dès le début de l'expérience et l'on pourra calculer x par la formule

$$x = a(1 - e^{-kt})\,;$$

de plus, le poids de sucre hydrolysé au temps t sera indépendant de la quantité de diastase, n, et proportionnel à la concentration initiale en saccharose, a.

L'expérience confirme ces résultats théoriques :

1°) La vitesse décroît constamment et le poids x de sucre hydrolysé au temps t est donné par l'équation $x = a(1 - e^{-kt})$.

Conditions expérimentales :

$n = 5$ cm^3 p. 100, température = 22°.

TEMPS EN $^1/_4$ D'HEURE	$a = 0^{gr}5$ p. 100 cm^3		$a = 1^{gr}$ p. cm^3	
	x expérimental	x calculé	x expérimental	x calculé
1	0^{gr}206	—	0^{gr}213	—
2	0 319	0^{gr}328	0 651	0^{gr}655
3	0 398	0 398	0 789	0 798
5	0 459	0 463	0 920	0 931
7	0 483	0 488	0 996	0 977
11	0 498	0 497	0 994	0 996

2°) La teneur en saccharose, a, restant la même, le poids x de sucre hydrolysé au temps t est indépendant de la proportion de sucrase.

Conditions expérimentales :

$a = 0^{gr}4$ p. 100, température = 25°.

TEMPS EN $^1/_4$ D'HEURE	POIDS DE SUCRE HYDROLYSÉ DANS 100 CM^3.			
	$n = 2$ cm^{3}5 p. 100	$n = 5$ cm^3 p. 100	$n = 7$ cm^{3}5 p. 100	$n = 10$ cm^3 p. 100
1	0^{gr}213	0^{gr}211	0^{gr}218	0^{gr}218
2	0 308	0 305	0 305	0 305
3	0 344	0 344	0 344	0 344
5	0 379	0 380	0 380	0 382
7	0 388	0 390	0 390	0 389

3°) La teneur en sucre, n, étant fixe, le poids de sucre hydrolysé au temps t est proportionnel à la concentration en saccharose, a.

Conditions expérimentales :

$n = 5$ cm^3 p. 100, température $= 22°$.

TEMPS EN $^1/_4$ D'HEURE	POIDS DE SUCRE HYDROLYSÉ DANS 100 CM^3			
	$a = 0$gr.5 p 100	$a = 1$ gr. p. 100	$a = 1$gr.5 p. 100	$a = 2$ gr. p 100
1	0^{gr}206	0^{gr}418	0^{gr}618	0^{gr}827
2	0 319	0 651	0 994	1 810
3	0 395	0 789	1 195	1 586
5	0 459	0 920	1 380	1 840
7	0 483	0 966	1 456	1 946
11	0 498	0 994		

Nous nous sommes bornés jusqu'alors à étudier l'hydrolyse des solutions diluées et moyennement concentrées. Si l'on augmente davantage la proportion de saccharose, toutes choses étant égales d'ailleurs, la vitesse d'hydrolyse ne reste pas indépendante de a, mais diminue à mesure que a augmente; c'est ainsi que les poids de sucre hydrolysés en une demi-heure, dans des conditions identiques de concentration en sucrase et de température, sont égaux à 0^{gr}408, 0^{gr}390, 0^{gr}382 et 0^{gr}350 lorsque les concentrations en saccharose sont respectivement égales à 12, 15, 20 et 30^{gr} p. 100. C'est ici la concentration propre en saccharose qui intervient et non plus le rapport $\frac{saccharose}{sucrase}$; nous sommes en présence d'un phénomène nouveau qu'il s'agit d'interpréter.

On sait que la viscosité des solutions sucrées s'accroît notablement avec la concentration ; il est intéressant, dès lors, de rechercher s'il n'existerait pas une relation entre la diminution de la vitesse d'hydrolyse et l'augmentation de viscosité des solutions (1).

Considérons des solutions contenant des quantités croissantes de saccharose : 10, 20, 30, 40, 50, 50 gr. p. 100, par exemple, et déterminons, dans des conditions données de concentration en sucrase et de température, les vitesses d'hydrolyse, d'une part, les viscosités, d'autre part. On obtient, pour les vitesses, les nombres 1,370, 1,225, 1,140, 1,065, 0,990 et 0,940. Les viscosités, mesurées par le nombre de secondes nécessaires à l'écoulement du volume de liquide compris entre les deux traits de jauge du viscosimètre d'Ostwald, sont égales à 50, 65, 95, 134, 224 et 390. Il est clair que la variation de vitesse ΔV n'est pas proportionnelle à la variation de viscosité $\Delta \gamma$; le rapport $\frac{\Delta V}{\Delta \gamma}$ dépend donc à la fois de γ et de $\Delta \gamma$ et il est impossible de déduire, de la considération du rapport $\frac{\Delta V}{\Delta \gamma}$, la forme de la relation qui lie la vitesse à la viscosité. On peut alors essayer de substituer à la viscosité γ une autre variable qui en dépende, et il est naturel de penser à son inverse, la fluidité F.

---

(1) H. Colin et A Chaudun C R Ac. Sc , t. CLXVIII, 1919, p. 1274).

Si l'on prend pour valeur de la fluidité la quantité $\frac{1}{\gamma}$, les fluidités des liqueurs précédentes sont mesurées par les nombres 0,02000, 0,01538, 0,01051, 0,00746, 0,00446 et 0,00256. Comparons la variation de vitesse à la variation de fluidité.

CONCENTRATION EN GR. P. 100 CM³	VITESSE MOYENNE	ΔV	FLUIDITÉ	ΔF	$\frac{\Delta V}{\Delta F}$
10	1gr370		0,02000		
20	1 255	0gr115	0,01538	0,00462	24,8
30	1 140	0 230	0,01051	0,00949	24,2
40	1 065	0 305	0,00746	0,01254	24,3
50	0 990	0 380	0,00446	0,01554	24,4
60	0 940	0 430	0,00256	0,01744	24,6

Le rapport $\frac{\Delta V}{\Delta F}$ est constant : *la vitesse est fonction linéaire de la fluidité* et l'on a :

$$V = \alpha F + \beta.$$

C'est donc le facteur physique *viscosité* qui intervient *seul* pour retarder la vitesse d'inversion dans les solutions concentrées. Par suite, si l'on vient à augmenter, d'une façon quelconque, la viscosité d'une solution sucrée, sa vitesse d'hydrolyse diminue.

Ces résultats nous conduisent à interpréter d'une façon nouvelle l'action des produits d'hydrolyse sur la vitesse d'inversion (¹). Le sucre interverti exerce une influence nettement retardatrice sur la vitesse de la réaction ; d'autre part, il contribue à augmenter la viscosité des solutions. Si la vitesse décroît comme la fluidité conformément à la loi $V = \alpha F + \beta$, on pourra conclure que les produits de la réaction agissent du seul point de vue physique ; dans le cas contraire, on sera en présence d'un phénomène plus complexe.

Opposons à une même quantité de saccharose des doses croissantes de sucre interverti. La vitesse d'hydrolyse diminue de plus en plus, tandis que la viscosité des solutions augmente. Déterminons ΔV, la variation de vitesse, ΔF, la variation de fluidité et calculons le rapport $\frac{\Delta V}{\Delta F}$.

Conditions expérimentales : $\alpha = 5$ gr. p. 100 ; température = 19°.

CONCENTRATION EN SUCRE INTERVERTI	V	ΔV	F	ΔF	$\frac{\Delta V}{\Delta F}$
0^{gr}	$0^{\text{gr}}970$		0,02222		
6,15	0 883	$0^{\text{gr}}107$	0,01923	0,00299	35,8
12,30	0 769	0 221	0,01613	0,00609	36,3
24,60	0 570	0 420	0,01063	0,01159	36,2
36,90	0 428	0 562	0,00649	0,01573	35,7

La variation de vitesse est proportionnelle à la variation de fluidité.

Les résultats sont identiquement les mêmes si l'on s'adresse à des solutions plus concentrées en saccharose ; on observe alors que les variations de la fluidité sont d'autant plus faibles que la fluidité est elle-même plus petite ; corrélativement, les variations de la vitesse sont d'autant moins rapides que la concentration en sucre est plus grande ; dans tous les cas, comme le prévoit la théorie, ΔV est proportionnel à ΔF (²).

(¹) H. Colin et A. Chaudun (*Sur la loi d'action de la sucrase*, C. R. Ac. Sc. t. CLXIX, 1919, p. 849).

(²) A. Chaudun (*Recherches physico-chimiques sur l'inversion diastasique du saccharose*, ANN. DE CHIM., 9^{me} série, t. XIII, 1920, p. 343).

Enfin, si l'on compare l'action du glucose à celle du lévulose, on s'aperçoit que le retard apporté par le lévulose est supérieur au retard produit par le glucose ; en même temps, l'augmentation de viscosité due à l'addition de lévulose surpasse l'augmentation de viscosité produite par le glucose ; mais, ce qui est essentiel, le quotient $\frac{\Delta V}{\Delta F}$ a la même valeur dans les deux cas.

COMPOSITION DES LIQUEURS	V	F	$\frac{\Delta V}{\Delta F}$
Saccharose 5 g. p. 100	0gr624	0,02000	
Saccharose 5 g. p. 100 ; Glucose 5 g. p. 100	0 558	0,01831	39,0
Saccharose 5 g. p. 100 ; Lévulose 5 g. p. 100	0 531	0,01763	39,1

Les produits d'hydrolyse interviennent donc uniquement par leur viscosité ; dès lors, il ne saurait être question de réaction d'équilibre ; et, en effet, l'inversion du sucre de canne par la sucrase est toujours complète, même en présence de sucre interverti ; c'est la raison pour laquelle les essais de synthèse biochimique du saccharose sont restés stériles.

Conclusion. Il existe des différences évidentes et profondes entre l'hydrolyse acide et l'hydrolyse diastasique.

L'hydrolyse acide du saccharose est toujours régie par la loi de Wilhelmy ; l'hydrolyse diastasique s'effectue suivant deux lois différentes suivant que l'enzyme ou le sucre est en excès.

Dans l'inversion du saccharose par les acides étendus, la vitesse est sensiblement proportionnelle au produit des concentrations en sucre et en catalyseur ; dans l'inversion par la sucrase, elle n'est proportionnelle qu'à l'un des deux facteurs.

Doit-on se hâter de conclure que l'action des enzymes échappe aux lois de la chimie générale ?

En réalité, on peut concevoir l'inversion diastasique du saccharose comme une réaction catalytique dans laquelle le catalyseur se combine transitoirement au corps qu'il transforme, la vitesse de formation de la combinaison intermédiaire étant infiniment grande.

Dans toutes les réactions de ce genre, la marche du phénomène est dominée par le rapport des concentrations du catalyseur et du produit transformé ; et, sauf perturbations d'ordre physique ou réactions chimiques parasites, la loi d'action de masse préside à la décomposition de la combinaison intermédiaire.

Le secrétaire communique aux membres de la Section le désir exprimé par notre confrère, M. G. Lemoine, de voir la Société entreprendre une enquête sur les essais des « baguettisants » en Belgique et sur les opinions et théories émises à leur sujet dans ce même pays.

Troisième Section

Réunion à la Faculté catholique des Sciences.

M. De Wildeman, président, rappelle la perte cruelle que la Section a faite en la personne de son Président d'honneur M. A. Dumont, décédé depuis la dernière réunion.

La Section décide de retourner à son auteur un manuscrit qui n'a pas pu être agréé par le Comité de rédaction de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

Il est donné lecture d'une note par laquelle M. G. Lemoine fait connaître l'intérêt qu'il porte aux recherches sur la baguette des sourciers pour reconnaître les eaux courantes et les métaux, et propose d'instituer une sorte d'enquête sur le sujet, pour savoir ce qu'on pense en Belgique de cette question, si on y a fait des expériences, découvert par ce procédé des sources ou des gîtes métallifères, enfin à quoi on attribue les mouvements de la baguette : fluide électrique, fluide nerveux, etc., agissant sur les mains qui transmettent leurs trépidations à la baguette ou au pendule.

M. le Président propose à la Section de porter cette question à l'ordre du jour de la prochaine session.

M. Boulangé développe sa communication intitulée :

Les Sagittæ et les Volsellæ des Hyménoptères supérieurs ont-elles leurs homologues chez les Chalastogastres ?

Dans plusieurs notes antérieures (3 à 6) nous nous sommes occupé de l'appareil copulateur des Chalastogastres.

Nous y avons discerné l'anneau d'étendue variable souvent appelé « cardo » et que Berlese (1) nomme « sclerite accessorio ». Une seconde pièce a été appelée par nous « basilaire », parce qu'elle reçoit le plus grand nombre des insertions musculaires. Nous aurions mieux fait de l'appeler principale et nous emploierons ici ce terme, Dufour (8) et Bordas (2) ayant déjà appelé le cardo « lame basilaire ».

Cette pièce principale comprend deux parties symétriques dont chacune est un segment basal des forceps ou « basal Stamm » de Zander (14). Elle porte :

1° Les valves du penis appelées aussi par nous « spathæ » (3) ;

2° Les palettes ou articles terminaux des forceps ou valves externes de Zander (14) et Enslin (9) ;

3° Les pièces que nous avons désignées par C (3) ; ce sont les pièces Vi 2 de Zander et Enslin.

4° Les pièces que nous avons désignées par T (3) pièces Vi 1 de Zander et Enslin. Dufour (8), chez Hylotoma caerulescens, les décrivait comme « une plaque large festonnée ». Elles ont aussi cet aspect chez Tenthredella temula (3), mais ont généralement une forme plus régulière.

Crampton en 1919 (7) désigne par « pal » les pièces que, en 1914, nous avions désignées par C et par « gl » les pièces T.

Le but poursuivi par Crampton est l'établissement d'une nomenclature unique pour les genitalia de tous les insectes. Pareille unité est très souhaitable si elle repose sur la constatation d'homologies indiscutables. En attendant que celles-ci soient établies, la réserve s'impose. C'est l'attitude très justement adoptée par Crampton, qui donne comme probable seulement l'identité de la pièce pal avec la volselle des hyménoptères supérieurs et de la pièce gl avec la sagitta.

Zander (14-15) avait déjà abordé l'étude de ces homologies en traitant du plan de l'appareil mâle des insectes (15) et tout spécialement des hyménoptères (14).

Il distingue de chaque côté de la gaine du penis les valves externes et les valves internes. Ces dernières, divisées en deux chez les térébrants, sont portées par les valves externes. Les valves internes sont longues, grêles et velues chez les guèpes ; elles se réduisent à une écaille chez les bourdons, acheminement à la réduction des pièces chitineuses chez l'abeille mâle, laissant la place à un penis dévaginable.

Zander étudie le développement, mais il ne nous paraît pas suffisant pour débrouiller les homologies, parce que les saillies comparables dans divers types et que Zander décrit comme l'origine de l'appareil copulateur doivent à leur tour se recouvrir de plaques chitineuses qui ne se correspondent pas nécessairement.

Ainsi Zander, appelant « valve interne » notre plaque C, la considère par sa partie terminale distincte de la « valve externe » ; mais la majeure partie de cette plaque recouvre une saillie qui lui est commune avec la pièce principale. La limite de ces pièces coïncide-t-elle avec celle du forceps et de la volselle de Dufour ? Nous ne voyons pas comment le développement à lui seul donnerait la réponse définitive à cette question.

Nos recherches poursuivies avant la guerre et reprises depuis nous suggèrent une autre façon de traiter le problème. On ne devrait pas séparer l'étude de l'exosquelette de celle des muscles qui s'y insèrent. Ce que nous savons des Chalastogastres nous montre que la musculature de l'appareil copulateur présente dans ce groupe un plan bien défini et cependant très souple, se coadaptant avec la forme de l'exosquelette. Si nous retrouvons chez les hyménoptères supérieurs des muscles dont les insertions sont comparables à celles des Chalastogastres, nous pourrons conclure à l'homologie des pièces qui portent ces insertions quelles qu'en soient les déformations.

Dans le cas contraire, nous n'irons pas jusqu'à dire que nous infirmons l'homologie, mais on devra rester sur la réserve.

Chez les Chalastogastres la gaine du penis est divisée en deux valves ; chacune d'elles est mue par cinq muscles s'insérant sur la pièce principale et d'autres insérés sur la pièce T (Vi I de Zander), savoir un chez les Tenthredinidæ, deux chez les Siricidæ ; ces derniers muscles n'ont pas été mentionnés dans nos publications antérieures.

Les principaux de ces muscles se retrouvent, actionnant les baguettes qui encadrent le penis des bourdons. Le penis lui-même, partie terminale dévaginable du canal éjaculateur, est garni de petits crochets et présente sur sa face dorsale une languette effilée plus chitinisée.

Chez les guêpes, les valves du penis sont soudées en un tube ou « gaine » entourant complètement le canal éjaculateur. Mais ce tube présente deux apophyses symétriques, en direction orale, elles constituent le « Kraftarm » de Kluge (10) et trahissent l'homologie avec les valves du penis ou baguettes ; on retrouve sur ces apophyses les insertions des cinq principales paires de muscles ; Kluge n'en distingue que quatre.

Ici donc, l'homologie est indiscutable et les points d'insertion sur la pièce principale, des muscles moteurs de la gaine (ou des valves) du penis sont homologues chez les Chalastogastres et chez les hyménoptères supérieurs.

Qu'est la sagitta ? Qu'est la volsella ?

Le terme « sagitta » n'est pas employé par Dufour (8) ni Bordas (2). Il l'est par Kluge (10) qui déclare l'emprunter à Schmiedeknecht (13). Celui-ci l'employait pour les bourdons.

Mais les sagittæ de Schmiedeknecht (voir sa planche 8, fig. 1) sont en réalité les baguettes ou valves du penis et sa « spatha » est la languette semi-rigide du penis. Kluge a appelé « spatha » la gaine du penis, alors qu'il s'agit de deux valves soudées, homologues des « sagittæ » de Schmiedeknecht. Zander (14, page 464) fait ressortir cette contradiction. C'est en adoptant partiellement la nomenclature de Kluge que nous avons appelé en 1914 (3 et 4) les valves du penis « spathæ ». Nous revenons au terme « valve du penis » pour éviter la confusion créée par Kluge.

Les pièces T (gl. de Crampton) ne peuvent être homologues des « sagittæ » au sens de Schmiedeknecht et ce n'est assurément pas cela que Crampton a voulu dire.

Kluge n'emploie pas le terme « volselle » ; celui-ci est de Dufour (8), repris par Bordas (2). Il désigne une lame située immédiatement sous le forceps. Les grandes pinces (stipites ou grosse Klammern des allemands) sont, pour une partie, notre pièce principale, divisée en deux branches entre lesquelles se meuvent le penis et sa gaine. Chaque « stipes » est formé d'une lame roulée circonscrivant une cavité ; mais cette lame ne revêt pas tout le pourtour du stipes ; une autre lui sert de complément qui est ventro-interne chez les bourdons et nettement interne chez les guêpes.

Chez les bourdons, cette pièce dépasse légèrement celle qui lui est dorso-externe, le forceps de Dufour et Bordas, et c'est elle que ces auteurs désignent par le mot volselle. Bordas (2) ne voit pas la volselle chez les guêpes. Elle ne passe pas inaperçue à Kluge (10), mais le terme stipes englobe forceps et volselle, chose que Zander ne paraît pas avoir comprise, à en juger par son tableau I (14) où sagitta et volselle sont présentés comme termes correspondants.

Kluge, dans chaque stipes, distingue la paroi interne et la paroi externe articulées entre elles, au point qu'un gros muscle, le « compressor stipitis » peut en rétrécir la lumière. Voir à ce sujet la coupe planche X, fig. 4 (10), qui représente même une troisième lame étroite ventrale intercalée entre les deux autres.

Dans cette discussion, nous supposons que Dufour a appliqué le terme volselle à la même pièce que Bordas qui dit reprendre sa nomenclature. Mais ici encore la confusion règne.

Ainsi, pour Radoskowsky, la truelle de Dufour est la squama, et la volselle, la lacinia ou segment final (12, pages 53 et 55). J. Pérez qui a bien connu Dufour et aussi Radoskowsky, affirme exactement l'inverse (11, page 80) : la volselle est la squama de Thomson et l'*Oberes* Englied de Schenk. J. Pérez d'ailleurs considère les pièces « branche ou stipes », « volselle ou squama », « truelle ou lacinia » comme trois articles du forceps ; or, ces pièces ne sont nullement sériées comme des articles successifs.

La pièce C des Tenthredinidæ (pal de Crampton) est dorsale, mais l'appareil copulateur de ces insectes étant retourné de 180° (5 et 7), elle est ventrale chez les Siricidæ et en général les « orthandria » selon le terme de Crampton. La forme prise par la pièce principale lorsqu'elle se découpe en deux stipites ou branches du forceps, doit rejeter les pièces C vers le dedans et les rendre ventro-internes, ou même internes (faisant face au penis). Il y a donc présomption en faveur de l'homologie avec les volselles des bourdons et les parois internes des stipites des guêpes.

Chez les bourdons, la volselle (au sens de Bordas et à celui que, avec lui et Radoskowsky, nous prêtons à Dufour), si elle est bien distincte pour les descripteurs à cause de sa partie terminale libre, nous apparaît sans articulation avec le forceps et sans insertions musculaires. Nous serions tenté de la comparer, comme le fait Zander (14 et 15) à une écaille (« Schuppe »). Cet auteur la déclare très réduite. Nous ne sommes pas de cet avis et nous faisons remonter la limite orale des volselles presque au niveau de celle des forceps. Bordas les déclare contiguës au cardo. Ces divergences montrent que la volselle est mal délimitée. Selon nous, il faut lui attribuer tout le territoire plus chitinisé, non mobile sur le forceps mais s'en isolant par cassure. S'il ne reçoit pas d'insertions musculaires, c'est à cause de sa fixité. Si cette volselle n'est pas l'homologue de la pièce C des Chalastogastres, cet homologue ne se voit pas ailleurs, car les muscles correspondant à ceux numérotés 6 à 8 chez Tenthredella (3) ne se trouvent pas chez les bourdons et toute la surface interne des forceps est occupée par les insertions des muscles des valves du penis. Quant à la « squama », elle est très mobile, elle termine la branche du forceps et deux muscles très grêles la font identifier à la palette des Chalastogastres (valve externe de Zander et Enslin).

C'est donc une démonstration par l'absurde de l'homologie de la volselle que nous énonçons ici ; elle devient positive du fait que la volselle est encadrée par les insertions des protracteurs des valves du penis, ce qui confirme la position identique à celle de la pièce C.

Le même raisonnement pourrait apparemment être tenu pour la paroi interne des stipites des guêpes. Mais cette paroi interne reçoit des muscles qui, il faut le reconnaître, correspondent mal à ceux qui meuvent la pièce C des Chalastogastres. De plus, l'importance des muscles des valves du penis est moindre.

Il n'y a pas de sagitta (au sens de Kluge) chez les Bombus. Chez les Vespa (V. germanica notamment) elle s'articule à l'extrémité orale de la paroi interne du stipes. Or, chez les Chalastogastres, T s'articule à l'extrémité aborale de C.

Rappelons que chez les Tenthredinidae, nous avons vu un muscle (3 fig. 4, 6) unissant le bord oral de la région latérale de la pièce principale à l'extrémité aborale en crochet de la pièce C ; un muscle 7 croise 6 et tend à faire coulisser en sens inverse la pièce C sur la pièce principale ; enfin les muscles 8, 9, 10 allant du bord oral de la pièce C à la pièce T, la font osciller sur l'extrémité de C.

Chez Vespa germanica, la plaque interne du stipes est concave, roulée en gouttière parallèlement à l'axe longitudinal. Dans cette gouttière, garnie de poils couchés, peut osciller la sagitta. A son bord oral, la plaque interne porte une apophyse (fig. 1, P) en forme de poignée, implantée à l'angle dorsal et un gros tubercule (fig. 1, M) à l'angle ventral.

La sagitta (Sa) a la forme de ciseaux fermés dont les lames seraient confondues, situées dans un plan dorso-ventral, les manches pleins et écartés, le manche dorsal libre. Le manche ventral A est articulé au tubercule M et, plus long que l'autre, dépasse le tubercule en direction orale. Cette articulation, peu visible, consiste en une fine ligne claire qui contourne le tubercule.

L'extrémité de l'apophyse A, porte les deux seuls muscles insérés sur la sagitta ; l'un, très court (1) va à l'apophyse en poignée P, l'autre (2) va s'élargissant et croise du côté externe le compressor stipitis (3). Le premier se confond, croyons-nous, avec le deuxième muscle de la sagitta de Kluge. Quant au deuxième, Kluge le figure en coupe (10, pl. X, fig. 5) mais sans désignation ni mention dans le texte.

L'apophyse en poignée P, sauf à son extrémité ventrale, est tout entière occupée par l'insertion d'un gros muscle (fig. 1, 4) qui va s'épanouir sur le bord latéral oral du stipes. C'est le muscle non dénommé que figure Kluge sur les parties latérales de la coupe (pl. X, fig. 6). L'adductor sagittae (Ad. Sa.) de Kluge doit être un faisceau que nous avons vu se séparer du muscle 4 et se diriger vers l'angle oral dorsal du stipes.

Chez Vespa germanica, le compressor stipitis présente deux larges surfaces d'insertion : l'une sur la paroi externe, l'autre sur la paroi interne du stipes. Chez V. crabro, on peut détacher la paroi interne et toutes les fibres du compressor stipitis apparaissent disposées en une seule couche et tendues en travers de la concavité du forceps comme les cordes d'un instrument de musique. Elles n'aboutissent donc pas à la paroi interne, mais à la bande qui du côté ventral l'unit à la paroi externe. Les fibres les plus externes de la région aborale du compressor stipitis de V. germanica ont des rapports analogues et seraient donc seules homologues du compressor stipitis de V. crabro.

Si la plaque interne du stipes est homologue de la pièce C des Chalastogastres, la partie du compressor stipitis propre à V. germanica devrait être homologue de notre muscle 7 des Tenthredinidae. Le muscle 4 des Vespa serait alors homologue du muscle 6 des Tenthredinidae ; ces deux derniers s'insèrent dans la même région de la pièce principale, mais leur homologie conduirait à admettre que le crochet aboral de la pièce C est remonté au bord oral de cette pièce chez les guèpes et du même coup l'articulation de la pièce T.

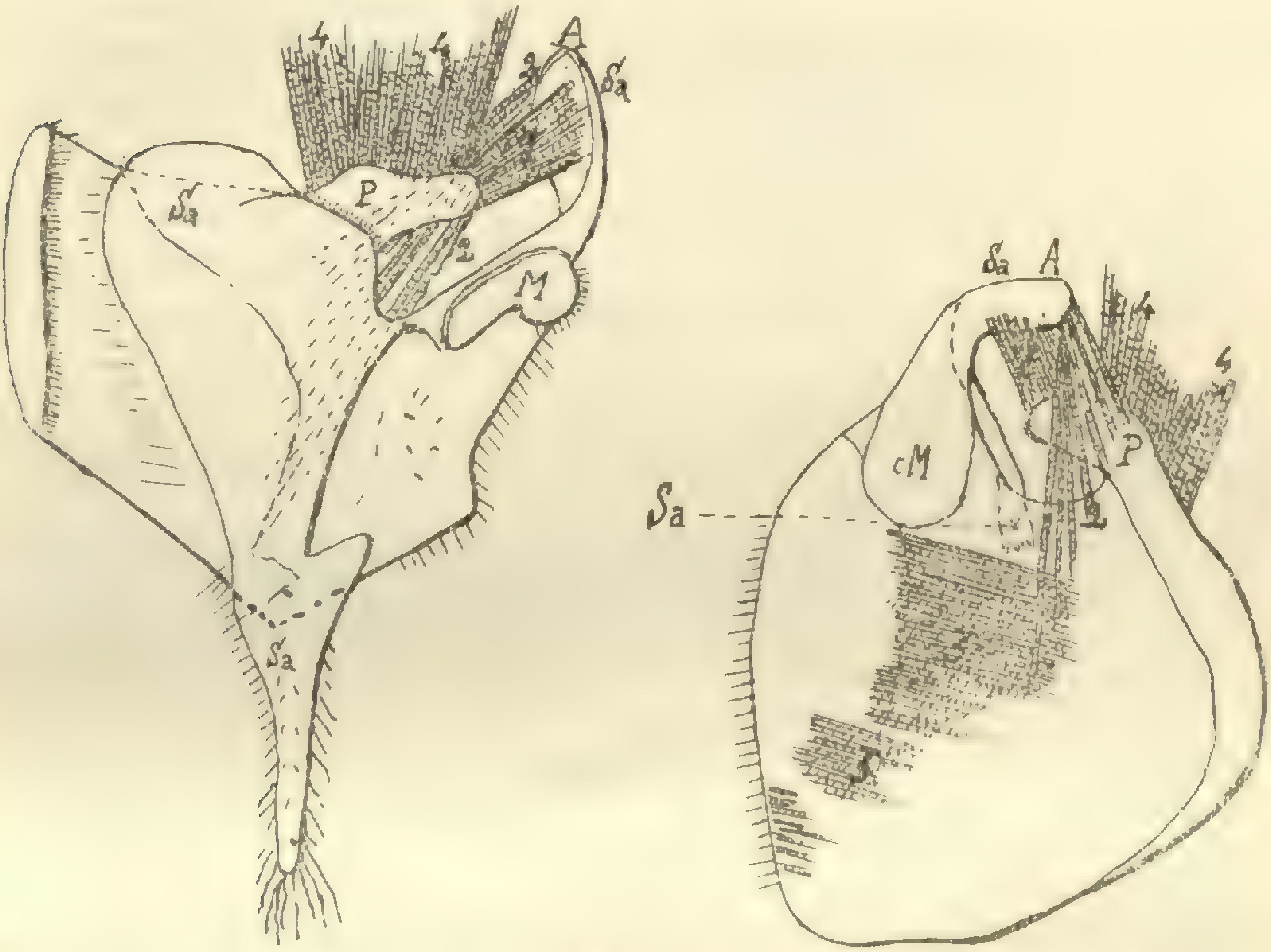


Fig. 1. — A gauche, plaque interne du stipes gauche de Vespa germanica (face vers le penis). — A droite, la même, vue par le dedans du stipes, la sagitta sectionnée. *Sa*, sagitta ; *P*, apophyse en poignée ; *M*, tubercule ventral ; *cM*, cavité interne du tubercule ; *1* à *4*, muscles.

Peut-on encore parler d'homologies dans ces conditions ?

Céder au désir d'établir une nomenclature unique, c'est risquer d'amener des confusions regrettables. Nous estimons qu'il faut réserver la décision.

Nous entrevoyons pourtant l'existence de types intermédiaires. C'est ainsi que chez Vespa crabro et V. vulgaris, la plaque interne du stipes est de dimensions restreintes, l'apophyse en poignée P est plus distante du bord oral et la sagitta très courte est insérée plus loin sur le stipes.

Par ailleurs, parmi les Andrena, nous avons pu disséquer

A. precox. Dans cette espèce, la volselle est très réduite, relativement surtout à deux crochets qu'elle porte et dont l'un est articulé sur l'autre à la façon de la pièce T sur la pièce C des Chalastogastres.

Ce fait nous suggère l'idée que la lame interne du stipes des guêpes pourrait correspondre à la partie terminale seule de la pièce C ; le reste de la plaque ayant cessé d'être fortement chitinisé serait représenté par l'espace qui sépare l'apophyse en poignée P du bord oral du stipes.

BIBLIOGRAPHIE

1. Berlese. — Gli Insetti, Chap. VI.

2. Bordas. — *Appareil mâle des Hyménoptères.* Annales des Sciences naturelles-zoologie, t. XX, 1895.

3. Boulangé. — *L'appareil copulateur de Tenthredella temula* (Scop). Bulletin de la Société entomologique de France, 1914, page 260

4. Boulangé — *Sur les appareils copulateurs de Dolerus gonager F. et de D. nigratus* Müll. Ibid. 1914, page 416.

5. Boulangé. — *Sur le retournement de l'appareil copulateur des Tenthredinidae.* Ibid. 1920, p. 216.

6. Boulangé. — *Sur les muscles qui actionnent l'ensemble de l'appareil copulateur des Chalastogastres.* Ibid. 1920, p. 227.

7. Crampton — *The genitalia and terminal abdominal structures of males and the terminal abdominal structures of the larvæ of chalastogastrous hymenoptera.* Entomological Soc. of Washingt. (proceedings), vol. 21, juin, 1919.

8. Dufour. — *Recherches anatomiques et physiologiques sur les Orthoptères, Hyménoptères et Névroptères,* 1834.

9. Enslin. — *Die Tenthredinoidea Mitteleuropas.* Deutsche entomologische Zeitschrift, 1912-1913

10. Kluge. — *Das männliche Geschlechtsorgan von Vespa germanica.* Berlin, 1895.

11. Pérez J. — *De l'organe copulateur mâle des Hyménoptères et de sa valeur taxonomique.* Bulletin de la Société entomologique de France, 1894, page 74.

12. Radoskowsky. — *Révision des armures copulatrices des mâles du genre Bombus.* Moscou, 1884.

13. Schmiedeknecht. — Apidae Europaeae. 1882-84.

14. Zander. — *Beiträge zur Morphologie der männlichen Geschlechtsanhänge der Hymenopteren.* Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie, LXVII, 3, 1900.

15. Zander. — *Der Stilplan des männlichen Genitalapparates der Hexapoden.* Erlangen, 1903.

M. J. Claerhout expose *Une Trouvaille de l'Age du Bronze en Flandre.*

Au cours des travaux exécutés à Kerkhove (Flandre Occidentale) depuis le printemps de 1919, pour doter l'Escaut de nouvelles écluses, on a exhumé de la couche tourbeuse de la plaine alluviale beaucoup d'ossements d'animaux et des vestiges de l'industrie humaine.

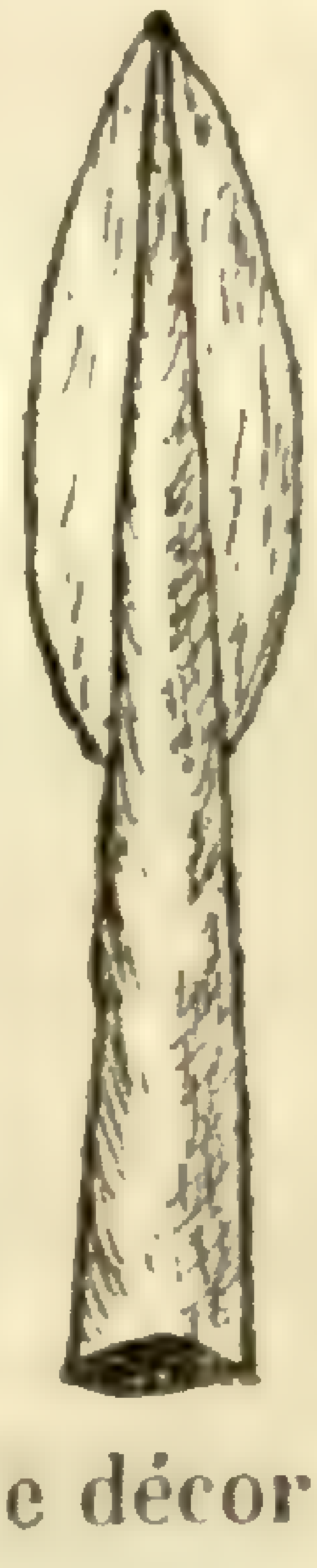
Nous possédons, entre autres, des crânes de chevaux et de loups, un fémur de castor, un frontal d'Urus, une longue portion de bois de cerf, portant une profonde entaille, pratiquée probablement au moyen d'un couteau de silex.

Au mois de juin 1920, un ouvrier a recueilli, à plusieurs mètres de profondeur, une pointe de lance à douille en bronze jaune.

C'est un spécimen très gracieux et très bien conservé du type simple, sans boucles, ni œillets latéraux, de ce type classique qui devient commun à la troisième période de l'âge du bronze et particulièrement abondant à la quatrième période qui va de 1300 à 900 ans avant Jésus-Christ (¹).

La douille conique, qui se prolonge jusqu'à l'extrémité des ailerons, a une longueur de 9,5 centimètres jusqu'à la naissance des ailerons et une longueur totale de 20,5 centimètres. L'ouverture de la douille a un diamètre de 23 mm.

Un peu en dessous de la naissance des ailerons, qui relèvent d'une forme déterminée par M. l'abbé Breuil et dessinent une feuille de saule (²), la douille est perforée de trois trous ; nous possédons aussi les goupilles en bronze qui étaient fixées dans ces ouvertures pour assujettir la hampe en bois, dont l'extrémité était encore intacte dans la douille (³).



La douille et les ailerons ne présentent pas le moindre décor.

(¹) J. Déchelette, *Manuel d'Archéologie,* Tome II. *Archéologie celtique ou protohistorique.* Première Partie : *Age du Bronze.* Paris, 1910, p. 219.

(²) L'abbé Breuil, *Age du Bronze dans le Bassin de Paris.* Dans l'ANTHROPOLOGIE, tome XIV, Paris, 1903, p. 503.

(³) Notre figure représente cette pointe de lance au quart de la grandeur naturelle.

L'exemplaire que nous venons de signaler et que nous pourvons rattacher à l'ensemble des objets en bronze du bassin de Paris, dont les types ont été décrits par M. l'abbé Breuil, est le seul qui ait été rencontré dans la Flandre Occidentale. Il ressemble à une autre très élégante pointe de lance en bronze, qui provient, également, d'un sous-sol marécageux et qui a été retirée des déblais produits par le creusement du canal de Selzaete, situé au Nord de la Flandre Orientale. Cette dernière pointe de lance est conservée au Musée du Cinquantenaire à Bruxelles ([1]).

Les objets en bronze ont été importés en Belgique. La région que nous habitons, la vallée de l'Escaut, située en aval de Tournai, parait avoir été occupée par une population assez dense, par de nombreuses tribus néolithiques et devait constituer un milieu très favorable à l'introduction et à l'expansion des produits de la première industrie du métal.

Sur la rive droite du fleuve s'élève un ensemble de collines où l'on a recueilli un outillage néolithique varié, où l'on a rencontré des menhirs et des vestiges de deux dolmens, dont l'emplacement n'a pas encore été exploré.

Sur la rive gauche, dans les villages qui environnent Kerkhove, nous avons récolté de belles collections d'outils en silex ([2]); des milliers d'éclats attestent un débitage bien intense sur place du silex noir d'Obourg et du silex gris de Spiennes.

([1]) Section de la Belgique Ancienne. — Age du Bronze. — Ch. J. Combaire. *Les premiers Ages du Métal dans les Bassins de la Meuse et de l'Escaut.* Dans BULL. DE LA SOC. D'ANTHROP. DE BRUX., t. XIII, 1894-95, p. 145.

([2]) *Station néolithique de Caster,* dans ANN. DE LA SOC. SCIENT. DE BRUX., session du 15 avril 1912, troisième section, et session du 27 novembre 1919 et dans ANN. DE LA SOCIÉTÉ ROYALE D'ARCHÉOL. DE BRUX., t. XXVI, 1912, p 157; tome XXVII, 1913 et tome XXVIII, 1914-1919, p. 65. — *Station néolithique du Bois de la Potence d'Elseghem,* dans ANN. DE LA SOC. SCIENT DE BRUX., session du 30 janvier 1913 et dans ANN. DE LA SOC. R. D'ARCH. DE BRUX, *loc. cit. Station néolithique d'Ingoyghem,* dans ANN. DE LA SOC. SCIENT. DE BRUX., session du 14 avril 1920. troisième section. — Collections inédites de Tieghem, d'Anseghem, d'Elseghem et de Waermaerde.

M. De Wildeman fait une communication sur des *Matériaux pour l'étude des Alchemilla d'Afrique.*

Dans des études sur les Rosacées africaines le Prof. Engler subdivisa la section *Eualchemilla* Focke du genre *Alchemilla* en : *Pedatae, Batilobeae* et *Subochreatae* (¹). Nous ne pouvons pour le moment discuter la valeur de ces subdivisions peu naturelles, mais c'est dans la dernière que se classent une série de formes nettement caractéristiques des hautes altitudes centro-africaines dont nous avons eu à nous occuper.

Pour le Prof. Engler, cette subdivision comportait : *A. Stuhlmannii* Engl. (Ruwenzori) ; *ruwenzoriensis* Rolfe (Ruwenzori) ; *argyrophylla* Oliv. (Kilimanjaro) ; *argyrophylloides* Bak. f. (Ruwenzori) ; *subnivalis* Bak. f. (Ruwenzori).

Ces espèces possèdent des feuilles à limbe souvent réduit, coriace, en coin ou tronqué à la base, jamais cordé.

Nous les réunissons sous la dénomination « subcuneatifoliae » pour les différencier des plantes du même groupe « subochreatae » que l'on pourrait dénommer « subcordatifoliae ».

Le nombre d'*Alchemilla* « subcuneatifoliae » cité plus haut est inférieur à la réalité. Grâce aux recherches de notre confrère le Dr Bequaert et à MM. Prain et Dr O. Stapf (Kew) ; Rendle et Baker f. (British Museum) ; Prince Roland Bonaparte (Paris) ; Prof. Dr H. Lecomte (Muséum d'Hist. nat. Paris), nous avons eu en mains, outre des documents nouveaux, la plupart des types anciens.

Nous signalerons ci-après 12 espèces avec leur distribution actuelle, en considérant l'*A. tridentata* Cortesi comme synonyme de l'*A. subnivalis* Baker f., assimilation paraissant exacte d'après certains documents, mais peu certaine si on en juge par la figure publiée dans : Mildbraed, *Deutsch Zentral Afrika Exped.* Bot. pl. XXII, fig. E.-H. *(Voir tableau, page suivante).*

Nous ne pouvons décrire ici les nouveautés, nous en publierons ultérieurement les diagnoses ; le tableau ci-dessous, en les classant provisoirement, donnera leurs principaux caractères distinctifs.

(¹) Engler in Bot. Jahrb. XLVI (1911), p. 127 et suiv. et in Pflanzenw. Afrika, III, 1 (1915), p. 295.

	RUWENZORI	KENIA	KILIMANJARO	ELGON
Alchemilla affinis De Wild.	—	..	..	..
» argyrophylla Oliv.	..	—	—	—
» argyrophylloides Baker f.	—	..	..	..
» Bequaerti De Wild.	—	..	..	..
» butaguensis De Wild.	—	..	..	..
» emarginata De Wild.	—	..	..	..
» keniensis Baker f.	..	—	—	—
» microphylla De Wild.	—	..	..	..
» Roccatii Cort.	—	..	..	..
» ruwenzoriensis Rolfe	—	..	..	..
» Stuhlmannii Engl.	—	..	..	..
» subnivalis Baker (tridentata Cort.)	—	..	..	..

I. — Feuilles plus ou moins cunéiformes à la base, stipules scarieuses.

A. Feuilles entières, non lobées, oblongues ou obovales, à 3 5 dents courtes.

a. Feuilles de 6-8 mm. de long, 3-dentées, velues, soyeuses sur les deux faces, à nervation latérale non visible sur les deux faces . . . .
A. *microphylla* De Wild. n. sp.

b. Feuilles de 8-15 mm. de long, 3-5-dentées, à poils plus ou moins nombreux allongés sur les deux faces, ou soyeuses supérieurement et poils épars sur la face supérieure, à nervation latérale visible, souvent nettement en creux sur la face supérieure.

α. Feuilles à 3-5 dents, à sinus étroits, dent médiane plus étroite que les latérales, limbe de 8-15 × 3-5 mm. A. *Bequaerti* De Wild. n. sp.

β. Feuilles à 3 dents subégales, à sinus élargis, limbe de 7,5-10 × 5-6 mm. A. *subnivalis* Baker f.

B. Feuilles 3-5 lobées.

a. Lobes latéraux entiers, aigus, plus étroits que le lobe central (¹).

α. Dent médiane du lobe central aussi longue que les dents latérales ou plus longue.

Δ. Dents du lobe médian de moins de 1 mm. de long . . . . *A. argyrophylloides* Bak. f.

ΔΔ. Dents du lobe médian de 1-6 mm. de long.

0. Feuilles de 0-17 mm. de long ; lobe central divisé en 3 lobes atteignant au maximum 4-5 mm. . *A. argyrophylla* Oliv.

00. Feuilles de 6-9 mm. de long : lobe central divisé en 3 lobes atteignant au maximum 2-3 mm. de long . . . . *B. keniensis* Bak. f. (²)

β. Dent médiane du lobe central réduite, paraissant souvent nulle et dépassée par les lobes latéraux . . *A. emarginata* De Wild. n. sp.

b. Lobes latéraux dentés au sommet de même largeur environ que le lobe central.

α. Limbe velu-soyeux sur les deux faces . . *A. ruwenzoriensis* Rolfe

β. Limbe soyeux sur la face inférieure seulement, poils épars allongés sur la face supérieure.

Δ. Limbe toujours à trois lobes, à sinus de 4-6 mm. de profondeur entre les lobes. *A. affinis* De Wild. n. sp.

ΔΔ. Limbe à 3-4-5 lobes peu profonds, sinus au maximum de 4 mm. de profondeur, lobes externes généralement réduits . . *A. butaguensis* De Wild n. sp.

(¹) *A. Stuhlmannii* Engler (Runssoro) et *A. Roccatii* Cort. se classent sans nul doute ici ; mais nous n'avons pu en étudier les types, et les descriptions sont insuffisantes pour un classement.

(²) La diagnose de cette espèce africaine nous a été fournie par M. Baker ; elle sera publiée ultérieurement.

On remarquera par l'examen du premier tableau qu'aucune des espèces de massif du Ruwenzori n'est signalée, à ce jour, dans les autres massifs montagneux du centre africain, et que l'*A. argyrophylla* et le *A. keniensis* sont les seules espèces dont la distribution s'étendrait sur plusieurs massifs.

La flore du Kenia posséderait deux espèces, cet *A. argyrophylla* et une espèce voisine, *A. keniensis*, dont M. Baker f. du British Museum nous a envoyé la diagnose avec des échantillons, et que nous avons retrouvé dans les matériaux du Muséum de Paris (Kilimanjaro : P. Leroy et Kenia : Ch. Alluaud).

Tandis que les *Alchemilla « subcuneatifoliae »* du Ruwenzori paraissent relativement très distincts les uns des autres, ceux du Kenia semblent extrêmement affines ; on pourrait avancer que *A. argyrophylla* type et *A. keniensis* type sont deux formes extrêmes entre lesquelles on observe des variations intermédiaires nombreuses.

On ne peut tirer de cet exposé des conclusions définitives quant à la géo-botanique, ni quant à la valeur spécifique de ces plantes, car l'exploration des massifs montagneux centro-africains est encore beaucoup trop peu avancée. Cependant la répartition inégale de ces plantes, d'altitude relativement élevée, semble appuyer l'opinion que malgré l'origine très semblable des montagnes africaines, malgré une analogie indiscutable dans leurs flores, il y aura pour chaque massif, ou groupe de massifs, des représentants végétaux différents qui modifieront, dans une certaine mesure, la composition spécifique d'associations végétales comparables biologiquement.

La Section prend connaissance d'observations de M. Alph. Proost sur *les fossiles de la tourbe du littoral.*

Il a découvert notamment, à marée basse, près des écluses de Heyst, dans les racines d'un vaste tronc d'arbre émergé, des ossements de chevaux, que feu Demarbaix, professeur à l'Université de Louvain, attribuait à un animal gigantesque ; un fémur de cet animal, *non décrit*, a figuré longtemps dans les vitrines du Musée de Zootechnie de l'École d'Agriculture, annexée à l'*Alma Mater*.

Il est donné lecture de la troisième série de notes du R. P.

Longin Navás, S. J., *sur des Névroptères nouveaux ou critiques*, en cours de publication dans les ANNALES.

M. P. Pruvost résume ses remarques *à propos d'un travail du Dr H. Bolton sur la faune du terrain houiller du Kent. Comparaison des couches houillères du Kent et du Pas-de-Calais au moyen des méthodes paléontologiques.*

Le bassin houiller du Kent, où plusieurs puits sont maintenant en exploitation, commence à être bien connu, grâce aux nombreux sondages qui y ont été pratiqués dans ces dix dernières années et aux premiers travaux d'extraction. Les géologues et les ingénieurs anglais, qui ont suivi dès le début le progrès des recherches, les ont fait connaître dans une série de mémoires, dont les plus importants sont dus au prof. W. B. Dawkins, au Dr M. Burr, à sir A. Strahan, au Dr E. A. N. Arber et au Dr H. Bolton (1). Parmi ces savants, quelques-uns se sont attachés à l'étude de la flore fossile recueillie dans ce bassin, lorsqu'il fut reconnu que le moyen le plus sûr de fixer la position relative des couches de houille et de les comparer à celles des bassins voisins, était de se consacrer à l'examen minutieux des empreintes végétales ou animales qui les accompagnent. Ce fut, pour le Kent, l'œuvre de R. Zeiller d'abord, puis de E. A. N. Arber surtout, qui s'est livré, sur les végétaux recueillis au cours des sondages (2), à une étude importante que la mort est malheureusement venue interrompre.

Mais l'analyse la plus approfondie qui ait été tentée du terrain houiller du Kent est l'œuvre de M. H. Bolton, de Bristol, qui a essayé d'appliquer à l'étude d'une quinzaine de sondages du Sud-Est, les connaissances étendues qu'il possède de la faune houillère en Grande-Bretagne. Il a résumé cet examen minutieux dans un mémoire paru récemment : « *The fauna and stratigraphy of the Kent Coalfield* » (¹) où, grâce au soin avec lequel il a relevé les associations fauniques niveau par niveau, il a édifié un document de grande valeur. Il y a appliqué avec succès à la stratigraphie les méthodes paléontologiques et le bassin du Kent, quoique profondément caché sous les terrains récents, peut être rangé au nombre des formations houillères où la distribution des faunes est le mieux connue, telles que celles du N. Staffordshire étudiées par J. Ward et W. Hind, celles de Belgique étudiées par MM. X. Stainier et A. Renier, ou celles du Nord de la France.

---

(1) On en trouvera la liste bibliographique dans le travail de E. A. N. Arber, *Geology of the Kent Coalfield.* TRANS. INST. MINING ENGIN., 1914, XLVII, p. 677.

(2) E. A. N. Arber, *Fossil flora of the Kent Coalfield.* QUART. JOURN. GEOL. SOC., vol. 70, p. 54-81, pl. XI à XIII (1914). Dans ce travail, E. A. N. Arber donne de longues listes de végétaux fossiles provenant de 11 sondages. Il n'indique malheureusement pas avec détail les profondeurs auxquelles les espèces ont été observées, se bornant à les classer dans deux séries de couches différentes, une supérieure (Transition C. M.) et une inférieure (Middle C. M.). Aussi son travail perd-il un peu de sa valeur documentaire et il faut regretter qu'il ne corresponde pas au degré de précision qu'on doit exiger maintenant des recherches de paléontologie stratigraphique.

Les recherches que j'ai effectuées, ces dernières années, au Musée houiller de Lille, avec MM. Ch. Barrois et Paul Bertrand, m'ont amené à rapprocher les résultats présentés par M. Bolton pour le Kent, de ceux qui ont été obtenus dans le Nord de la France (²) et c'est l'objet de la présente note de tenter, entre les couches houillères du S. E. de l'Angleterre et celles du Pas-de-Calais, une comparaison plus précise que celles qui ont été réalisées jusqu'à présent.

E. Arber avait distingué dans le bassin du Kent des couches qu'il attribuait aux « Transition Coal Measures » et d'autres subordonnées, les « Middle C. M. », estimant que les « Lower C. M. » ou couches les plus inférieures, n'y existaient pas. M. Bolton montre que les « Lower C. M. » (ou tout au moins leur partie supérieure) y sont représentées avec leur faune caractéristique et distingue au-dessus d'elles des termes correspondant au « Pennant Grit » et aux « Farrington series » (p. 26).

Pour être tout à fait précis, je désignerai ces différents faisceaux par les noms des fosses et sondages qui les ont rencontrés et j'en analyserai les caractères en commençant par les inférieurs.

(¹) H. Bolton, TRANS. INST. MINING ENGIN., vol. XLIX, part. 4, p. 643-702 (1915).

(²) Ch. Barrois et P. Pruvost. *Les divisions stratigr. du terr. houiller du Nord.* C. R. ACAD. SCIENCES, t. 168, p. 647 ; P. Bertrand, *Les zones végétales du terr. houiller du Nord,* IBID , t. 168, p. 780 ; P. Pruvost, *La faune contin. du terr. houiller du Nord,* MÉM. CARTE GÉOL. FRANCE, 1919.

I. *Couches d'Ebbsfleet.* — Ce sont les « Lower C. M. » de M. Bolton. Elles ont été rencontrées par le sondage d'Ebbsfleet sous les morts-terrains (fig. 1). La fosse de Chislet (au nord de Stodmarsh) a été creusée dans ce faisceau ; il a d'ailleurs été atteint

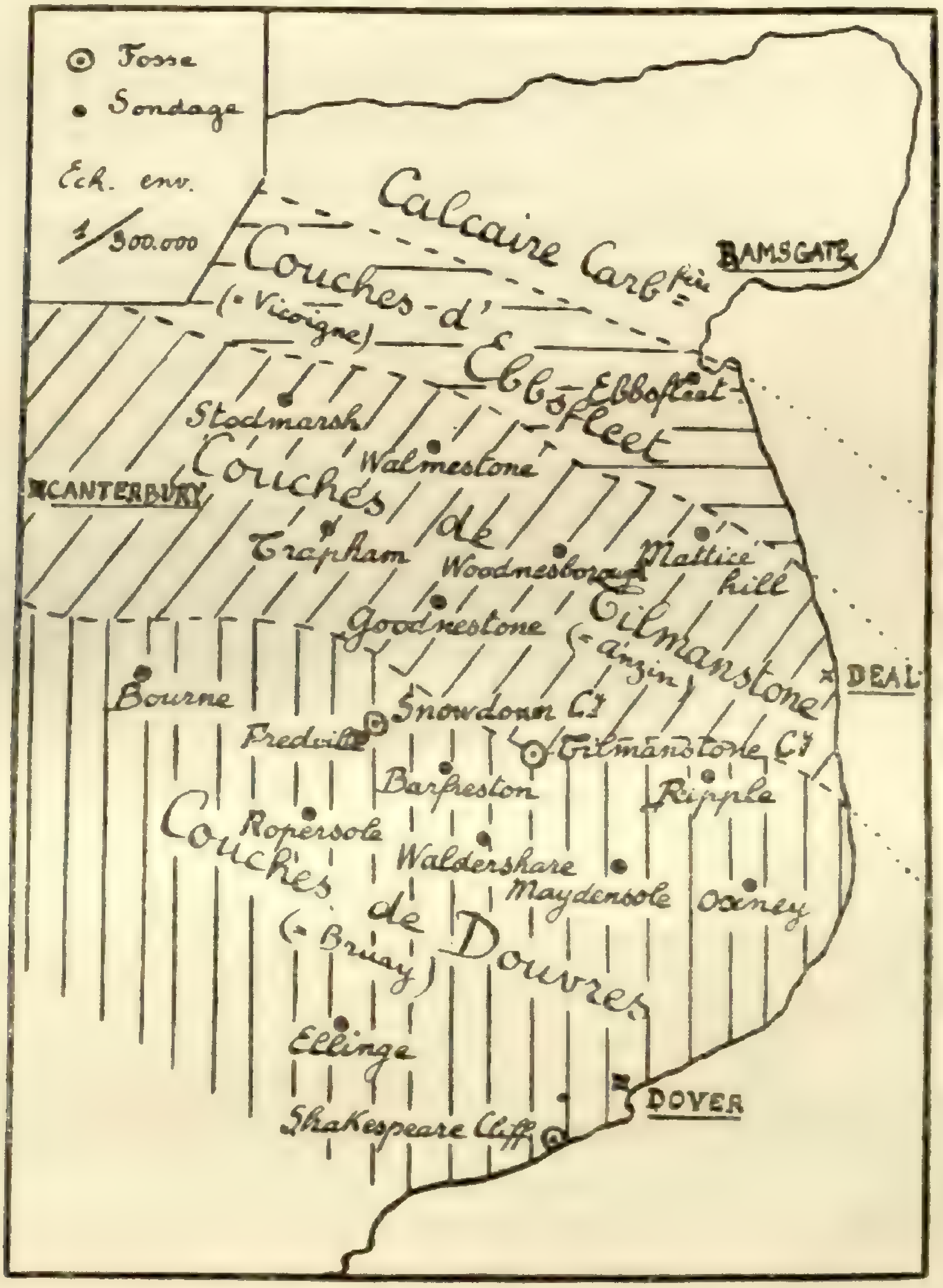

Fosse
Sondage
Éch. env.
1/300.000
Calcaire Carbfère
RAMSGATE
Couches d'Ebbsfleet
(= Vicoigne)
Ebbsfleet
Stodmarsh
Walmestone
CANTERBURY
Couches de Tilmanstone
(= Anzin)
Trapham
Woodnesborough
Mattice hill
Goodnestone
DEAL
Bourne
Snowdown Ct
Fredville
Tilmanstone Ct
Barfreston
Ripple
Ropersole
Waldershare
Maydensole
Oxney
Couches de Douvres
(= Bruay)
Ellinge
Shakespeare Cliff
DOVER

FIG. 1. Carte du bassin houiller du Kent.

en profondeur par un grand nombre de sondages, en particulier ceux de Mattice Hill (entre la profondeur 1400 pieds et le calcaire carbonifère), de Ripple (entre 2500 pieds et le calcaire), d'Oxney (entre 2980 pieds et le calcaire).

Les couches renferment un grand nombre de niveaux marins à Lingules, Goniatites, *Productus* (sondages de Barfreston, entre les profondeurs de 2500 et 3000 pieds). La faune limnique qui alterne avec ces épisodes marins est représentée par *Carbonicola acuta* (s. de Stodmarsh), *Elonichthys semistriatus* (s. de Mattice Hill), *Prestwichia anthrax* (s. de Ripple). Ce sont des types spéciaux à l'assise de Vicoigne, caractérisée, comme les couches d'Ebbsfleet, par une alternance de niveaux marins et de couches limniques à *Carbonicola acuta.* On reconnaît d'ailleurs dans les listes de E. Arber, quoique leur niveau exact ne soit point indiqué, les espèces végétales de cette même assise, telles que : *Nevropteris Schlehani* (sond. d'Oxney), *Alethopteris lonchitica, A. decurrens, Nevropteris obliqua, Lepidodendron lycopodioides*, etc...

Ce faisceau d'Ebbsfleet contient environ six veines de charbon maigre généralement minces, dont une cependant de 1 m. 80 d'ouverture (à Walmestone).

Sur le continent, l'assise de Vicoigne repose sur l'assise de Flines (ou d'Andenne) qui en est séparée par le poudingue houiller. Les sondages du Kent n'indiquent point la présence d'un niveau de grès ou de poudingue qui puisse représenter ce niveau-repère (« rough rock » des mineurs anglais) ; aussi M. Bolton pense-t-il que la base des Lower C. M. fait défaut à Douvres. Je crois que l'assise de Flines y existe, mais sous une épaisseur très réduite, car l'abondance des niveaux marins à la base est un des caractères de cette assise et le sondage d'Ebbsfleet a rencontré à la limite du calcaire et du houiller des schistes pyriteux qui me paraissent représenter le niveau des ampélites de Chokier-Bruille (= Pendleside series), ce qui indique l'existence dans le Kent des formations les plus inférieures du houiller, comme on les connaît sous une épaisseur réduite dans le bassin du Pas-de-Calais et le bassin d'Hardinghem.

II. *Niveau marin de Mattice hill.* — Parmi les horizons marins connus à présent dans le Kent, celui du sondage de Mattice hill à environ 1350 pieds de profondeur, est un des plus constants, ayant été reconnu à Walmestone, Barfreston, Ripple, Oxney (1). C'est aussi le plus élevé dans la série : il se trouve à environ 200 mètres au-dessus du calcaire carbonifère. Sa faune comprend, d'après M. Bolton, des *Lingula mytiloides, Orbiculoidea nitida, Productus scabriculus,* des lamellibranches et des goniatites. Il est isolé dans la série, au voisinage des couches qui ont fourni à E. Arber, des *Lonchopteris* et l'*Aleth. Davreuxi,* au sommet de l'assise d'Ebbsfleet à *Carbonicola acuta* et *Nevropt. Schlehani.* Cet ensemble de caractères correspond à ceux du niveau marin de Poissonnière-Katharina, qui est actuellement suivi à travers tout le bassin westphalien, belge, français et connu encore à Bristol. Ce niveau constitue la limite supérieure de l'assise de Vicoigne ; M. Bolton y trace précisément le sommet des Lower C. M. dans le Kent. Cet important repère existe donc dans le bassin de Douvres.

III. *Couches de Tilmanstone.* — Ces couches rencontrées par les fosses de Tilmanstone qui les exploitent, reposent sur les précédentes. Elles correspondent aux terrains traversés entre les profondeurs 2000 et 2980 pieds au sondage d'Oxney, entre 1050 et 2000 pieds à Trapham, entre 1900 et 2500 pieds à Ripple. Les sondages de Woodnesborough, Goodnestone, Walmestone, Mattice hill les ont recoupées sur la moitié supérieure de leur parcours dans le terrain houiller. Leurs caractères paléontologiques consistent en l'absence des épisodes marins, la présence d'une faune limnique à *Anthr. pulchra, Anthr. minima* et *Naiadites carinata.* La flore en est également bien caractérisée d'après les listes d'Arber où nous relevons : la présence des *Lonchopteris (L. rugosa* à Walmestone, *L. Eschweileriana* à Stodmarsh), des *Aleth. Davreuxi* et *valida.* du *Nevropt. gigantea,* l'abondance des sigillaires du type *scutellata* et *rugosa,* de l'*Asolanus camptotaenia,* etc...

Ce sont bien les caractères de l'assise d'Anzin dans le bassin houiller du Nord. Elle contient dans le Kent une quinzaine de veines, dont plusieurs de 2 m. d'ouverture.

---

(1) Il est à la profondeur de 2980 pieds à Oxney, 2500 pieds à Ripple, 1600 pieds à Walmestone.

IV. *Couches de Douvres.* — Nous désignerons ainsi les couches les plus élevées du bassin du Kent, exploitées à la fosse de Douvres, rencontrées par celle de Guildford, au nord de Douvres, et par les sondages de Ripple (entre 898 et 1900 pieds), d'Oxney (entre 850 et 2000 pieds), de Barfreston, Stonehall, Fredville, Maydensole, Waldershare, Ropersole, sous les morts-terrains. La partie inférieure de cette assise qui contient une dizaine de veines est exploitée par la fosse de Snowdown.

Sa faune, purement limnique, est tout à fait spéciale. On y remarque une grande fréquence de schistes bitumineux à Ostracodes, Spirorbes et *Anthraconya Phillipsi*, caractéristiques de l'assise de Bruay en France. M. Bolton y a découvert la *Leaia tricarinata* (¹), fossile des Upper Coal Measures. Il a décrit aussi un fort intéressant insecte : *Soomylacris Burri* (Barfreston) qui appartient à un groupe (les Hémimylacridiens) dont j'ai montré récemment la rigoureuse localisation dans les couches les plus élevées du Pas-de-Calais.

La flore étudiée par Arber, à *Nevropteris tenuifolia, N. rarinervis, N. Scheuchzeri, Aleth. Serbi*, est également très différente de celle des couches inférieures.

Tous ces caractères rappellent d'une façon frappante l'assise de Bruay, telle que nous l'avons définie dans le bassin du Pas-de-Calais.

J'ai résumé le parallélisme proposé entre la série houillère du Kent et celle du Pas-de-Calais sous forme du tableau page 109.

CONCLUSIONS

1°) On voit que les mêmes horizons fauniques se retrouvent dans la même succession, de part et d'autre du détroit ; que les couches inférieures (Ebbsfleet-Vicoigne) sont caractérisées par l'abondance des invasions marines, par une flore et une faune spéciales dont les espèces typiques sont communes aux deux bassins du Nord de

---

(¹) J'ai décrit en 1914, du bassin franco-belge, la forme *minima* de cette espèce, localisée dans l'assise de Vicoigne. La forme typique, de grande taille, se trouve en Angleterre dans les Farrington series (U. C. M.) ; elle constitue, avec *Estheria Simoni* Pruv., un type caractéristique du sommet du Westphalien.

Arber (1914)	Bolton (1915)	**Kent**	**Nord et Pas-de-Calais**
Transition C. M.	Upper series (Pennant et Farrington)	COUCHES DE DOUVRES (ép^r : 400 m. au moins)	ASSISE DE BRUAY (ép^r : 700 m.)
			— veine Omérine de Lens —
		COUCHES DE TILMANSTONE (ép^r : 350 m.)	ASSISE D'ANZIN (ép^r : 700 m.)
Middle C. M.	Lower C. M.	niveau marin de Mattice hill	— niveau marin de veine Poissonnière —
		COUCHES D'EBBSFLEET (ép^r : 200 m.)	ASSISES DE VICOIGNE ET DE FLINES (ép^r : 670 m. dans le Nord 300 dans le P. d. C.)
		schistes pyriteux d'Ebbsfleet	— ampélites de Bruille —
CALCAIRE CARBONIFÈRE			

la France et du Kent ; que les couches les plus élevées (Douvres-Bruay) offrent les mêmes caractères de fréquence des niveaux bitumineux à *Anthr. Phillipsi* et Spirorbes, la même absence des niveaux marins, la présence des mêmes espèces fondamentales d'animaux et de plantes ; qu'enfin, entre ces deux séries, s'en intercale une troisième (Tilmanstome-Anzin), dont les caractères paléontologiques, également nets, sont intermédiaires entre les précédents.

2°) Mais il faut remarquer que les deux assises ont dans le Kent une épaisseur (750 m.) beaucoup plus réduite que dans le Nord de la France (1300 m.). Ceci ramène l'épaisseur totale du terrain houiller du Kent à 1000 mètres environ, alors qu'on estime qu'elle en atteint le double dans le bassin de Valenciennes (¹). Ce fait n'est point pour nous surprendre, car il est reconnu actuellement que la puissance des assises inférieures du houiller (assise de Flines (H_1b), assise de Vicoigne), va en diminuant progressivement de la Belgique vers l'ouest et qu'à Bruay les couches de Vicoigne sont réduites à moins de 300 mètres, à la moitié de ce qu'elles atteignent à Vicoigne.

Cette réduction de puissance des faisceaux inférieurs explique pourquoi l'on avait admis jusqu'ici une importante lacune à la base des couches houillères du Kent. J'ai déjà indiqué en 1914 (²) que cette lacune, correspondant aux Lower C. M., était inattendue, puisque ces couches sont encore connues dans le bassin d'Hardinghem. L'étude paléontologique de M. Bolton est venue révéler leur existence dans le Kent. Ainsi, sous ce rapport, le terrain houiller du Kent se présente avec un développement des assises comparable à celui du Pas-de-Calais, les séries inférieures étant réduites, l'assise supérieure, au contraire, bien développée.

L'absence de grès d'Andenne bien caractérisé est aussi un fait qui se retrouve dans la région septentrionale du bassin du Pas-de-Calais, à Carvin par exemple.

3°) On voit, en examinant la carte ci-jointe (fig. 1), que les différentes assises se superposent du Nord au Sud formant le flanc nord du bassin ; mais au Sud le bassin est limité par un important accident qui met en contact le dévonien (sond. de Brabourne) et le houiller : la paroi sud de la cuvette est remplacée par une faille et le synclinal du Kent est un pli dissymétrique, à flanc méridional étiré, comme le sont tous les plis du bassin franco-belge.

La question de savoir dans quelle direction ce bassin se prolonge vers le continent a préoccupé bien des géologues. L'étude des sondages profonds exécutés en Flandre et en Artois, dont je ne puis que présenter ici brièvement les résultats, m'a conduit à cette conclusion que la dépression carbonifère du Kent n'est le prolongement, ni du bassin d'Hardinghem, ni du bassin de Campine (³). On sait que M. Ch. Barrois a montré que le bassin houiller du

---

(¹) M. H. Bolton a insisté justement (*op. cit.*, p. 53 sur la réduction en puissance des sédiments houillers dans le S. E. de l'Angleterre.

(²) P. Pruvost, Ann. Soc. géol. du Nord, t. XLIII, p. 96 (note infrap.).

(³) Voir Dr. A. Strahan, Nature, vol. XCVII (1916), p. 293.

Nord n'était pas une cuvette unique, mais un faisceau de plis synclinaux parallèles, au nombre de trois au moins. Ces plis conservent leur individualité sous les Flandres et l'Artois, quoiqu'ils n'y intéressent plus ordinairement que les terrains préhouillers, par suite du relèvement de l'axe d'ennoyage de la dépression westphalienne. Tandis que le bassin d'Hardinghem semble être la continuation du synclinal *médian* du Pas-de-Calais (synclinal d'Anzin), *le pli le plus septentrional* (synclinal de Carvin-Ostricourt) *se dirige au N. W. vers la ville de Calais* (¹), (sous le sol de laquelle la sonde a rencontré le calcaire carbonifère), *traverse le détroit et s'épanouit à nouveau dans le Kent.* Ceci nous explique la grande analogie entre les strates houillères inférieures du Sud-Est de l'Angleterre et celles de Carvin.

M. l'abbé Carpentier dépose un mémoire sur *La flore des environs d'Avesnes (Nord).* La Section nomme commissaires pour faire rapport sur ce travail MM. É. De Wildeman et V. Grégoire.

M. A. Renier signale la découverte *d'un échantillon remarquable de* Negaphyton *du Westphalien de Liége.*

M. l'abbé J. J. Kieffer (Bitche) communique à la Section la description de *Nouveaux Bethylides du Soudan égyptien.*

Le Musée Zoologique de Vienne m'a soumis un certain nombre d'Hyménoptères recueillis par M. le professeur R. Ebner, au printemps 1914, au Soudan égyptien. Les espèces suivantes sont nouvelles :

Epyris Ebneri, s. p. Noir brillant ; palpes, antennes, mandibules, genoux, tibia antérieur, extrémité des autres tibias et segments abdominaux 5 à 8, sauf la base du 5^{e}, roux. Tête subcarrée, à peine plus longue que large, plus large que le thorax, à dessus parsemé de points gros et assez nombreux. Yeux glabres, allongés, d'un tiers plus longs que leur distance du bord occipital.

(¹) Il est intéressant de constater que Marcel Bertrand, se basant sur l'allure des plissements de la craie, était arrivé à cette même conclusion à laquelle me conduit l'étude des sondages profonds. L'observation positive vient heureusement confirmer la méthode déductive brillante et féconde.

Mandibules amincies à l'extrémité en une dent très petite. Antennes se touchant presque à leur base, scape deux fois aussi long que gros, à peine pubescent, articles suivants beaucoup plus minces, 2-5 plus longs que gros, 6-13 graduellement plus longs. Pronotum presque trois fois aussi long que le mesonotum, ponctué comme la tête, mais moins densément. Mesonotum traversé par quatre sillons longitudinaux et parallèles, les deux médians élargis en arrière. Fossettes du scutellum petites et très éloignées l'une de l'autre. Segment médian avec cinq arêtes longitudinales et rapprochées, finement strié en travers, bord postérieur marginé. Aile hyaline, nervures et stigma roux, base du stigma blanchâtre ; radiale de moitié plus longue que la basale, celle-ci oblique ; transversale arquée, postmarginale nulle. Au tarse antérieur, les trois premiers articles sont munis d'appendices filiformes, dont l'externe, plus long, atteint l'extrémité de l'article suivant ; 2-4 subcordiformes ; crochets avec une grande dent au-dessus du milieu ; tibia intermédiaire brièvement spinuleux. L. ♀ 6 mm. — Soudan égyptien, près Kosli, 3 IV. Cette espèce, dédiée à M. le professeur Richard Ebner, est voisine de **E. Caffrarius**, auquel mène la Synopse que j'ai donnée de ce genre dans ma Monographie des Bethylides (*Tierreich,* vol. 4, Bethylidæ, 1914, p. 330).

Epyris œgyptius n. sp. Noir, brillant et lisse ; palpes, genoux et tarses pâles. Tète un peu plus longue que large. Yeux glabres, allongés, distants du bord occipital d'un peu moins de leur longueur. Ocelles en triangle, les postérieurs atteignant presque le bord occipital, plus distants l'un de l'autre que de l'antérieur. Mandibules courtes. Antennes brun noir, scape égalant les articles 2 et 3 réunis et à peine plus gros qu'eux, ceux-ci à peine plus longs que gros, 4-13 allongés ; pubescence très courte. Dessus du thorax très finement chagriné ; pronotum un peu plus long que le mesonotum, celui-ci transversal, sillons parapsidaux parallèles, à peine élargis en arrière. Fossettes du scutellum très distantes l'une de l'autre. Segment médian pas plus long que large, à arète longitudinale unique et médiane. Tarse antérieur sans appendices. Aile hyaline, nervures jaunes, basale et transversale également obliques, radiale trois fois aussi longue que la basale, postmarginale nulle. — L. ♂ 2 mm. — Soudan égyptien, Sennar, 25-27. II.

Arysepyris niloticus, n. sp. Roux clair, brillant ; antennes et pattes jaune pâle, abdomen noir, bord postérieur du 2e tergite roux brun. Tête presque deux fois aussi large que le thorax, à peine plus longue que large, subarrondie en arrière, graduellement et faiblement élargie en avant ; bord antérieur tronqué, portant à chaque angle une mandibule arquée, atteignant au moins les deux tiers de la longueur de la tête, mince, élargie à l'extrémité qui est tronquée et armée de cinq dents, dont l'inférieure la plus longue. Palpes maxillaires ayant trois articles après la flexion, les labiaux avec un article après la flexion. Yeux glabres, un peu allongés, distants du bord occipital de deux fois leur longueur. Ocelles et joues nuls. Antennes graduellement un peu assombries distalement, scape à peine plus gros que le flagellum, égalant les deux articles suivants réunis, 2e article plus de deux fois aussi long que le 3e, mais pas plus gros, 3e aussi long que gros, 4-13 allongés. Pronotum allongé, lisse, pas distinctement aminci en avant, plus de deux fois aussi long que le mesonotum. Celui-ci très transversal. Scutellum à sillon transversal très fin. Segment médian quadrangulaire, aussi long que le pronotum, très finement strié en long, marginé finement sur les côtés et en arrière, sans arête longitudinale. Aile remplacée par un lobe très court, blanchâtre, dépassant à peine le scutellum. Fémurs un peu grossis, articles du tarse antérieur allongés, tibia intermédiaire non spinuleux. Abdomen graduellement aminci en pointe, 2e tergite à peine plus court que le 3e. Diffère de tous les congénères par les yeux non pubescents. L. ♀ 3 mm. — Soudan égyptien : Khartum, 14-16. II.

Propristocera ægyptia n. sp. Noir, brillant, mandibules et antennes jaune roussâtre, flagellum parfois jaune brunâtre, pattes jaune pâle, bord postérieur du 2e tergite et côtés du bord postérieur des deux suivants, roux. Tête à peine plus longue que large, densément et grossièrement ponctuée. Yeux glabres, allongés, distants du bord occipital de leur demi-longueur. Ocelles en triangle équilatéral, les postérieurs aussi distants l'un de l'autre que de l'antérieur. Mandibules étroites, découpées obliquement à l'extrémité et terminées par une petite dent. Clypeus caréné. Antennes graduellement amincies, presque glabres, 2e art. un peu transversal, 3-13 presque deux fois aussi longs que gros ou davantage. Thorax un peu plus étroit que la tête. Pronotum graduellement élargi en arrière, un peu plus long que le mesonotum, tous deux ponctués comme la tête. Sillons parapsidaux parallèles, graduellement effacés en arrière. Scutellum faiblement ponctué, à sillon transversal droit et très fin. Segment médian non marginé, un peu allongé, avec une arête médiane dans ses deux tiers antérieurs. Aile hyaline, nervures pâles et jaunâtres ; basale séparée du stigma de presque toute sa longueur, radiale un peu plus longue que la postmarginale, plus de deux fois la basale, nervure sortant de la transversale visible seulement par transparence. Fémurs non grossis, crochets tarsaux simples. Abdomen plan, en ellipse, 2ᵉ tergite avec un sillon médian à sa base. — L. 3-3.5 mm. — Soudan égyptien : Dilling Gulfan, 22-23. III, 10 ♂. C'est le premier représentant de ce genre pour l'Afrique.

Sclerodermus pictiventris n. sp. ♀ aptère. Jaune pâle, brillant ; antennes brunâtres, sauf les deux premiers articles, tergites 2-4 ayant au bord postérieur, de chaque côté, une tache transversale d'un noir profond. Tête quadrangulaire, un peu plus longue que large. Yeux touchant presque les mandibules, distants du bord occipital de deux fois leur longueur. Ocelles nuls. Article 2ᵉ des antennes plus long que le 3ᵉ, les suivants un peu transversaux, sauf le dernier. Pronotum un peu plus long que le mesonotum, celui-ci au moins aussi long que large, arrondi en arrière. Scutellum nul. Segment médian aussi large que le mesothorax et un peu plus long. Abdomen long, graduellement en pointe. — L. 3 mm. ♀ ailée. Ocelles noirs, se touchant presque. Mesonotum transversal. Scutellum bien formé. Aile atteignant le milieu de l'abdomen, mal conservée. Quant au reste, semblable à la ♀ aptère. — L. 2.5 mm. — Soudan égyptien : Dilling, 21.-22. III.

Les débuts de nos connaissances sur les failles de refoulement du Hainaut font l'objet de l'étude ci-dessous de M. le professeur X. Stainier.

De nos jours, nous sommes familiarisés avec les grands phénomènes de refoulement et de fracture qui accompagnent la formation des chaînes de montagnes. Nous savons depuis longtemps que c'est à eux que nous devons les faits de superposition anormale qui de longues années ont intrigué et divisé les charbonniers belges les rencontrant dans leurs recherches et leurs exploitations. Tout cela nous paraît maintenant simple, facile et logique. Un peu de réflexion nous montre cependant que ces faits s'écartent tellement de la normale et sont la résultante de péripéties si compliquées que leur origine réelle ne pouvait sauter aux yeux des praticiens, ni même des géologues, et l'on s'explique dès lors leurs divergences d'opinions et la longueur du temps qu'il a fallu pour arriver à expliquer convenablement ces superpositions extraordinaires. On a déjà exposé brièvement l'historique des phases par lesquelles ont passé, chez les géologues, les idées sur les failles de refoulement et les lambeaux de poussée des bassins houillers franco-belges. Mais il m'a paru intéressant d'exposer, parallèlement, l'évolution des idées, sur le même sujet, dans le monde des praticiens, des charbonniers. La présente note qui n'est qu'une première tentative dans cette voie, constituera un document pour l'histoire si attrayante du développement de l'esprit humain.

Malheureusement, comme tout le monde sait, les praticiens ont une déplorable habitude, c'est de ne jamais consigner par écrit les innombrables observations de faits instructifs qu'ils rencontrent si fréquemment au cours de leurs travaux. Encore moins songent-ils à les publier. Ce n'est le plus souvent que par raccroc que l'on trouve un bout de phrase, un plan ou une coupe où ils ont noté ces observations. Encore plus rarement trouve-t-on les réflexions et les déductions que ces observations leur ont suggérées. Nous ne pouvons donc présenter qu'un exposé très fragmentaire, avec l'espoir que d'autres nous aideront à combler les lacunes de ce premier essai.

Pour une foule de raisons, dont l'exposé n'est pas de mise ici, c'est dans le Borinage que l'exploitation houillère a pris le plus d'ampleur. C'est là aussi que se sont formées les exploitations les plus puissantes et qui ont laissé le plus d'indications écrites. Rien d'étonnant donc que ce soit sur cette région que nous ayons les renseignements les plus complets. L'exploitation a commencé, dans le Hainaut comme ailleurs, là où les couches de houille venaient affleurer. Quand on s'est étendu de proche en proche, on a bien vite remarqué que les couches s'enfonçaient sous les dépôts meubles ou semi-cohérents, stériles, que nos mineurs ont appelés morts-terrains. D'autre part, les exploitations poursuivies sur le bord Nord du bassin montrèrent bientôt que le houiller repose sur du calcaire que l'on appelle dans tout le Hainaut, depuis une époque qui m'est inconnue, « le canistaille ». Nos mineurs étaient dès lors en possession du fait fondamental de la stratigraphie houillère. Mais par le progrès des exploitations ils ont dû bien vite remarquer aussi, que, sur le bord Sud du bassin, le même calcaire repose sur le houiller, en certains endroits, tandis que dans d'autres, ce sont des grès et des schistes bien différents des morts-terrains habituels qui reposent sur le houiller. Enfin ils durent voir aussi que des lambeaux de ces roches calcareuses se trouvent même en plein bassin houiller, comme cela se remarque dans les massifs que nous appelons aujourd'hui massifs de Boussu et de La Tombe.

A quelle époque nos mineurs ont-ils fait pour la première fois ces constatations et qu'en ont-ils pensé ? M. G. Decamps qui, comme on le sait, a fouillé avec une admirable patience les archives du Borinage et des régions voisines, dit dans son mémoire (¹) : « Les travaux avaient constaté l'existence de quelques crans, entre autres de ceux dits Pierre-Sault et Donnaire ; des fouilles sur Boussu firent rencontrer l'énorme massif de calcaire qui s'y trouve ; la brusque interruption des veines par la faille du Midi n'était pas inconnue. Ces accidents qui ont tant exercé les recherches de nos ingénieurs, furent considérés par nos anciens mineurs, tantôt comme des affaissements de terrains résultant des travaux de leurs devanciers, tantôt comme des endroits stériles, ne renfermant la houille et les roches bitumeuses qu'à de très grandes profondeurs. »

Il est bien regrettable que G. Decamps ne donne aucun détail sur les endroits ni sur les dates de ces découvertes des mineurs borains. Nous aurions eu certainement là matière au premier et probablement au plus intéressant chapitre de notre travail. Espérons que cette lacune sera comblée plus tard. La première mention que nous avons trouvée de la Grande faille du Midi ne

---

(¹) Decamps G., *Mémoire historique sur l'origine et les développements de l'industrie houillère dans le bassin du Couchant de Mons (Hainaut)*. Mémoire couronné par la Société des Sciences, des Arts et des Lettres du Hainaut en 1877, t. I, p. 130.

remonte qu'à 1777. La Société qui s'était formée à Aniche (Nord) pour la recherche du charbon, se remémorant sans doute que le charbon avait été découvert à Anzin, par le Baron Desandrouin, en se basant sur le principe de la continuité en direction des bassins houillers, fit faire, par le sieur Laurent, une carte des veines des fosses à charbon du Hainaut, autrichien et français... et de leur direction, depuis Charleroi jusqu'à Monchecourt, moyennant 48 écus, qu'il avait demandés pour cette opération. Ce travail était destiné, très judicieusement, à déterminer convenablement le meilleur emplacement pour une nouvelle fosse. Cette carte fut vérifiée par Castille, architecte (!), et celui-ci, en 1777, dressa une nouvelle carte, qui est reproduite dans l'ouvrage suivant de E. Vuillemin auquel nous avons emprunté (p. II) les renseignements qui précèdent : *Les Mines de houille d'Aniche*, in-8°, Paris, 1873, Dunod, 1 atlas de pl. Sur cette carte (pl. III) on lit parmi des observations en forme de légende, la suivante : « Il y a aussi vingt-deux veines à Elouche (Elouges), il s'en trouve plus au midy qu'au nord qui setendent d'environ une demie lieu. On observe que le grumant ou crant se fait un peu au dessus du moulin d'Élouche occasionné par les carrières de grais qui s'exploient à Wiery (Wihéries) ce qui rejette les veines plus au nord ». Le mot «grumant» est sans doute une corruption du mot «ruement» employé jadis pour désigner, au Borinage, les failles avec rejet. Comme on le voit d'après cette note, l'existence de la faille du Midi était connue et notoire, puisqu'on se contente de l'appeler le crant. On savait aussi que le rejet était dû à l'influence des grès exploités à Wihéries et que le rejet se faisait vers le Nord. Enfin on avait déjà constaté l'avancée si remarquable que la faille du Midi fait vers le Nord, au midi des charbonnages Unis-de-l'Ouest de Mons, avancée qui atteint son maximum aux environs du moulin d'Elouges. Le texte n'est pas assez explicite pour nous apprendre si les Anciens savaient que les veines se poursuivent sous le grès de Wihéries, ou si, comme le texte semble l'indiquer, le grès refoule et rejette les veines vers le Nord. C'est cette dernière opinion, d'ailleurs inexacte, que l'auteur doit avoir eue en vue. En effet, assez longtemps après, les idées semblent avoir fait un pas en arrière. Je possède une carte topographique des communes de Thulin, Elouges, Montrœul, Audregnies et Wihéries dressée par le géomètre

F. Sartiau d'Elouges, non datée, mais faite durant la période française Elle représente les couches méridionales des concessions de Longterne et de la Grande Veine marchant parallèlement au canistaille formant le bord Sud du bassin et s'avançant donc vers le Nord au droit de l'avancée de la faille à Elouges. Sur les deux coupes annexées à cette carte on voit le canistaille décrire, parallèlement à la dernière couche, le grand Bouillon, les mêmes plissements que celle-ci. Ce géomètre n'avait donc aucune connaissance de la faille, ni du fait que les couches en question, au lieu de s'avancer au Nord, conservent leur direction moyenne Est-Ouest pour venir passer sous la faille du Midi. Cette ignorance n'est pas un fait isolé. Dans la région de Dour, où le recouvrement de la faille du Midi existe bien marqué, se trouvait depuis 1786 un charbonnage, celui de Tapatout-Daubresse, qui fut frappé de déchéance en 1805, et repris plus tard par la Société de Bellevue-Baisieux. Je possède une vieille coupe de ce charbonnage non datée, mais qui d'après le texte de la légende doit remonter à l'origine du charbonnage. Elle représente toutes les couches jusqu'à la dernière sans aucun recouvrement par la faille du Midi qui n'est d'ailleurs pas indiquée. Cependant cette coupe passe par le moulin de Dour, donc dans une région où le recouvrement par la faille existe. On peut se demander comment on avait déjà avant 1775 des idées exactes sur la faille du Midi en Belgique, à Aniche, alors que les mineurs belges de la localité semblent l'ignorer. Voici comment nous pouvons expliquer cette anomalie. L'activité des mineurs belges paraît s'être surtout portée dans la région de Dour où, entre la faille du Midi et le houiller, s'intercale un lambeau de poussée en calcaire carbonifère. Les mineurs borains avaient certainement connaissance du fait que, sur le bord Nord du bassin, ce calcaire forme le soubassement stérile du houiller. Ils avaient donc de bonnes raisons, en apparence, pour ne pas faire de recherches inutiles dans cette direction. Au contraire, il semble que depuis longtemps la région à l'Ouest d'Elouges ait été prospectée par des Français, vu sans doute son rapprochement de leur pays. Dès 1775, deux sociétés belges avaient bien obtenu du seigneur d'Audregnies la concession des mines existant dans cette région, les Stés de l'Avant-garde et de Belle-vue, mais la première seule exécuta des travaux au Sud. Sa fosse Avant-garde recoupa le houiller à 70 m. sous les morts-terrains et, comme elle est à une certaine distance au Nord de l'affleurement de la faille, ses travaux ne semblent pas avoir rencontré cette faille. Mais déjà auparavant la Société française bien connue, dite William Turner, qui s'était formée à Valenciennes en 1746 pour l'exploitation de la houille en Belgique, avait entrepris des travaux un peu au Nord de la faille du Midi, des deux côtés de la chaussée de Brunehault, sur Baisieux, notamment la fosse Lagace. D'après la carte précitée de Castille, des Français exploitaient également une fosse à proximité d'Elouges (moulin). Puis en 1781 une autre Société française dite Devignes (peut-être apparentée avec les associés de la Société d'Aniche portant le même nom) vint faire des recherches tout contre la faille du Midi, au même point que la Société Turner, et y ouvrit notamment les fosses St-Martin et Ste-Marie. Un peu au Sud de ces fosses, une autre fosse, appelée l'Ortie, et dont nous ignorons la date et les auteurs, recoupa le dévonien inférieur de 35 à 50 mètres, puis pénétra dans le houiller. C'est sans doute grâce à ces travaux que les Français étaient, même avant la fin du XVIIIe siècle, si bien renseignés sur l'existence et les allures de la faille du Midi entre la frontière et Elouges.

Nous n'avons parlé, jusqu'à maintenant, que de la faille du Midi. Mais l'existence du massif de Boussu était connue au moins dès le XVIIIe siècle, ainsi que son affleurement le long du ruisseau de Hanneton. Nous possédons une copie de la légende d'une très vieille coupe décrivant, du Nord au Sud, les couches et les fosses existant sur les territoires de Boussu et de Dour. La description commence par ces mots : « Bleuses querelles (canistelles) au jour ». Lorsque la puissante société d'Anzin entra en possession du charbonnage du Nord du Bois de Boussu, vers la fin du XVIIIe siècle, douée de l'esprit de recherche, elle commença immédiatement des travaux d'exploration. Elle ouvrit les fosses St-Pierre et St-Paul, au Nord de la route de Mons à Valenciennes. La dernière, foncée en 1775, recoupa le calcaire de Boussu à 33 m. Plus tard furent foncées les fosses dites de la Maison-Rouge et des Grands Arbres, en 1799, au Sud et près de la même route, qui sont indiquées comme ayant recoupé le houiller et le calcaire. Mais, d'après les constatations faites plus tard, il est certain que les Anciens ont pris pour du houiller le schiste silurien du massif de Boussu (¹). Enfin le calcaire fut encore recoupé, à la fosse Magotte N° 2, le long de la route d'Elouges à Thulin et au Sud des précédentes. Peut-être cette fosse, qui se trouve sur le biseau terminal du calcaire, a-t-elle rencontré le houiller sous ce biseau peu épais, comme le fit plus tard la fosse Sentinelle.

Les recherches que les princes d'Arenberg firent à diverses reprises dans la baronie de Quiévrain, en 1610-1616, puis en 1653 et en 1670 (cf. G. Decamps, *op. cit.* p. 380), et qui aboutirent à la découverte du charbon, eurent-elles pour conséquence de fixer les rapports de position du houiller avec le massif de Boussu au Nord et la faille du Midi au Sud ? Faute de renseignements sur ces recherches, nous l'ignorons.

Si l'on met à part la brève description de la faille du Midi de Castille, on voit que le rôle du XVIIIᵉ siècle s'est borné à la constatation des faits, sans aucune tentative pour les expliquer. Il était réservé au siècle suivant, d'aborder ce problème et de le résoudre.

D'après le Mémoire historique et descriptif du bassin du Couchant de Mons de G. Arnould, p. 149, dès le commencement du XIXᵉ siècle, des exploitations furent faites, sur le territoire de Baisieux, sous les grès dévoniens, que les anciens mineurs désignaient sous le nom de canistels.

Le creusement de la fosse Sentinelle du Nord-du-Bois-de-Boussu en 1827, fournit une donnée de la plus haute importance sur le massif de Boussu, car elle traversa le calcaire de ce massif pour pénétrer ensuite dans le houiller. C'est ce fait qui permit à l'ingénieur en chef du district de Mons, M. Chèvremont, de fournir à d'Omalius d'Halloy les renseignements que ce dernier inséra, en 1828, sur ce massif, dans ses *Mémoires pour servir à la description géologique des Pays-Bas* etc., renseignements en partie inexacts, comme la suite l'a prouvé. Chèvremont les reproduisit plus tard, rectifiés, dans la description du bassin houiller de Mons qui figure dans le DICTIONNAIRE GÉOGRAPHIQUE DE LA PROVINCE DE

(¹) Ces avaleresses sont décrites dans le travail cité de G. Arnould qui donne des chiffres et des dates différents de ceux ci-dessus. Empruntés à des sources officielles, ils sont vraisemblablement plus exacts.

Hainaut édité en 1836 par Vandermaelen. (Cf. p. 66). Il y signale l'analogie du calcaire de ce massif avec le calcaire ancien que l'on rencontre au Nord et au Sud de la formation houillère; mais, très sagement, il note qu'on n'a pas assez examiné ses fossiles pour en déterminer l'âge avec précision.

Mais ce fut surtout lors de la fièvre de recherche que suscita la prospérité charbonnière des années 1837 et suivantes, que les découvertes se multiplièrent. Il en fut de même dans les périodes prospères qui suivirent. Comme le rappelle G. Arnould, en 1838 les fosses N° 6 et N° 8 de Tapatout (Belle-Vue) furent poursuivies, à travers le dévonien, jusque dans le houiller, et des exploitations furent poussées sous la faille, jusque 200 m. au premier puits, et près de 400 m. au second. Il en fut de même au puits N° 2 du même charbonnage, ensuite au puits N° 1 de Longterne-Ferrand à Elouges. Par ce dernier puits, une exploitation considérable a été pratiquée sous la faille peu inclinée en cet endroit. L'existence de ces faits n'était pas inconnue à André Dumont. En effet, dans ses notes de voyage sur la planchette de St-Ghislain (note 1747 rouge correspondant à la période de voyages (1848-1854), il indique qu'au puits N° 3 du charbonnage de la Grande Veine du Bois d'Epinois on a percé, avant d'arriver au houiller, 20 m. de terrain semblable à celui de Wihéries et dont les stratifications étaient moins inclinées que celles du houiller.

Dumont n'ignorait pas non plus l'existence des travaux qui, avant lui, avaient traversé le massif de Boussu. En effet, dans le travail célèbre qu'il a consacré à l'étude de ce massif (*Mémoire sur le terrain rhénan,* p. 488) il parle des découvertes faites dans l'avaleresse du puits Sentinelle, ou P. N° 5. (Cf. notes de voyage de la pl. de St-Ghislain N° 1544 bleu (1836-1841). On sait comment Dumont fut amené à étudier le massif de Boussu. Le 10 mars 1834 Lefèvre-Meuret avait fait commencer sur le territoire de Thulin une fosse qui dans les archives du charbonnage porte invariablement le nom d'avaleresse de Thulin, mais que les géologues, par erreur et à la suite de Dumont, ont appelée le puits du St-Homme, nom qu'elle n'a jamais porté. Dans le pays et encore à l'heure actuelle on l'appelle la fosse l'Alger, du nom du cabaret à côté duquel elle fut foncée. L'avaleresse avait été poursuivie jusque 110 m. dans des roches inconnues non déterminées sur les plans, puis fut abandonnée. Quand le charbonnage de Bellevue fut racheté par la Société Générale, l'avaleresse fut reprise et la rencontre des roches anormales amena la Société à demander l'avis du célèbre géologue. Le travail précité est la copie presque littérale du rapport qu'il remit à la Société, le 20 mai 1844. L'année précédente on avait aussi entamé, au Nord du puits Vedette, l'avaleresse du puits N° 10, ou Avant-Garde, qui ne put traverser le massif de Boussu et resta arrêtée dans le calcaire. (Cf. Arnould, p. 172). Le travail de Dumont (¹) est trop connu pour qu'il soit nécessaire d'en parler ici.

Nous nous bornerons aux remarques suivantes : Pour la première fois, depuis que les failles de refoulement étaient connues, nous trouvons dans le travail de Dumont, une description géologique d'un caractère scientifique sérieux. Pour la première fois aussi les roches recoupées sont reconnues et déterminées et l'on constate le fait capital que les terrains du massif de Boussu sont en position complètement renversée. De plus, il admet que le massif de Boussu repose sur le houiller, puisqu'il essaye de calculer la profondeur à laquelle ce houiller serait atteint si l'on approfondissait le puits. Enfin il démontre que ce massif est en stratification discordante (il ne prononce pas le mot de faille que nous employerions aujourd'hui au lieu de discordance) avec le houiller qui existe au Midi du massif. Il signale cependant cette superposition anormale comme due à des dislocations. Quoique Dumont connût alors l'existence de la faille eifélienne dans le bassin de Liége, la faille du Midi, dans le Borinage, et la faille de Boussu, il ne tente aucune généralisation ni aucune explication des recouvrements anormaux qu'elles produisent et qu'il connaissait. On a voulu en faire un reproche à Dumont. Nous trouvons qu'il a agi sagement. Toute idée nouvelle doit venir à son heure. Cela est

---

(¹) On ignore généralement qu'avant d'avoir été appelé par la Société générale à étudier l'avaleresse du St-Homme, A. Dumont s'était déjà, je ne sais pourquoi, occupé de la région où se trouve le massif de Boussu. En effet, je possède une affiche d'une demande en concession de mines de houille sur les territoires de Quiévrain, Hensies, Montrœul et Thulin qu'il avait formée, de commun accord avec John Cockerill, le 8 janvier 1838, et dont la députation permanente du Hainaut ordonna l'affichage par arrêté du 20 janvier, même année.

surtout vrai d'une idée qui aurait semblé si invraisemblable à ses contemporains, s'il avait pu trouver l'explication de ces anomalies. Pour la gloire de Dumont je suis heureux qu'il n'ait pas émis d'explication. En voyant l'absence presque complète de base sérieuse aux calculs qu'il établit pour déterminer la profondeur du houiller au puits St-Homme, je suis convaincu que Dumont n'avait pas saisi les faits indispensables pour arriver à la compréhension du phénomène. Il ne dit pas un mot notamment de ce qui se passe sur le bord Nord du massif de Boussu. De son temps les explorations sur ce bord Nord faisaient totalement défaut et ne commencèrent guère qu'après sa mort.

Pendant que ces travaux se poursuivaient dans le Borinage, nous allons voir intervenir pour la première fois dans le problème le pays de Charleroi. Dès le début du siècle, des puits avaient été foncés par le charbonnage de Forte-Taille dans l'anse de Jamioulx, dans le houiller situé entre la faille du Midi et le lambeau de poussée de La Tombe, c'est-à-dire dans une position identique à celle des charbonnages borains au S.-O. de St-Ghislain. Un de ces puits, appelé Junon, avait déjà en 1808 percé le calcaire de La Tombe et exploitait le houiller en dessous. Puis des galeries d'écoulement furent creusées et les exploitations se poursuivirent au Sud jusque sous la faille du Midi, sans que nous puissions fixer la date à laquelle ce dernier fait se produisit d'abord ; mais il est certain dès 1843. En 1826 le propriétaire de Forte-Taille, M. Cossée, poursuivit ses recherches de l'autre côté de la Sambre, à Landelies. Ces travaux et la demande en concession qui s'ensuivit, donnèrent lieu à un rapport extrêmement intéressant de M. l'ingénieur Brixhe adressé au collège des États-Députés du Hainaut le 30-4-1827 et conservé aujourd'hui dans les archives de l'administration des mines à Charleroi (N° 628). Vu son intérêt, nous donnerons l'extrait suivant de ce rapport : « Le terrain qui fait l'objet de la demande en concession formée par le Sieur Cossée présente pour la géologie du 2e district des mines le plus haut intérêt. Le bassin houiller de la Sambre se trouve divisé, vers Montigny-le-Tilleul, par un cap de calcaire ressortissant à la bande calcaire de Leernes et de Fontaine-l'Évêque et dont le sommet se trouve à la butte connue sous le nom de Tombe de Marcinelle. De ce point, la plus grande largeur du terrain houiller remonte la Sambre en côtoyant, à 1500 m.

environ le calcaire, sur la rive droite jusqu'au Monceau où elle prend la direction O-O-N...... L'autre partie est comprise au Sud de ce cap et est adossée, jusqu'à Jamioulx, à une seconde suite et plus étendue de roches calcaires. Celles-ci paraissent se terminer en cet endroit et le terrain houiller, à Montigny, est limité au Sud par des roches de grauwacke commun et schisteux alternant...... Le gisement des mines est très régulier, sur leur direction, mais il est à observer qu'au lieu de s'enfoncer comme celles des houillères au Nord du cap calcaire, elles plongent au Nord de manière qu'elles paraîtraient en quelque sorte *pouvoir exister sous celui-ci.* Il ne paraît pas que l'on ait antérieurement aux travaux de M. Cossée tenté des recherches de houille sur ce territoire (Landelies), les roches calcaires et celles de grauwacke se rencontrant dans une si courte distance du Nord au Sud qu'il paraissait impossible qu'un gisement houiller puisse s'y trouver...... Le Sieur Cossée ouvrit une fosse de recherche à peu près au centre du village de Landelies...... et découvrit à 12 aunes environ de profondeur deux des veines qu'il exploite à la rive droite de la Sambre...... Dès lors, on peut supposer avec probabilité que le cap calcaire dont j'ai parlé plus haut, ne serait qu'une île calcaire. En effet le schiste houiller est reconnu dans la ville de Binche et au village d'Épinois et ce gisement ferait supposer une liaison avec celui de Landelies et de Charleroi. Le terrain tertiaire qui couvre tout ce canton et les nombreuses sources qui y affluent peuvent être les seuls motifs qui ont arrêté, jusqu'à ce jour, les découvertes dans cette vaste étendue...... » Il est inutile, je pense, d'insister sur l'exactitude des descriptions de M. Brixhe, sur l'audace et le bien-fondé des vues qu'il émet et qui, après avoir été oubliées pendant près d'un demi-siècle, ont reçu plus tard d'éclatantes confirmations. Il est bien probable que si l'on pouvait dépouiller les anciens rapports des ingénieurs des mines qui ont été appelés à étudier les superpositions anormales dont nous avons parlé plus haut, il est probable, dis-je, qu'on y trouverait plus d'une idée lumineuse cachée et oubliée dans les cartons administratifs, comme l'était le rapport de M. Brixhe.

Après tous les travaux dont nous avons parlé, une nouvelle période s'ouvre en Belgique, pour l'étude de nos gisements houillers. Le développement que prit dès le début de l'Indépendance belge l'établissement géographique de Ph. Vandermaelen, allait mettre à la disposition des techniciens le moyen de concrétiser et de répandre leurs connaissances par le précieux intermédiaire des cartes et des coupes que cet établissement allait produire avec une profusion admirable. Aussi voyons-nous apparaître bientôt, surtout dans le Hainaut, des cartes et des coupes des bassins houillers. Malgré l'absence d'une étude d'ensemble sur ces cartes et malgré l'imprécision qui règne encore sur la date de leur publication, nous allons examiner ce que nous apprennent, sur le sujet quinous occupe, les principales d'entre elles.

La première, et aussi de loin la meilleure, est la carte des concessions houillères du couchant de Mons au 1/10000 dressée par Ph. Vandermaelen avec le concours de divers ingénieurs et notamment de Emm. Plumat et de César Plumat pour le tracé des couches. Cette carte en six feuilles, avec deux coupes transversales en quatre feuilles, est datée du 1-8-1849. Ces cartes sont peu intéressantes pour notre sujet, car elles font absolument abstraction du bord du bassin et du recouvrement du houiller par le calcaire et le dévonien au S.-O. du Borinage.

Par contre, la coupe passant par les puits Vedette et N° 6 de Tapatout-Bellevue, signée par César Plumat, est des plus intéressantes. Disons d'ailleurs que C. Plumat, alors directeur du charbonnage du Nord du Bois de Boussu, était à bonne source pour avoir des renseignements sur les recherches faites tant dans le massif de Boussu que sous la faille du Midi. Il ne parle pas de cette dernière et ne la figure pas, mais il représente très correctement la fosse Tapatout N° 6 traversant un mince biseau de calcaire anthraxifère, puis pénétrant dans le houiller qui s'étend loin au Sud sous la surface inférieure peu inclinée de ce calcaire. Quant au massif de Boussu, il le représente aussi bien qu'on pouvait le faire alors, c'est-à-dire peu épais et dessinant un bassin dont les couches les plus anciennes occuperaient le centre. Mais ce qui est capital, c'est qu'il montre le massif complètement isolé au centre du bassin dont il épouserait l'allure. Cette figuration, qui est la bonne, est ici en avance très notable sur ses contemporains et n'a revu le jour que bien des années après. A la suite de Dumont il avait reconnu que le bord Sud du massif est séparé du houiller par une faille, qu'il représente et qu'il continue en profondeur, en dehors du massif de Boussu. Mais cette prolongation qui a été remise plus tard en question par d'autres et n'est disparue de nos coupes que près de quarante ans après, il la considérait comme hypothétique, car il ne la poursuit qu'en pointillé ; de même qu'il montre, aussi en pointillé, le houiller au delà se poursuivant au Nord, comme si la faille n'existait pas. Mais ce n'est pas tout ; une légende accompagne la coupe, et C. Plumat y donne pour la première fois une explication se rapprochant singulièrement de celle qui est adoptée de nos jours et, en tous cas, considérablement plus rationnelle que nombre d'hypothèses émises après lui. Nous transcrivons ici cette notice : « Le terrain anthraxifère peut se trouver au milieu du terrain houiller par deux causes : le soulèvement ou le transport. Dans le premier cas le bassin houiller serait coupé en deux à une distance assez grande de la fosse Vedette du charbonnage du Nord du Bois de Boussu pour que le terrain anthraxifère ait pu se replier sur le terrain houiller dans un ordre inverse. La pointe de ce terrain se trouve à 100 m. environ au N. de la fosse Vedette susdite. Son inclinaison à la surface est de 35° à 40° vers le Nord... Mais dans l'avaleresse N° 10 du même charbonnage l'inclinaison est beaucoup moins rapide et semble, en quelque sorte, vouloir suivre l'allure du bassin houiller. Aucun indice de soulèvement n'a été aperçu, jusqu'à ce jour, dans les exploitations en plateure jusqu'en dessous de la pointe de ce terrain à la fosse Vedette qui est actuellement à la profondeur de 380 m. Si cette hypothèse est vraie, le bassin houiller serait interrompu et la partie du Midi formerait un bassin séparé de celui reconnu par la fosse de Sirault au Nord. Dans le second cas, le bassin houiller n'aurait pas d'interruption, et n'en formerait qu'un avec celui reconnu à Sirault. Ce terrain anthraxifère formerait un bassin superposé à celui du terrain houiller, il aurait été amené probablement du Midi où on le voit encore à la fosse N° 6 de Tapatout (Bellevue), recouvrant l'extrémité méridionale du bassin houiller. En allant vers le couchant, cette partie du terrain anthraxifère paraît s'avancer sur le terrain houiller et il n'y aurait rien d'étonnant que vers Baisieux ou Quiévrain il se rejoindrait avec celui reconnu au milieu du bassin par les fosses N^os^ 5 et 10 du charbonnage du Nord du Bois de Boussu et celle du Saint-Homme du charbonnage de Belle-Vue. » A l'heure actuelle, il n'y aurait rien à redire à cet exposé du problème. Nous pourrions seulement être plus précis et plus affirmatifs. Pour marquer qu'il est partisan de la seconde hypothèse, qui est la bonne, Plumat a tracé sa coupe d'après cette hypothèse. C'est donc à lui que revient, incontestablement, l'honneur d'avoir émis le premier l'idée audacieuse que le massif de Boussu avait été transporté du bord Sud du bassin au point où il se trouve aujourd'hui.

La carte charbonnière du Bassin de Mons, par L.-J. Cavenaile, éditée en 1854 par F. Desterbecq à Bruxelles, est en quatre feuilles de plans et avec treize coupes sur six feuilles et demie, le tout à l'échelle du 1/20000. Nous l'examinerons au point de vue du massif de Boussu et de la faille du Midi. En ce dernier point, elle marque une amélioration sur la précédente. En effet, depuis Binche jusque Eugies, l'auteur figure le bord S. du bassin constitué par le canistaile et marchant parallèlement à la dernière veine du bassin. Mais à l'O. d'Eugies il montre ce bord coupant successivement les faisceaux inférieurs du houiller jusqu'à celui de Grande Veine l'Évêque et s'avançant au N.-O. jusque dans le Bois d'Épinois, puis redescendant au S.-O. jusqu'à la frontière. Les ondulations qu'il fait décrire à ce bord Sud de Dour et d'Élouges montrent qu'il le connaissait parfaitement, grâce peut-être à des renseignements perdus aujourd'hui. Dans son idée, cette allure anormale du bord S. impliquait bien le recouvrement du houiller par ce bord, car il poursuit, en pointillé, le tracé des couches recouvertes, continuant leur direction régulière, et à côté de l'une d'elles il ajoute : Veine de la croix, emportée par le terrain calcaire. Il représente cette veine, la plus inférieure, comme se poursuivant jusqu'à 1500 m. au Sud sous le bord du bassin en affleurement. Il donne les emplacements des fosses creusées au Sud du bord et dont l'une n'est pas à moins de 320 m. du bord, montrant que les mineurs n'hésitaient pas à aller rechercher le houiller à cette grande distance. Il savait aussi que l'inclinaison du bord renversé sur le houiller variait. En effet, sur ses coupes on voit ce bord incliné à environ 70° près de la frontière. Au contraire, sous le cap que le bord décrit au Nord, à Dour et à Élouges, il représente ce bord peu incliné au Sud. (Voir coupe N° 4). Chose curieuse, dans cette coupe, il représente au-dessus du canistaile du bord Sud un bassin plissé concordant avec le canistaile et très limité, avec l'indication : Gros (faute d'impression pour grès) de Wihéries.

Le résultat des travaux de A. Dumont était donc inconnu à Cavenaile. Il ignorait aussi le rôle considérable si évidemment joué par la bande de grès sur le bord Sud du bassin. D'autre part, il attache une importance exagérée aux petits lambeaux de poussée en calcaire qui jalonnent, de loin en loin, le bord Sud du bassin de Mons.

Les idées de Cavenaile sur le massif de Boussu marquent d'autre part un recul très évident par rapport à celles de Plumat, et, fait étrange, si l'on tient compte des dates, il paraît ignorer totalement l'existence des études que fit Dumont à la fosse du St-Homme. Sa représentation en plan du massif est originale. Il le dessine très étalé, jusqu'au canal de Condé, à la frontière, et le poursuit avec une direction Est-Ouest et s'amincissant fortement, jusque St-Ghislain, puis dirigé au N.-E. jusqu'au N. de Jemappes, où il se termine en pointe très effilée, en affleurement. Mais les coupes le montrent se poursuivant, en profondeur, jusqu'au Nord de Mons. Dans la région de Boussu, il donne au bord Sud du massif une allure festonnée, contrairement à ce que nous faisons, sans doute parce qu'il adopte l'opinion erronée des Anciens confondant le silurien avec le houiller. La conception qu'il se faisait de l'origine du massif de Boussu est manifeste dans ses coupes N.-S. Pour lui, il le dit d'ailleurs, le massif de Boussu est le résultat d'un soulèvement du fond du bassin. Dans la région où le massif affleure, ses coupes le montrent comme un soulèvement de calcaire couché sur le bord Nord et recouvert, en discordance, par le bord Sud. Pour emprunter le langage des mineurs, je dirais que c'est un recoutelage du fond du bassin intercalé dans le houiller. Cette idée devait sembler bien plus logique alors que celle du transport par la surface. Là où le massif cesse d'affleurer, il le montre comme une digitation du calcaire pointant obliquement vers le haut et le Nord à travers les couches houillères. Pour expliquer le recouvrement du houiller par le calcaire reconnu au puits Sentinelle, il donne au massif un épanouissement superficiel vers le Sud.

Ces idées de Cavenaile étaient les idées courantes d'alors, car nous les voyons concrétisées de la même façon dans les cartes contemporaines du bassin de Charleroi. Dans la carte et les coupes du bassin de Charleroi, de Harmignies et Moucheron, éditées par Ph. Vandermaelen en 1855, le massif de La Tombe est représenté avec les mêmes allures capricieuses que s'il s'agissait d'une intrusion de roche éruptive. Le houiller n'ayant pas encore été reconnu à Fontaine-l'Evêque ni à Anderlues, le massif est représenté comme une presqu'île accolée au bord Sud ; ce qui est logique. Mais ce qui est inexplicable, c'est que les auteurs prolongent l'extrémité N.-O. du massif vers le Nord par Piéton et Carnières, puis, le repliant brusquement à angle droit, ils l'envoient vers l'Est jusque Jumet-Hamandes. On savait depuis longtemps, dans le bassin, qu'il existe une zone stérile à l'endroit où ils placent cette branche du massif ; c'est la zone stérile refoulée par la faille du Centre. Mais il n'était jamais venu à l'idée de personne de mettre là une bande de calcaire qui n'existe pas. Rien n'eût été plus facile aux auteurs que de rectifier leur erreur, puisque ce calcaire est représenté comme affleurant et même traversé par des fosses. Quant aux allures de leur massif ainsi tracé, elles sont si exactement semblables à celles que trace Cavenaile qu'elles doivent avoir été copiées sur ses coupes. La seule différence est que la partie centrale ou méridionale du massif est représentée non pas comme couchée au Nord, mais comme une protubérance très étalée du fond du bassin, s'élevant, à travers les couches, jusqu'à la surface. C'est ainsi d'ailleurs que le massif de la Tombe était représenté dans la coupe publiée dix ans auparavant par Bidaut dans son travail : *Mines de houille de l'arrondissement de Charleroi*. Bruxelles, A. Decq, 1845. Dans cet ouvrage se trouve la phrase suivante qui nous semble aujourd'hui si extraordinaire : « On ne connaît pas de failles un peu notables par leur puissance ou leur étendue, dans le terrain houiller de Charleroi ». L'explication en est que, à une époque non encore très éloignée, les mineurs belges restreignaient le nom de faille aux failles normales avec remplissage, comme est la faille St-Gilles. Ce n'est que très récemment d'ailleurs que les grandes failles de refoulement si importantes du bassin de Charleroi ont été reconnues et qu'on leur a appliqué le nom de failles.

Nous arrêterons ici notre étude. Aussi bien la première période de l'examen des phénomènes de refoulement, la période héroïque se clôt-elle en 1860. Désormais notre bassin houiller va devenir le domaine de savants tels que J. Gosselet, F. L. Cornet, A. Briart, G. Arnould, J. Smeysters. Par eux, l'observation minutieuse des faits, aidée des connaissances théoriques les plus modernes, eut vite fait évoluer nos connaissances sur ces grands phénomènes du terrain houiller. Cette période d'évolution rapide dura jusqu'en 1894 et fut close par l'apparition du travail de A. Briart sur la géologie de Fontaine-l'Evêque et de Landelies. Ce travail, qui a fait voir sous leur vrai jour ces grands accidents de terrain, ferme la période que nous pourrions appeler transitoire et ouvre la période moderne. A ceux que l'étude de cette période de transition intéresserait, nous conseillerions de lire les deux travaux suivants où est esquissée l'histoire d'une partie importante de cette période :

J. Gosselet, *Exposé de mes travaux sur le terrain houiller*. Lettre à M. Hébert. In-8°, 16 p. Lille, Six-Horemans.

J. Cornet, *La théorie des plis-failles. Un point de l'histoire de la géologie belge*. Ann. Soc. Géol. de Belg., t. XXXII, Bull. p. 90.

On y trouvera l'exposé des idées de géologues et d'ingénieurs français sur la question de ces failles, avant 1860. Je n'en ai pas parlé ici, car je me suis attaché spécialement à l'examen des opinions et des faits concernant en ordre principal le Hainaut.

A l'issue des séances des sections, les membres belges et français qui y avaient participé furent reçus à la Maison académique, 60, boulevard Vauban. Mgr Lesne, Recteur des Facultés catholiques de Lille, en mettant à la disposition de la Société les locaux de ses Facultés, avait appris qu'un déjeuner intime s'organisait, où se réuniraient les participants à la session ; par une attention délicate, il avait voulu que ce repas fût servi chez lui, et il accueillait les membres à la table dressée dans ses salons. A la fin du dîner, Monseigneur le Recteur, enfreignant délicatement nos traditions, prit la parole pour adresser à ses hôtes l'hommage de sa sympathie et offrir à la Société ses souhaits de prospérité.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

L'Assemblée générale eut lieu à 2 1/2 heures, dans le grand amphithéâtre de la Faculté libre des Sciences, sous la présidence d'honneur de Sa Grandeur Monseigneur Quilliet, évêque de Lille et chancelier de l'Université. M. Lagasse de Locht, président, ouvrit la séance par le discours suivant :

MONSEIGNEUR (¹),
MONSEIGNEUR LE RECTEUR (²),
MESDAMES, MESSIEURS,

Entre la France et la Belgique, ou plutôt entre les Français et les Belges, il y a de telles affinités naturelles et surnaturelles qu'on chercherait en vain à les atténuer.

Dieu me garde d'en faire l'énumération ! Il me suffit d'évoquer le dévouement, l'héroïsme, la sainteté de nos clergés.

Notre heureuse réunion de ce jour prouve qu'aimant, cultivant les sciences, les uns et les autres, nous comprenons à fond cette vérité lumineuse aux yeux d'humbles chrétiens : la Religion catholique, apostolique et romaine est la plus scientifique qui soit. Elle s'appuie sur les faits, scientifiquement observés, de la Vie de Notre Seigneur Jésus-Christ ; de l'histoire de Notre Eglise une, sainte, catholique, apostolique.

Nous mettons en œuvre, loyalement et honnêtement, dans les sciences mathématiques, physiques, naturelles, médicales, économiques et techniques, la méthode scientifique sans rencontrer jamais une contradiction de faits entre les lois de la foi et celles de la raison. Au contraire, nous découvrons, en ces sciences, des harmonies s'épandant sur d'autant plus vastes étendues qu'elles jaillissent plus profondément des sources du génie humain.

Ainsi apparaît vivante, à chaque pas sur la montée du progrès, la vérité de la devise de notre Société scientifique de Bruxelles, Société d'ailleurs internationale : « Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest ».

Monseigneur, nous ne saurions assez remercier Votre Grandeur d'avoir bien voulu accepter la présidence d'honneur de cette Assemblée. Notre reconnaissance va de notre cœur, avec une égale joie, à Monseigneur le Recteur magnifique ; à Messieurs les Profes-

---

(¹) Monseigneur Quilliet, Évêque de Lille.

(²) Monseigneur Lesne, Recteur des Facultés catholiques.

seurs des Facultés catholiques au nombre desquels nous comptons de bons et fidèles amis ; aux admirables Départements du Nord et du Pas-de-Calais ; à la vaillante ville de Lille. Désormais ils ont un trait de ressemblance de plus avec notre chère Belgique : celui de l'invasion cruelle, de l'affreuse douleur noblement supportée, décidément écartée au prix des sacrifices immenses de nos armées alliées et de nos courageuses populations.

Un cri unanime s'échappe ardent de nos poitrines de patriotes belges : Merci ! Merci à la France ! Qu'elle vive à jamais !

(Longs et vifs applaudissements)

Monsieur le Chanoine V. Grégoire fit la conférence sur les progrès et les tendances dans l'évolution végétale. Le texte de cette causerie magistrale, suivie par l'auditoire avec une curiosité attentive, paraîtra au complet dans le prochain numéro de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

En prenant comme exemple l'origine de la vie terricole, dans ses deux types fondamentaux (le type Bryophyte et le type Ptéridophyte), le conférencier recherche de quelle façon on peut se représenter et expliquer la marche progressive de l'évolution. Il montre la nécessité d'admettre que des formes hautement différenciées ont pu et ont dû apparaître d'emblée, à partir de formes beaucoup plus simples. Cette éclosion de nouveaux types d'organisation a été amenée par l'épanouissement des tendances foncières inhérentes à la vie, ou qui plutôt sont la vie elle-même, et qui ont poussé celle-ci vers des réalisations de plus en plus hautes, selon les possibilités nouvelles que lui ouvraient les changements de conditions extérieures.

Après la conférence, Monseigneur l'Évêque de Lille prononça l'allocution suivante :

MESSIEURS,

Je considère comme un très grand honneur que vous ayez eu la pensée délicate et bienveillante de m'appeler à la présidence d'honneur de votre session. A la vérité, je ne m'y connais aucun titre scientifique.

Peut-être cependant avez-vous bien voulu vous souvenir de la charge de Chancelier des Facultés catholiques de Lille, que le Souverain Pontife a daigné me confier récemment. Ainsi, c'est à l'Université Catholique tout entière que vous rendez hommage, à son corps professoral, à ses maîtres, à ses savants réputés. Alors, Messieurs, je vous remercie de cet honneur si délicatement rendu à nos maîtres ; ils sont dignes de votre sympathie comme de votre estime scientifique. Chaque jour, ils vous le prouveront davantage.

Il se peut encore que vous ayez, Messieurs, songé à l'Évêque ; que vous ayez voulu rendre votre hommage chrétien à la dignité surnaturelle dont il est revêtu, à la confiance que l'Église lui a témoignée. A ce titre, je vous remercie, Messieurs, de ce que vous savez encore, avec votre science, vous incliner devant les forces spirituelles les plus grandes qui soient au monde. J'accepte votre hommage, au nom de l'Église, la grande maîtresse et institutrice des hommes.

Monsieur le Président, Monsieur le Chanoine et Messieurs de la Société scientifique de Bruxelles, laissez-moi vous assurer, tout d'abord, de notre vive sympathie pour votre nation si éprouvée. Votre noblesse et votre fierté se sont révélées dès le début de l'injustice. En cet instant, vous vous êtes dressés contre elle, sans prendre le moindre souci des conséquences qui pouvaient s'ensuivre pour vous. Votre épreuve est la nôtre, à nous vos voisins, qui avons comme vous-mêmes subi tous les ravages de la colère ennemie. Nous vous saluons avec respect et reconnaissance dans notre commune misère.

Monsieur le Chanoine, j'ai maintenant à vous dire la satisfaction profonde que nous avons goûtée à vous entendre. Devant nous, vous représentez l'Université Sœur, celle qui, depuis bientôt un siècle, garde jalousement à la Belgique son fonds national de doctrine et de fidélité morale. Ce nous fut comme une joie de résurrection d'entendre, en votre personne, l'Université Catholique de Louvain, laquelle, moins heureuse que nous, a subi les effets ruineux de la barbarie et de la rage ennemies. Redites, nous vous en prions, à vos collègues et à Monseigneur votre Recteur, l'attachement et le fraternel dévoûment de l'Université Catholique de Lille. Elle n'est pas riche elle-même, au lendemain de la paix. Aussi regrette-t-elle vivement de ne pouvoir, comme certaines

Universités Américaines, apporter sa part contributive au relèvement de vos ruines. Elles furent et demeurent celles de la Science et de la Vérité.

Monsieur le Chanoine, au nom de tous vos auditeurs, j'ai encore à vous remercier de votre belle conférence sur les *Progrès et les Tendances de l'Évolution végétale*. Avec justesse et mesure, avec un tact exquis, vous nous avez montré où et jusqu'à quel point l'on peut admettre cette évolution. Merci de ces lumières si sûres et de ces conclusions si fermes, que votre compétence tire allégrement d'une culture très approfondie de la matière vivante.

Messieurs de la Société scientifique de Bruxelles, c'est vers votre devise que nous reportait constamment Monsieur le Chanoine en sa conférence : *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest* ([1]). A cette tâche d'établir et de maintenir la concordance entre les données de la foi et celles de la raison, vous vous dévouez courageusement. Vous êtes et demeurez convaincus que Dieu, créateur des mondes, ne peut tenir un langage d'opposition vraie, quand Il nous parle dans les mondes exposés à nos regards ou quand Il nous parle dans la manifestation de la foi révélée. Soyez félicités et remerciés, Messieurs, de cette direction donnée à vos labeurs et à votre Association elle-même. Elle est sûre : elle est absolue. Une fois encore, je vous sais gré d'être venus nous le rappeler éloquemment, et par votre conférence, et par le geste de votre session. Je vous souhaite, Messieurs, dans nos milieux scientifiques de fidèles imitateurs, de courageux collaborateurs, de nombreux adhérents. Parmi ces derniers, veuillez me permettre d'inscrire aujourd'hui mon nom. Et vienne bientôt le jour où nous pourrons vous rendre votre visite, mais à Louvain! Louvain, sortie de ses ruines en un superbe vêtement d'architecture gothique, à Louvain ressuscitée dans une nouvelle jeunesse et avec de belles énergies pour l'expansion et la défense de la vérité divine.

(Applaudissements prolongés.)

([1]) Denzinger-Banwart, *Enchiridion*, n° 1797.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

Déterminants d'éléments x et 1

PAR

M. LECAT

1. Les déterminants et les permanents de matrices dont les éléments sont exclusivement x et 1, ou encore x, 1 et 0, offrent de l'intérêt, car ils permettent de trouver de nouvelles propriétés des polynomes et, par suite, des formes algébriques binaires. Mais déjà pour deux éléments distincts x et 1 le calcul des déterminants et surtout des permanents présente le plus souvent des difficultés sérieuses, s'il y a plus de deux dimensions. Nous allons considérer quelques-uns de ces cas.

D'abord, une propriété générale. *Si l'on désigne par* $(x, 1, 0)$ *un permanent d'éléments* x, 1 *et* 0, *distribués d'une manière quelconque, on a :*

$$(1, x, 0) = x^{\alpha-\beta} [x, 1, 0],$$

α *et* β *étant respectivement les degrés en* x *des permanents* $(x, 1, 0)$ *et* $(1, x, 0)$, *et* $[x, 1, 0]$ *représentant le polynome que l'on déduit du polynome constituant le développement de* $(x, 1, 0)$ *par renversement de l'ordre des coefficients.*

Ce théorème a lieu quel que soit le genre des permanents ; et il ne cesse pas d'exister si, au lieu des permanents, on considère les déterminants de genre quelconque, les pénédéterminants (¹) ou, plus généralement encore, toute fonction F linéaire par rapport aux éléments de toute couche de classe g arbitrairement choisie ; fonction résultant donc du permanent de genre g en appliquant à ses termes une règle des signes arbitraire.

S'il s'agit de permanents de genre g, comme il ne peut y avoir de termes qui se détruisent (puisque tous sont affectés du signe $+$), α et β représentent respectivement dans la matrice $(x, 1, 0)$ les ordres de la plus grande transversale de genre g formée d'x et de la plus grande transversale de même genre formée d'éléments 1.

La démonstration de cette propriété est aisée, car on passe de la matrice $(x, 1, 0)$ à la matrice $(1, x, 0)$ en remplaçant x par $1 : x$ et en multipliant ensuite par une puissance de x.

Exemple : les permanents des genres 1, 2 et 3 des matrices cubiques :

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} x & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & x & x & 0 & x & x & 1 & 1 & x \end{array} \right\| , \quad \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & x & x & x & x & x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & x & x & 1 \end{array} \right\|$$

valent respectivement :

$$\begin{array}{r|r} x^3 + 2x^2 + \ \ 3x + 1 & x^3 + \ \ 3x^2 + 2x + 1 \\ x^3 + 6x^2 + 11x + 1 & x^3 + 11x^2 + 6x + 1 \\ x^3 + 5x^2 + \ \ 3x + 2 & 2x^3 + \ \ 3x^2 + 5x + 1 \end{array}$$

Constatons, en passant, que dans le cas spécial où il n'y a pas de vide, le nombre

$$p^{n-g} \binom{n}{g} (p\,!)^{g-1}$$

égale la somme des coefficients dans chacun des polynomes représentant les développements des permanents de genre g de $(x, 1)$ et de $(1, x)$, et que les équations obtenues en les annulant n'ont pas de racines réelles positives.

(¹) Cfr. notre travail : *Sur une généralisation des déterminants*, ANNALES, t. XXXIX, 1919-1920, 2ᵉ partie, pp. 10 et suiv. et aussi p 41.

Si les régions des 1 et des x sont équivalentes, ayant mêmes forme et position relative, il est évident que le développement est un polynome symétrique, quel que soit le vide (qui peut être inexistant) et quelle que soit la fonction considérée.

Il résulte du théorème que, quelles que soient l'étendue et la forme du vide (qui peut être inexistant) et des régions des 1 et des x, l'échange de 1 et de x dans la matrice $(x, 1, 0)$ est suivi d'une transformation très simple de toute fonction F. L'expression d'une telle fonction F pour les trois matrices $(x, 1, 0)$, $(x, 0, 1)$, $(0, x, 1)$ se déduit donc aisément de l'expression de la même fonction pour les matrices $(1, x, 0)$, $(1, 0, x)$, $(0, 1, x)$. Mais il est probablement impossible de trouver une loi générale, indépendante de la distribution des 0, des 1 et des x, donnant l'effet de l'échange de 0 et x (les 1 pouvant être inexistants) ou de 0 et 1 sur la fonction $F(x)$.

2. Calculons le déterminant actinomorphe

$$\left| 1 + (x-1) \sum_{\alpha=A}^{B} \delta\left(n + \alpha - 1, \sum_{\nu=1}^{n} i_\nu\right) \right|_p .$$

Pour des valeurs quelconques de A et de B, il y a de grandes difficultés. Bornons-nous au cas spécial où $A = 1$ et $B \leqslant p$, le lieu des x étant un hypertétraèdre droit.

Si $B < p - 1$, le déterminant est nul, ainsi que tous les pénédéterminants et superdéterminants, comme ayant au moins deux tranches parallèles identiques (ce qui a lieu, du reste, dans toutes les directions). Mais le permanent n'est pas nul.

Si $B = p - 1$, on soustrait, dans une direction quelconque, soit 1, de la tranche α la tranche $\alpha + 1$, pour $\alpha = 1, \ldots, p-1$ et l'on met $(x-1)^{p-1}$ hors barres. On obtient ainsi le nouveau déterminant

$$\left| \delta\left(\sum_{\nu=1}^{n} i_\nu , \, n + p - 2\right) + \delta(p, i_1) \right|_p ,$$

où la pénultième tranche de direction 1 n'a qu'un seul élément autre que 0, son élément de tête. Le mineur y relatif est nul si

$p \geqslant 3$ en même temps que $n \geqslant 3$, car dans ce cas une de ses tranches de rang 1 est vide. Pour $n = 2$, le déterminant vaut $(-1)^p$ et pour $n \geqslant 3$, $p = 2$, il vaut 1. Donc le déterminant primitif :

$$(1) \quad \left| \; 1 + (x-1) \sum_{\alpha=1}^{p-1} \delta\left(n + \alpha - 1 \, , \sum_{\nu=1}^{n} i_\nu \right) \right|_p = \\ = (1-x)^{p-1} \left(-1 + \bar{\delta}_{n,2} \cdot \bar{\delta}_{p,2}\right),$$

et l'on voit aisément que le calcul et la valeur sont identiquement les mêmes pour tout pénédéterminant d'espèce non nulle (le permanent faisant exception).

Le déterminant de genre g se réduit à la somme des premiers déterminants partiels, de même structure que la matrice entière. Lorsque les x remplissent un hypertétraèdre d'ordre $p - 1$, on a donc l'expression générale :

$$(1-x)^{p-1} \left(-1 + \bar{\delta}_{g,2} \cdot \bar{\delta}_{p,2}\right) \binom{n}{g}.$$

Si l'hypertétraèdre des x est d'ordre p, on opère comme plus haut par soustraction de tranches, ce qui donne le déterminant

$$\left| \; (x-1)\, \delta\left(n + p - 1 \, , \sum_{\nu=1}^{n} i_\nu \right) + \delta(p, i_1) \right|_p ,$$

vide au dehors d'un espace orthodiagonal et d'une tranche, et où la pénultième tranche de direction 1 renferme $n - 1$ éléments non nuls, disposés en hypertétraèdre à $n - 2$ dimensions. On peut mettre $(x-1)^{p-1}$ hors tranches ; on obtient alors une matrice dont voici la représentation pour $n = 3$, $p = 3$ et pour $n = 4$, $p = 3$:

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} . & . & 1 & . & 1 & . & x & 1 & 1 \\ . & 1 & . & 1 & . & . & 1 & 1 & 1 \\ 1 & . & . & . & . & . & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
. & . & 1 & . & 1 & . & x & 1 & 1 \\
. & 1 & . & 1 & . & . & 1 & 1 & 1 \\
1 & . & . & . & . & . & 1 & 1 & 1 \\
\hline
. & 1 & . & 1 & . & . & 1 & 1 & 1 \\
1 & . & . & . & . & . & 1 & 1 & 1 \\
. & . & . & . & . & . & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & . & . & . & . & . & 1 & 1 & 1 \\
. & . & . & . & . & . & 1 & 1 & 1 \\
. & . & . & . & . & . & 1 & 1 & 1
\end{array}\right\|$$

les points étant mis pour des zéros.

Pour $n = 2$, son déterminant est égal à $(-1)^{p-1} . x$. Pour $n \geqslant 3$, $p = 2$, il vaut :

$$-[n - 2 + (-1)^n],$$

de sorte qu'il est nul pour $n = 3$, $p = 2$. Plus généralement, le pénédéterminant d'ordre 2 et d'espèce ν vaut $n - 2\nu + 1$.

Il n'y a pas de terme non nul pour :

$$n = 3, \quad p \geqslant 5\,; \quad n = 4, \quad p \geqslant 4\,; \quad n \geqslant 5, \quad p \geqslant 3\,;$$

tandis que la valeur est :

pour $n = 3$, $p = 3$: $+2$;
pour $n = 3$, $p = 4$: $+2$;
pour $n = 4$, $p = 3$; $2\nu - 5$.

Le déterminant (uniforme) a donc pour expression :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 - x)^{p-1} \{ x\, \delta_{n,2} + [n - 2 + (-1)^n]\, \delta_{p,2} . \bar{\delta}_{n,2} \\ \qquad + (n - 1)\, (\delta_{n,3} . \delta_{p,3} - \delta_{n,3} . \delta_{p,4} + \delta_{n,4} . \delta_{p,3}) \}. \end{array} \right.$$

Plus généralement, le pénédéterminant (monogène) de classe n et d'espèce ν a pour valeur :

$$(1 - x)^{p-1} \{ x . \delta_{n,2} + (n - 2\nu + 1)\, \delta_{p,2} . \bar{\delta}_{n,2}$$

$$+ (n - 1)\, (\delta_{n,3} . \delta_{p,3} - \delta_{n,3} . \delta_{p,4}) + (2\nu - 5)\, \delta_{n,4} . \delta_{p,3} \}.$$

Elle est très remarquable. Comme pour $B = p - 1$, la valeur est nulle sauf pour un nombre fini de valeurs de l'ordre et de la classe. Pour $n = 2$ il y a une infinité de valeurs non nulles ; pour $n = 3$ il y en a 2 précédées d'une valeur nulle (ce qui est spécial au déterminant cubique) (¹) ; pour $n = 4$ il y en a 2 ; enfin pour $n \geqslant 5$ il n'y en a jamais qu'une seule (²).

Le déterminant de genre g, aussi uniforme et dont la valeur s'obtient aisément au moyen de (1) et de (2), a pour expression :

$$
{}_{g}\left| 1 + (x - 1) \sum_{\alpha=1}^{p} \delta\left(n + \alpha - 1, \sum_{\nu=1}^{n} i_\nu\right) \right|_{p} =
$$

$$
\binom{n}{g}(1 - x)^{p-1} \Big\{ x\delta_{g,2} + \delta_{n,g}(-1 + \bar{\delta}_{g,2} \,.\, \bar{\delta}_{p,2}) + [(g - 2) + (-1)^g] .
$$

$$
.\, \delta_{p,2}\, \bar{\delta}_{g,2} + (g - 1)(\delta_{g,3}\, \delta_{\rho,3} + \delta_{g,4}\, \delta_{p,3} - \delta_{g,3}\, \delta_{p,4}) \Big\} .
$$

Quant au permanent, son calcul est beaucoup plus difficile que celui du déterminant, le principe d'addition des tranches n'étant plus applicable (³).

3. Calculons le déterminant

$$
\left| 1 + (x - 1) \prod_{1}^{n} \nu \prod_{\pi+1}^{p} \alpha\, \bar{\delta}(\alpha, i_\nu) \,.\, \prod_{1}^{n-1} \epsilon\, \bar{\delta}(1, [i_\epsilon - i_{\epsilon+}]) \right|_{p} ,
$$

(¹) Ailleurs nous avons rencontré d'autres singularités spéciales au déterminant cubique. Voir, par exemple, ces ANNALES, t. XXXVI, 1911-1912, 2ᵉ partie, page 122.

(²) Ces anomalies rappellent d'une manière frappante celles du nombre des polytopes réguliers de l'espace à n dimensions. Pour $n = 2$, on sait qu'il y en a une infinité, dont tous sauf 3 sont anormaux ; pour $n = 3$ et $n = 4$, il y en a respectivement 2 et 3 d'anormaux, tandis que pour $n \geqslant 5$ il n'y a plus de singularité.

(³) Pour $n = 3$, $p = 2$, il vaut : $4x$;
— $p = 3$ — $2(3x^2 + 14x + 1)$;
— $p = 4$ — $2x^3 + 178x^2 + 357x + 39$;
$n = 4$, $p = 2$ — $5x + 3$;
— $p = 3$ — $3x^2 + 113x + 100$.

dont les éléments x remplissent cette fois un hypertétraèdre principal d'ordre π, les éléments extérieurs étant des 1.

Si $\pi < p - 1$, tout pénédéterminant est nul et cela est encore vrai quel que soit le genre. Il n'en est pas de même des permanents.

Si $\pi = p - 1$, les déterminants ne sont plus nuls, mais leur calcul est simple. De la tranche α de direction 1 supposée signante, on soustrait la tranche $\alpha + 1$, pour $\alpha = 1, \ldots, p - 1$ et l'on fait sortir le facteur $x - 1$ de chacune des tranches $1, \ldots, p - 1$. Dans la matrice ainsi obtenue, le seul élément non nul de la tranche $p - 1$ est la vertèbre. Comme son mineur a même forme et que pour $p = 2$ il vaut l'unité, on trouve $(x-1)^{p-1}$. Si, la classe n étant impaire, la direction 1 est non-signante, on opère suivant la direction n, en soustrayant de la tranche $p - 1$ la tranche $p - 2$, de celle-ci la tranche $p - 3$, etc., enfin de la tranche 1 la tranche p, et l'on trouve la même valeur. Le déterminant est donc uniformément égal à $(x - 1)^{p-1}$, valeur indépendante de la classe. Le même calcul étant applicable aux pénédéterminants d'espèce ν quelconque, pourvu que le rang 1 ou n, suivant lequel on additionne des tranches, soit signant, on voit que pour ces fonctions on obtient encore $(x - 1)^{p-1}$, quels que soient n et ν. Mais pour le permanent le calcul se complique et la valeur est autre.

Si $\pi = p$, cas où l'hypertétraèdre n'est plus mineur, le déterminant dépend de la classe ; lorsque celle-ci est impaire, le déterminant est encore mérogène, les indices à égale distance des extrêmes étant équivalents ; mais il n'y a plus uniformité. Le calcul se complique fort, même quand la classe est paire.

En soustrayant de la tranche α, de direction 1 ou n, la tranche $\alpha + 1$, pour $\alpha = 1, \ldots, p - 1$, on obtient la matrice

$$\left\| (x - 1)\, \delta(p, i_1, \ldots, i_n) + \delta(p, i_n) + \bar{\delta}(p, i_n)\, \delta(i_{n-1}, i_n) . \right.$$

$$\left. \cdot \prod_{\epsilon=1}^{n-1} \bar{\delta}(1, [i_\epsilon - i_{\epsilon+1}]) \right\|_p .$$

Désignons son déterminant par $\overset{n}{\underset{p}{\Delta}}(x)$. La tranche ayant le plus grand vide est la pénultième de direction n ; en effet, ses seuls éléments non nuls sont ceux de l'hypertétraèdre principal, d'ordre 2 et à $n - 2$ dimensions $(i_1, \ldots, i_{n-2})$, dont l'origine est la vertèbre $(p - 1, \ldots, p - 1)$. Appelons $[1], \ldots, [n - 1]$ ces éléments non nuls (de valeur 1), dans les positions où on les rencontre quand on suit successivement les arêtes de directions $1, \ldots, n - 2$ de ce simplicissime, comme suit :

$$\overset{4}{\underset{3}{\Delta}}(x) \equiv \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [1] & [2] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [3] & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right|$$

Développons le déterminant suivant ces éléments. Désignons par $\underset{p-1}{\Delta}[\epsilon]$ le sous-déterminant, d'ordre $p - 1$, de l'élément $[\epsilon]$, pris dans $\overset{n}{\underset{p}{\Delta}}(x)$.

La matrice $\underset{p-1}{\Delta}[1]$ n'est évidemment autre que $\underset{p-1}{\Delta}(x)$.

La structure de $\underset{p-1}{\Delta}[\theta]$, pour $\theta > 1$, est telle que, dans la pénultième tranche de rang n, $[1], \ldots, [\theta]$ sont les seuls éléments non nuls ; en particulier

$$\underset{p-1}{\Delta}[n - 1] \equiv \underset{p-1}{\Delta}(1),$$

c'est-à-dire ne diffère de $\underset{p-1}{\Delta}(x)$ qu'en ce que l'x est remplacé par l'unité. Par exemple, voici comment se présentent les moitiés supérieures des sous-matrices $\overset{6}{\underset{2}{\Delta}}[2]$, $\overset{6}{\underset{2}{\Delta}}[4]$ (les moitiés inférieures étant formées d'unités et les points étant mis pour des zéros) :

$$\left\|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} [1] & [2] & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \hline . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{array}\right\| , \quad \left\|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} [1] & [2] & . & . & . & . & . & . \\ . & [3] & . & [4] & . & . & . & . \\ \hline . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{array}\right\|$$

Le déterminant $\overset{n}{\underset{p}{\Delta}}(x)$ est donc fonction de $\overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}(x)$, $\overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}(1)$, qui n'en sont pas essentiellement distincts, et des déterminants

$$\overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}[2], \ldots, \overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}[n-2].$$

Calculons ceux-ci en les développant comme $\overset{n}{\underset{p}{\Delta}}(x)$, c'est-à-dire suivant leur pénultième tranche de rang n. Désignons par $\overset{n}{\underset{p-2}{\Delta}}[\sigma, \tau]$, où $2 \leqq \sigma \leqq n-1$, $\tau \leqq \sigma$, le sous-déterminant, d'ordre $p-2$, de l'élément $[\tau]$ du déterminant $\overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}[\sigma]$. Il est visible qu'aux identités :

$$\overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}[1] \equiv \underset{p-1}{\Delta}(x) \quad , \quad \overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}[n-1] \equiv \underset{p-1}{\Delta}(1)$$

correspondent les suivantes :

$$\overset{n}{\underset{p-2}{\Delta}}[\sigma, 1] \equiv \overset{n}{\underset{p-2}{\Delta}}[\sigma, \sigma] \equiv \overset{n}{\underset{p-2}{\Delta}}[\sigma]$$

et que

$$\overset{n}{\underset{p-2}{\Delta}}[\sigma, \tau] \equiv \overset{n}{\underset{p-2}{\Delta}}[\tau] \quad , \quad \sigma \geqq \tau \geqq 2 \, ;$$

autrement dit :

$$(\Sigma) \qquad \overset{n}{\underset{p-2}{\Delta}}[\sigma, s] = \overset{n}{\underset{p-2}{\Delta}}[s + (\sigma - s)\,\delta_{s,1}].$$

Cette relation donne le moyen de calculer de proche en proche le déterminant $\overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}[\sigma]$.

Supposons la classe paire. Les signes dont il faut affecter les sous-déterminants $\overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}[\epsilon]$ pour obtenir les mineurs sont alternativement positifs et négatifs (il y en a donc $\frac{n}{2}$ positifs et $\frac{n}{2}-1$ négatifs) ; de même pour les sous-déterminants $\overset{n}{\underset{p-2}{\Delta}}$. On a donc :

$$\overset{n}{\underset{2}{\Delta}}[\sigma] = \delta_{1,(-1)^{\sigma+1}},$$

$$\overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}[\sigma] = \sum_{s=1}^{\sigma} (-1)^{s+1} \cdot \overset{n}{\underset{p-2}{\Delta}}[\sigma, s]$$

$$= \sum_{s=1}^{\sigma} (-1)^{s+1} \cdot \overset{n}{\underset{p-2}{\Delta}}[s + (\sigma - s)\,\delta_{s,1}].$$

Cela permet d'écrire d'abord, pour $p \geq 3$,

$$\overset{n}{\underset{p}{\Delta}}[2] = \overset{n}{\underset{p-2}{\Delta}}[2] - \overset{n}{\underset{p-2}{\Delta}}[2] = 0,$$

d'où

$$(\Sigma') \qquad \overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}[\sigma] = [1-(-1)^{\sigma}]\,\overset{n}{\underset{p-2}{\Delta}}[\sigma] + \sum_{\rho=3}^{\sigma-1} (-1)^{\rho+1}\,\overset{n}{\underset{n-2}{\Delta}}[\rho].$$

On voit que, si l'on a calculé l'expression de $\overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}[\sigma]$, on obtient celle de $\overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}[\sigma+1]$ par l'égalité :

$$\overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}[\sigma+1] = \overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}[\sigma] - \overset{n}{\underset{p-2}{\Delta}}[\sigma] + [1-(-1)^{\sigma+1}]\,\overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}[\sigma+1],$$

formule de récurrence si σ est pair, directe si σ est impair. D'après cela, on a :

$$\overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}[3] = 2\,\overset{n}{\underset{p-2}{\Delta}}[3] = 2^{p-3};$$

$$\overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}[4] = \overset{n}{\underset{p-2}{\Delta}}[3] = 2^{p-4},$$

formule valable pour $p \geqslant 4$ et même pour $p = 3$ si l'on convient de prendre $2^{-1} = 0$. On a ensuite :

$$\overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}[5] = 2\overset{n}{\underset{p-2}{\Delta}}[5] + \overset{n}{\underset{p-2}{\Delta}}[3] - \overset{n}{\underset{p-2}{\Delta}}[4]$$

$$= 2\overset{n}{\underset{p-2}{\Delta}}[5] + 2^{p-4} - 2^{p-5},$$

formule valable pour $p \geqslant 5$ et même pour $p = 4$ si l'on convient encore de prendre $2^{-1} = 0$.

Si l'on écrit cette formule successivement pour $p \equiv p, p-1$, ..., 4, multiplie ensuite ces égalités respectivement par $2^0, 2^1, \ldots, 2^{p-4}$, et additionne, on obtient, après réduction :

$$\overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}[5] = (p-4)(2^{p-4} - 2^{p-5}) + 3 \,.\, 2^{p-4}$$

$$= 2^{p-4} + p \,.\, 2^{p-5} + 2\delta_{p,4} + \delta_{p,3},$$

formule valable pour $p \geqslant 3$.

On a ensuite :

$$\overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}[6] = \overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}[5] - \overset{n}{\underset{p-2}{\Delta}}[5] = 2^{p-6}(p+3) + 2\delta_{p,4} + 4\delta_{p,5},$$

valable aussi pour $p \geqslant 3$.

Et ainsi de suite. Cela étant, on peut, à l'aide du calcul de $\underset{p}{\Delta}[\sigma]$, trouver aisément l'expression de $\overset{n}{\underset{p}{\Delta}}(x)$. On a, en effet :

$$\overset{n}{\underset{p}{\Delta}}(x) = \overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}(x) + \sum_{\kappa=3}^{n-1} (-1)^{\kappa+1} \underset{p-1}{\Delta}(\kappa).$$

Or si, dans la relation (Σ'), on suppose σ pair et qu'on remplace σ par $n+2$ et p par $p+1$, on obtient :

$$\underset{p}{\Delta}[n] = \sum_{\kappa=3}^{n-1} (-1)^{\kappa+1} \underset{p-1}{\Delta}(\kappa).$$

Donc le déterminant à n dimensions

$$(1) \qquad \overset{n}{\underset{p}{\Delta}}(x) = \overset{n}{\underset{p-1}{\Delta}}(x) + \underset{p}{\Delta}[n],$$

le déterminant $\underset{p}{\Delta}[n]$ se calculant par la méthode vue.

Si l'on écrit (1) pour $p \equiv p,\ p-1, \ldots, 3$, et additionne ces égalités en observant que $\overset{n}{\underset{2}{\Delta}}(x) = x$, on obtient :

$$\overset{n}{\underset{p}{\Delta}}(x) = x + \sum_{\alpha=3}^{p} \underset{\alpha}{\Delta}[n].$$

On a donc pour n paire :

$$\left| 1 + (x-1) \overset{n-1}{\underset{1}{\prod_{\epsilon}}} \bar{\delta}(1, [i_\epsilon - i_{\epsilon+1}]) \right|_p$$

$$= (x-1)^{p-1} \left[x + \sum_{\alpha=3}^{p} \underset{\alpha}{\Delta}(n) \right],$$

$\underset{\alpha}{\Delta}(n)$ se calculant par récurrence comme il a été montré.

Par exemple, pour $n = 4$, on obtient :

$$(x-1)^{p-1}(x-1+2^{p-2}).$$

Pour $n = 6$, on trouve :

$$(x-1)^{p-1} \left\{ x + \sum_{\alpha=3}^{p} [2^{\alpha-5}(\alpha+4) + 2\delta_{\alpha 3} + 4\delta_{\alpha,i}] \right\}.$$

En particulier, pour $n = 6$ et $p = 3$, le développement est :

$$(x-1)^2(x+2).$$

Pour $n = 3$, on développe le déterminant $\overset{3}{\underset{p}{\Delta}}(x)$ par rapport aux deux éléments non nuls de la tranche pénultième du rang 3, ce qui donne deux déterminants de même structure. On trouve ainsi aisément que

$$\left| 1 + (x-1) \prod_{\epsilon=1}^{2} \bar{\delta}(1\,, [i_\epsilon \quad i_{\epsilon+1}]) \right|_p$$

$$= (x-1)^{p-1}\,(x - 1 + 2^{p-1}\,\bar{\delta}_{\upsilon,2}).$$

Pour les pénédéterminants, le problème présente un grand intérêt. Mais la détermination du nombre des valeurs distinctes suivant le nombre des indices signants et leurs rangs, ainsi que le calcul de ces valeurs présentent, à cause des questions de signes, des difficultés plus grandes que pour les déterminants.

Pour le permanent, bien qu'il n'y ait pas de considération de signes, le calcul semble encore plus malaisé, le principe de l'addition des tranches n'étant plus applicable et la méthode des produits symboliques se prêtant peu à la question (¹).

Indiquons pour le déterminant une seconde méthode. On soustrait, dans la direction 1, la tranche $\alpha - 1$ de la tranche α, successivement pour $\alpha = p$, $p - 1, \ldots, 2$; dans la matrice ainsi obtenue, on soustrait, suivant la direction n, la tranche β de la tranche $\beta - 1$, successivement pour $\beta = 2, \ldots, p$. On peut alors mettre $(x-1)^{p-1}$ hors barres. Quelle est alors la structure de la matrice ? Parmi les p^2 matrices à $n - 2$ dimensions, se juxtaposant dans la représentation plane (carrée, n tant paire), sont vides celles situées au dehors de l'axe et de la $p^{\text{ème}}$ tranche de direc-

---

(¹) Voici les valeurs dans quelques cas particuliers.

Pour $n = 2$, $p = 2, 3, 4$, on a respectivement :

$$x(x+1) \quad , \quad x(x^2 + 4x + 1) \quad , \quad x(x^3 + 12x^2 + 10x + 1).$$

Pour $n = 3$, $p = 2, 3, 4$:

$$x^2 + 2x + 1 \quad , \quad x^3 + 9x^2 + 19x + 7 \quad , \quad x^4 + 35x^3 + 169x^2 + 278x + 93.$$

Pour $n = 4$, $p = 2, 3$, on a :

$$x^2 + 3x + 4 \quad , \quad x^3 + 17x^2 + 90x + 108.$$

tion n. Ainsi, pour $n=4$ et $p=3$, on a, les points étant mis pour des zéros, le schéma suivant :

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & x-1
\end{array}\right\|,$$

où des vertèbres sont les seuls éléments non nuls extérieurs à la dernière tranche de direction 4. Pour $n>4$, cette dernière propriété n'a plus lieu : par exemple, pour $n=6$ et $p=3$ les deux premières couches axiales à 4 dimensions se présentent ainsi :

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1
\end{array}\right\|,
\quad
\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \underline{1} \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1
\end{array}\right\|$$

Pour $n>4$, la pénultième sous-matrice axiale est amenée à n'avoir plus d'éléments non nuls (et égaux à l'unité) au dehors de l'axe par des soustractions de tranches convenablement choisies. Par exemple, pour $n=6$ le 1 souligné devient 0, en soustrayant, dans la direction 4, la $p^{\text{ème}}$ tranche de la $(p-1)^{\text{ème}}$. Pour n en général on opère de même, successivement dans les directions $n-2$, $n-4$, etc. Des zéros disparaissent ainsi, mais cela ne gêne nullement. En développant par rapport aux $n:2$ éléments non nuls de la pénultième tranche de direction n, on est amené à trouver des formules de récurrence à peu près comme dans la première méthode. Et, naturellement, les expressions que l'on trouve sont les mêmes.

4. Il y aurait lieu de considérer ensuite, comme domaines des éléments x, les divers autres hypertétraèdres. Mais déjà pour la matrice cubique, où ces corps sont les tétraèdres dits allongé et régulier (¹), ni le principe d'addition des tranches, ni la méthode symbolique, pourtant fort pratique dans la plupart des cas, ne se prêtent guère au calcul du déterminant. Il faudrait donc trouver d'autres procédés. Il serait intéressant aussi de calculer les déter-

---

(¹) Cfr. notre mémoire : *Sur les déterminants généraux*, ANNALES, t. XXXIX, 1919-1920, 2ᵉ partie, nº 18, pp. 62-63. S'il s'agit du *tétraèdre allongé*, le déterminant a deux valeurs (une double et une simple). Les voici dans quelques cas :

$$\begin{array}{llrl}
\text{pour}\ p=2 & : \ v.\ d. = (x+1)\,(x-1) & , & v.\ s. = (x-1)^2\,; \\
\quad 3 & (x+1)\,(x-1)^2 & , & (x-1)^3\,; \\
\quad 4 & (x+4)\,(x-1)^3 & , & x(x-1)^3\,; \\
\quad 5 & (x+6)\,(x-1)^4 & , & x(x-1)^4\,; \\
\quad 6 & (x+10)\,(x-1)^5 & , & (x-2)\,(x-1)^5\,;
\end{array}$$

Voici les premières valeurs du permanent :

$$\begin{array}{ll}
p=2\ : & x^2+2x+1\,; \\
\quad 3 & x^3+11x^2+15x+19\,; \\
\quad 4 & x^4+45x^3+169x^2+225x+136
\end{array}$$

L'expression générale du déterminant de genre 2 s'obtient aisément ; c'est :

$$(x-1)^{p-1}\left\{\left[2+(-1)^{p-1}\right]x+2p-1\right\}.$$

Dans le cas où les x remplissent le *tétraèdre régulier*, le déterminant est actinomorphe, donc uniforme. Il est nul pour $p<4$. Pour $p=4$ il vaut :

$$6(x+1)\,(x-1)^3.$$

Quant au permanent, lorsque $p=2, 3, 4$ il a pour expressions respectives :

$$4x \quad , \quad 4(4x^2+3x+2)\,,$$

$$8(x^4+8x^3+24x^2+32x+7)$$

minants et pénédéterminants $\{0, 1, x\}$, d'éléments 0, 1 et x répartis des 3 ! manières possibles sur la surface limitante, à l'intérieur ou à l'extérieur de l'hypertétraèdre, pour chaque espèce de ces corps.

5. Considérons la matrice

$$\left\| 1 + (x-1) \overset{n}{\underset{\nu+1}{\left[\theta\right]}} \bar{\delta}(1\,, [i_\theta - \kappa]) \overset{n}{\underset{\nu+1}{\left[\theta\right]}} \overset{\nu}{\underset{1}{\left[\epsilon\right]}} \sum_{\alpha=0}^{\kappa-1} \delta(i_{\epsilon-\alpha}\,,\ i_\theta) \right\|_p ,$$

ν étant l'un des $n-1$ premiers nombres, κ un des p premiers.

Pour $n = 3$, $p = 4$, $\nu = 2$, $\kappa = 2$, elle se présente ainsi :

$$\left\| \begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} x & x & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 1 & 1 & 1 & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & 1 & 1 & 1 & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| .$$

Si $\kappa = 1$, on a $\nu = n$, la matrice est actinomorphe et on sait que tout pénédéterminant

$$\overset{\circ}{\left|\right.} 1 + (x-1)\, \delta\, (i_1, \ldots, i_n) \Big|_{p}^{\circ} = (x + p - 1)\, (x-1)^{p-1},$$

tandis que le déterminant de genre $g (\neq n)$ a pour expression

$$2\binom{n}{g}\, (x-1)\, \delta_{p.2}.$$

Si $\kappa > 2$, $\nu < n-1$, le déterminant de tout genre ($\geqslant 2$) est nul, le déterminant proprement dit de toute couche possédant, au moins dans une direction signante, des tranches parallèles privées d'éléments x. De même pour tout pénédéterminant.

Pour $\kappa = 2$, le déterminant a, en général, si la classe est impaire, deux valeurs, dont l'une, d'ordre de multiplicité ν, a lieu lorsque l'indice non-signant se trouve parmi les ν premiers. Supposons d'abord que ces indices sont signants, i_n étant l'indice critique. On soustrait, d'abord dans la direction 1, de la tranche α la tranche $\alpha + 1$, pour $\alpha = 1, \ldots, p-1$; on exécute ensuite, sur la matrice obtenue, la même opération pour la direction 2, et ainsi de suite jusqu'à la direction $n - 1$. Le seul élément non nul de la dernière tranche de rang n de la nouvelle matrice est l'élément de queue, dont le mineur a une structure mise en évidence dans les exemples suivants, respectivement pour $\nu = 2$, $\nu = 3$:

$$\left\| \begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & - & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & - & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & - & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & - & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right\|,$$

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline - & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & - \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & - & \cdot & \cdot & \cdot & - & \cdot & + \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & - & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right\|$$

les points étant mis pour des zéros et les signes $+$ et $-$ respectivement pour $x - 1$ et $1 - x$. L'expression de ce mineur,

$$(X) \qquad (x - 1)^{p-1} \,.\, \delta\,[1, (-1)^{p-1}],$$

est indépendante de n et de ν. Pour n impaire cette valeur est d'ordre de multiplicité $n - \nu$.

Si, la classe étant impaire, le rang non-signant est inférieur à ν, le procédé de calcul le plus simple consiste à décomposer le déterminant suivant une somme de déterminants de classe $n - 1$: on constate que p des composants ont pour valeur l'expression (X), les autres étant nuls ; d'où l'on déduit aisément la détermination d'ordre de multiplicité ν.

On aura l'expression générale du déterminant en réunissant les valeurs diverses (pour $\kappa = 1, 2$, etc.) par des symboles de Kronecker, comme on a fait antérieurement.

Soit maintenant $g \neq n$, $\nu = n - 1$. Tous les déterminants partiels sont nuls si $p \geqslant 4$.

Pour $\kappa = 2$, $p = 3$, les seuls déterminants partiels différents de zéro sont ceux des couches centrales contenant la direction n ; il y en a $\binom{n-1}{g-1}$, valant chacun

$$(x - 1)^2 \left(1 + 2 \sum_{\gamma=0}^{g-1} \delta_{\upsilon, \gamma}\right) ;$$

d'où l'on aura l'expression de tout superdéterminant de la matrice

$$\left\| \; 1 + (x - 1)\, \overline{\delta}\, (1, [i_n - \kappa]) \overset{n-1}{\underset{1}{\overline{\left\lceil \epsilon \right\rceil}}} \sum_{\alpha=0}^{\kappa-1} \delta\, (i_\epsilon - \alpha, i_n) \; \right\|_p .$$

Les pénédéterminants d'espèce quelconque (paire) N peuvent se calculer, comme les déterminants, soit par addition de tranches, soit par décomposition (¹). Mais il y a des complications qui surgissent en ce qui concerne les signes, surtout si les ν premiers indices, ou bien les $n - \nu$ derniers, ne sont pas de même signance. Suivant la position des N indices signants, le nombre des valeurs distinctes parmi les $\binom{n}{N}$ pénédéterminants d'espèce N est visiblement le plus petit des quatre nombres

$$\nu + 1, \qquad n - \nu + 1, \qquad N + 1, \qquad n - N + 1.$$

Pour ne pas allonger ce travail, nous nous bornerons à cette simple indication et n'exposerons pas ici les encombrantes discussions de signes se présentant dans le calcul des pénédéterminants.

6. Profitons de l'occasion pour revenir, brièvement, sur trois propriétés des déterminants signalées il y a une dizaine d'années.

(¹) Pour un exposé de la décomposition des pénédéterminants, voir : M. Lecat, RENDICONTI CIRCOLO MAT. PALERMO, t. XLIV (1920), pp. 69-81.

a) Si, dans une matrice, la somme des éléments de chaque file est nulle, c'est-à-dire si on a les np^{n-1} *égalités :*

$$\sum_{i_\sigma=1}^{p}(i_1, \ldots, i_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p;\ \sigma = 1, \ldots, n),$$

1° tous les pénédéterminants (d'espèce $\geqslant 2$*) et tous les superdéterminants sont uniformément nuls ;*

2° dans chacune des $p^{n-\kappa}\binom{\nu}{\kappa}$ *couches de classe paire* $\kappa < \nu$*, menées suivant toutes directions signantes, il y a égalité entre les premiers mineurs (en nombre* p^κ*) ;*

3° si $\kappa = \nu$*, la valeur de ces mineurs varie en général d'une de ces couches à une autre.*

Le principe d'addition des tranches rend évidente la première partie de l'énoncé. Pour l'annulation du superdéterminant de genre g, il suffit du reste que soit nulle la somme des éléments de chaque file pour

$$n - g + 1 + \delta_{-1,(-1)^g}$$

directions ; et pour l'annulation des $\binom{n}{\nu}$ pénédéterminants d'espèce ν, il le faut dans $n - \nu + 1$ directions.

Quant à la propriété des mineurs, il suffit de l'établir pour les déterminants de classe paire ($n = \nu$), ce qui est aisé en considérant les sous-matrices relatives à deux points adjacents quelconques et en appliquant encore le principe d'addition des tranches (1).

Il est aisé de voir que le théorème n'a pas lieu pour les permanents (qui sont en quelque sorte des pénédéterminants d'espèce zéro).

---

(1) Cf. nos *Leçons sur la théorie des déterminants à n dimensions*, Gand, Paris, 1910, p. 46.

b) Tout déterminant de genre pair de la matrice

$$\left\| \prod_{1}^{n} \bar{\delta}(i_\nu, j_\nu) \left[(i_1, \ldots, i_n) + \sum_{\nu-1}^{n} \lambda_{i_\nu}^{\nu)} \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{n} \delta(i_\nu, j_\nu) \cdot \prod_{1}^{n}{}_{\sigma,\tau} \left[1 - \delta(i_\sigma, j_\sigma)\, \delta(i_\tau, j_\tau) \right] \right\|_{(i=1,\,..\,,\,p)},$$

où $\sigma \neq \tau$ et où les j sont choisis arbitrairement parmi les p premiers nombres, est indépendant des $n(p-1)$ quantités λ.

Par exemple, le déterminant de genre 2 (mais non celui de genre 3) de matrice

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \begin{matrix} *+\alpha_1 \\ +\alpha_2+\alpha_3 \end{matrix} & \begin{matrix} *+\alpha_1 \\ +\alpha_4+\alpha_3 \end{matrix} & 1 & \begin{matrix} *+\alpha_6 \\ +\alpha_2+\alpha_3 \end{matrix} & \begin{matrix} *+\alpha_6 \\ +\alpha_4+\alpha_3 \end{matrix} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \begin{matrix} *+\alpha_1 \\ +\alpha_2+\alpha_5 \end{matrix} & \begin{matrix} *+\alpha_1 \\ +\alpha_4+\alpha_5 \end{matrix} & 1 & \begin{matrix} *+\alpha_6 \\ +\alpha_2+\alpha_5 \end{matrix} & \begin{matrix} *+\alpha_6 \\ +\alpha_4+\alpha_5 \end{matrix} \end{array} \right\|$$

est indépendant des α, les * représentant chacun des quantités tout à fait arbitraires.

La propriété se démontre d'abord pour le déterminant proprement dit, supposé de classe paire (égale au genre). Pour chaque direction, on ajoute, après multiplication par un facteur approprié, la tranche contenant le point $(j_1, \ldots, j_n)$, qui est l'élément de tête dans la matrice de l'exemple, successivement aux autres tranches parallèles. Pour un genre pair quelconque (la classe pouvant être impaire), la propriété s'en déduit aisément, car les déterminants des couches, ou bien sont et restent nuls après l'opération, ou bien possèdent une structure analogue à celle de la matrice entière.

Un théorème semblable a lieu pour un genre impair, mais moyennant des restrictions dont l'expression est compliquée. Mais pour les pénédéterminants et en particulier pour les déterminants proprement dits de classe impaire, la propriété a évidemment lieu, à condition de n'opérer que dans des tranches signantes. La fonction

$$\left|^{\pm}\ \underset{1}{\overset{\kappa}{\left\lceil\epsilon\right\rceil}}\bar{\delta}\,(i_{\rho_\epsilon}, j_{\rho_\epsilon})\left[(i_1, \ldots, i_n)+\sum_{\alpha=1}^{\kappa}\lambda^{(\alpha)}_{i_\alpha}\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{\epsilon=1}^{\kappa}\delta(\overset{\frown}{i}_{\rho_\epsilon}, j_{\rho_\epsilon})\underset{1}{\overset{\kappa}{\left\lceil\begin{smallmatrix}\sigma\\ \tau\end{smallmatrix}\right\rceil}}\left[1-\delta(\overset{\frown}{i}_{\rho_\sigma}, j_{\rho_\sigma})\cdot\delta(\overset{\frown}{i}_{\rho_\tau}, j_{\rho_\tau})\right]\right|^{\pm}_{[i]}$$

est donc indépendante des paramètres λ.

c) Lorsque, dans une matrice de classe paire $n = 2\nu$ et d'ordre pair $p = 2\pi$, deux éléments sont égaux dès que des indices, en nombre pair, de l'un d'eux, additionnés respectivement aux indices des mêmes rangs de l'autre, donnent des sommes toutes égales à $p + 1$:

1° le déterminant proprement dit est décomposable en un produit

$$\left|(i_1, \ldots, i_n)\right|_{2\pi} = \underset{1}{\overset{2}{\left\lceil\alpha\right\rceil}}\left|(2\pi + 1 - j_1 ; j_2, \ldots, j_n)\right.$$

$$\left.+ (-1)^{\alpha}(j_1, \ldots, j_n)\right|_{\pi}$$

de deux déterminants de classe $2\nu = n$, mais d'ordre π, ce produit ayant le coefficient $4^{\pi(\nu-1)}$;

2° tout déterminant de genre pair 2γ est égal à $4^{\pi(\gamma-1)} . \pi^{n-2\gamma}$ fois la somme des produits deux à deux des déterminants composants, de classe 2γ, qui se correspondent dans les deux matrices écrites comme au 1°.

Pour démontrer le 1° on applique le principe d'addition des tranches. Aux éléments dont le premier indice est φ, on ajoute les éléments correspondants dont le premier indice est $p + 1 - \varphi$, pour $\varphi = 1, \ldots, \pi$. Du déterminant B_1 ainsi obtenu on passe successivement à des déterminants équivalents, $B_2, \ldots, B_n$, en effectuant, pour $k = 2, \ldots, n$, l'opération suivante : on transforme $B_{\kappa-1}$ en B_κ en soustrayant des éléments dont l'indice de rang κ est $p + 1 - \psi$ les éléments correspondants où cet indice est ψ, pour $\psi = 1, \ldots, \pi$; etc. (¹).

(¹) Cf. *Leçons*, pp. 84-86.

Pour le 2°, remarquons que, chaque couche ayant même structure que la matrice entière, on peut décomposer tout déterminant partiel d'un superdéterminant de genre $g = 2\gamma$, d'après la propriété du 1°. En tenant compte du nombre des couches distinctes, on voit que le superdéterminant est égal à une somme de $\binom{n}{g}\pi^{n-g}$ produits, chacun de deux déterminants d'ordre π ; or les matrices de ces déterminants sont deux à deux les couches qui se correspondent dans les deux matrices intervenant dans l'expression ci-dessus. On en conclut aisément la seconde partie du théorème.

La propriété n'a pas lieu pour les pénédéterminants, car si l'espèce diffère de la classe, l'addition des tranches ne peut s'appliquer dans toutes les directions, ce qui est nécessaire.

Remarquons que, suivant une méthode qu'on pourrait qualifier de *paramétrique* et qui se présente tout naturellement dans l'étude des matrices actinales et actinales gauches [1], la matrice étudiée peut se définir de la manière suivante :

$$\left\| \sum_{\frac{\nu}{2}=0}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} (\pm_\sigma)^2 (i_1, \dots, i_{\sigma_1-1}, p+1-i_{\sigma_1}, i_{\sigma_1+1}; \dots; \right.$$

$$\left. i_{\sigma_\nu-1}, p+1-i_{\sigma_\nu}, i_{\sigma_\nu+1}, \dots, i_n) \right\|_p,$$

$(\pm_\sigma)^2$ valant l'unité ou zéro suivant que les σ sont ou ne sont pas tous inégaux entre eux. Tous les éléments d'une même famille (si l'on veut, conjugués entre eux) sont représentés par une même fonction symétrique (nous avons choisi la fonction *somme*) de la famille correspondante des éléments pris dans la matrice générale $\|(i_1, \dots, i_n)\|_p$.

Il importe de noter qu'en réalité cette forme spéciale ne particularise pas la matrice et lui conserve au fond toute sa généralité.

---

[1] Un prochain mémoire sera consacré à l'exposé des nombreuses et intéressantes propriétés des diverses sortes de déterminants actinaux et actinaux gauches, propriétés dont certaines généralisent celle, bien connue, du carré du pfaffien. On verra alors toute l'élégance de la méthode paramétrique, qui permet de simplifier beaucoup les démonstrations.

PROPRIÉTÉS

se rattachant à la génération projective des coniques

PAR

L. CASTEELS
Astronome-adjoint à l'Observatoire royal de Belgique

1. Introduction. Soient ρ, σ, α, β, γ cinq points fixes et δ un point mobile d'une conique Γ. Soient ensuite les droites

$$A \equiv \rho\alpha,\quad B \equiv \rho\beta,\quad C \equiv \rho\gamma,\quad D \equiv \rho\delta,$$
$$A' \equiv \sigma\alpha,\quad B' \equiv \sigma\beta,\quad C' \equiv \sigma\gamma,\quad D' \equiv \sigma\delta,$$

et représentons par $T^\rho \equiv \rho\pi$ et $T^\sigma \equiv \sigma\pi$ les tangentes à Γ en ρ et σ, le point π étant le pôle, par rapport à Γ, de la droite $K \equiv \rho\sigma$.

On obtient ainsi deux faisceaux projectifs $\rho(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ et $\sigma(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, trois hexagones inscrits invariables $T^\rho AA'T^\sigma B'B$, $T^\rho AA'T^\sigma C'C$, $T^\rho BB'T^\sigma C'C$, et trois hexagones inscrits mobiles $T^\rho AA'T^\sigma D'D$, $T^\rho BB'T^\sigma D'D$, $T^\rho CC'T^\sigma D'D$. Si l'on représente par $p^{AB'}$, $p^{A'B}$, $p^{AD'}$, $p^{A'D}$, ... les points d'intersection des rayons A et B', A' et B, A et D', A' et D, ... il est visible que les six droites

$$R^{AB} \equiv p^{AB'}\,p^{A'B},\quad R^{AC} \equiv p^{AC'}\,p^{A'C},\quad R^{BC} \equiv p^{BC'}\,p^{B'C},$$
$$R^{AD} \equiv p^{AD'}\,p^{A'D},\quad R^{BD} \equiv p^{BD'}\,p^{B'D},\quad R^{CD} \equiv p^{CD'}\,p^{C'D},$$

dont les trois premières sont fixes et les autres variables, sont les pascales respectives des hexagones ci-dessus et qu'elles se rencontrent au point π.

Pour orienter plus facilement le lecteur dans nos développements, nous rappelons d'abord certaines propriétés du quadrangle complet $\alpha\beta\gamma\delta$ et du quadrilatère complet $T^\alpha T^\beta T^\gamma T^\delta$, les droites T figurant les tangentes à Γ en α, β, γ, δ.

2. Sur un groupe de trois triangles homologiques deux à deux. Soient les points

$$\alpha' \equiv T^\beta T^\gamma, \quad \beta' \equiv T^\gamma T^\alpha, \quad \gamma' \equiv T^\alpha T^\beta ;$$
$$t^{\alpha\delta} \equiv T^\alpha T^\delta, \quad t^{\beta\delta} \equiv T^\beta T^\delta, \quad t^{\gamma\delta} \equiv T^\gamma T^\delta,$$

pôles par rapport à Γ des droites

$$I^\alpha \equiv \beta\gamma, \quad I^\beta \equiv \gamma\alpha, \quad I^\gamma \equiv \alpha\beta ;$$
$$D^\alpha \equiv \alpha\delta, \quad D^\beta \equiv \beta\delta, \quad D^\gamma \equiv \gamma\delta.$$

On sait, d'une part, que ces points sont distribués sur les droites respectives

$$R^{BC}, R^{CA}, R^{AB} \quad ; \quad R^{AD}, R^{BD}, R^{CD},$$

et, d'autre part, que les polygones complets $T^\alpha T^\beta T^\gamma T^\delta$ et $\alpha\beta\gamma\delta$ ont le même triangle diagonal qui est, au surplus, conjugué (autopolaire) à Γ. Nous désignerons par $\alpha'' = I^\alpha D^\alpha$, $\beta'' = I^\beta D^\beta$, $\gamma'' \equiv I^\gamma D^\gamma$ les sommets de ce triangle et par $P^\alpha \equiv \beta''\gamma''$, $P^\beta \equiv \gamma''\alpha''$, $P^\gamma \equiv \alpha''\beta''$ ses côtés.

Les triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ sont homologiques ; l'axe d'homologie est la pascale X de l'hexagone particulier $I^\alpha T^\gamma I^\beta T^\alpha I^\gamma T^\beta$ inscrit à Γ, et le centre d'homologie, l'intersection x des droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, polaires des points de rencontre $a = I^\alpha T^\alpha$, $b = I^\beta T^\beta$, $c = I^\gamma T^\gamma$ des côtés opposés de l'hexagone. Ainsi, le centre d'homologie x est le pôle de l'axe d'homologie X.

Les triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha''\beta''\gamma''$ sont aussi homologiques, le centre d'homologie étant le point δ, tandis que l'axe Y passe par les points $a' \equiv I^\alpha P^\alpha$, $b' \equiv I^\beta P^\beta$, $c' \equiv I^\gamma P^\gamma$.

Quant aux triangles $\alpha'\beta'\gamma'$ et $\alpha''\beta''\gamma''$, ils sont encore homologiques ; l'axe d'homologie est la tangente mobile T^δ, tandis que le centre est l'intersection y des droites $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$. Or, celles-ci étant les polaires des points a', b', c' qui définissent Y, il en résulte que y est le pôle de Y, que Y contient x et que X passe par y.

Ajoutons que si δ décrit la conique Γ, le centre y parcourt l'axe invariable X, tandis que Y pivote sur le centre fixe x qui correspond à l'axe X.

3. **Sur un premier groupe de trois coniques** : Γ, Δ, E. En coordonnées ponctuelles l'axe X est défini par une identité de la forme

$$(1) \qquad I_1^\alpha I_1^\beta I_1^\gamma + T_1^\alpha T_1^\beta T_1^\gamma \equiv X_1 \Gamma_2,$$

tandis que, en coordonnées tangentielles, l'identité correspondante

$$(1) \qquad \alpha_1\beta_1\gamma_1 + \alpha'_1\beta'_1\gamma'_1 \equiv x_1\Gamma_2$$

fournit l'équation du centre d'homologie x (¹).

Aux triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta''\gamma''$ répondent des identités analogues

$$(2) \qquad \begin{cases} I_1^\alpha I_1^\beta I_1^\gamma + P_1^\alpha P_1^\beta P_1^\gamma \equiv Y_1\Delta_2, \\ \alpha_1\beta_1\gamma_1 + \alpha''_1\beta''_1\gamma''_1 \equiv \delta_1\Delta_2, \end{cases}$$

qui définissent une même conique Δ inscrite au premier de ces triangles et circonscrite au second.

De même les deux identités

$$(3) \qquad \begin{cases} T_1^\alpha T_1^\beta T_1^\gamma + P_1^\alpha P_1^\beta P_1^\gamma \equiv \Gamma_1^\delta E_2, \\ \alpha'_1\beta'_1\gamma'_1 + \alpha''_1\beta''_1\gamma''_1 \equiv y_1 E_2, \end{cases}$$

fournissent l'équation ponctuelle et l'équation tangentielle d'une même conique E inscrite à $\alpha''\beta''\gamma''$ et circonscrite à $\alpha'\beta'\gamma'$.

Cela étant, on peut prouver que la conique Δ, déjà soumise à six conditions : celles de demeurer tangente en α'', β'', γ'' aux trois droites I^α, I^β, I^γ qui passent par ces points, est aussi tangente en y à la droite X.

(¹) Suivant l'usage, la même lettre désigne à la fois un élément géométrique (droite, courbe, point) et le premier membre de l'équation de cet élément en coordonnées ponctuelles ou tangentielles. L'indice mis à une telle lettre représente l'ordre ou la classe de l'élément géométrique.

Il convient de remarquer, à propos des deux identités actuelles, que dans le cas de deux triangles homologiques quelconques, la courbe du second ordre et celle de la seconde classe, qui répondent toujours à de pareilles identités, sont distinctes l'une de l'autre ; la première passe par les six points de rencontre de deux côtés non homologues, la seconde touche les six droites qui joignent deux sommets non homologues. Si elles s'identifient dans les circonstances présentes, cela tient uniquement au fait que les triangles considérés sont inscrits l'un dans l'autre.

Une remarque analogue s'applique au cas des courbes Δ et E dont il est question ci-dessous.

On peut établir, de même, que E est tangente en x à la droite Y.

Au surplus, il est visible que les triangles $\alpha'\beta'\gamma'$ et $\alpha\beta\gamma$ sont conjugués respectivement aux nouvelles coniques Δ et E, et ce fait achève de mettre en pleine lumière la remarquable symétrie qui se fait jour entre les trois figures particulières dont nous venons d'indiquer les propriétés caractéristiques.

Ainsi, la conique Γ et les coniques mobiles Δ et E sont inscrites aux quadrilatères

$$\text{(I)} \qquad T^\alpha T^\beta T^\gamma T^\delta, \qquad I^\alpha I^\beta I^\gamma X, \qquad P^\alpha P^\beta P^\gamma Y$$

et circonscrites aux quadrangles

$$\text{(II)} \qquad \alpha\beta\gamma\delta, \quad \alpha''\beta''\gamma''y, \quad \alpha'\beta'\gamma'x.$$

De plus, les triangles diagonaux des polygones complets (I) ou (II) sont les triangles respectifs $\alpha''\beta''\gamma''$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha\beta\gamma$, conjugués à ces courbes.

Enfin, quand δ décrit Γ, le quadrilatère $I^\alpha I^\beta I^\gamma X$, circonscrit à Δ, et le quadrangle $\alpha'\beta'\gamma'x$, inscrit à E, demeurent invariables. Quant au quadrilatère $P^\alpha P^\beta P^\gamma Y$, circonscrit à E et au quadrangle $\alpha''\beta''\gamma''y$, inscrit à Δ, ils se déforment par tous leurs éléments, chaque côté du quadrilatère étant astreint, toutefois, à pivoter sur l'élément correspondant de la figure $\alpha'\beta'\gamma'x$, tandis que chaque sommet du quadrangle ne cesse de se mouvoir sur le côté correspondant du quadrilatère $I^\alpha I^\beta I^\gamma X$.

Considérons maintenant les faisceaux projectifs $\rho(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ et $\sigma(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

4. **Sur trois faisceaux de coniques** : U^α, U^β, U^γ, **projectifs deux à deux.** Les quartiques dégénérées ABC D' et A'B'CD sont affectées de points doubles communs en ρ et en σ, où la conique Γ ne présente qu'un point simple. De plus, ces trois courbes se coupent, en dehors de ρ et de σ, aux mêmes points α, β, γ, δ du plan. D'où, en vertu d'un théorème connu (¹), une identité de la forme

---

(¹) Voir, par exemple, les *Vorlesungen* de Lindemann-Clebsch, première édition, t. I, p. 341.

(4) $$A_1B_1C'_1D'_1 + A'_1B'_1C_1D_1 \equiv U_2^{\gamma}\Gamma_2,$$

où U_2^{γ} figure une courbe du second ordre passant par les points

(IV) $$\rho, \quad \sigma, \quad p^{AB'}, \quad p^{A'B}, \quad p^{CD'}, \quad p^{C'D}.$$

On a pareillement deux nouvelles coniques U_2^{β} et U_2^{α}, définies par des identités de la forme

(5) $$A_1C_1B'_1D'_1 + A'_1C'_1B_1D_1 \equiv U_2^{\beta}\Gamma_2,$$

(6) $$A_1D_1B'_1C'_1 + A'_1D'_1B_1C_1 \equiv U_2^{\alpha}\Gamma_2,$$

et passant respectivement par les points

(V) $$\rho, \quad \sigma, \quad p^{AC'}, \quad p^{A'C}, \quad p^{BD'}, \quad p^{B'D},$$

(VI) $$\rho, \quad \sigma, \quad p^{BC'}, \quad p^{B'C}, \quad p^{AD'}, \quad p^{A'D}.$$

Les quatre points de chacune des séries (IV), (V), (VI) sont fixes et les deux restants, mobiles.

Ainsi, *les identités* (6), (5), (4) *définissent trois coniques mobiles* U^{α}, U^{β}, U^{γ}, *à sécante commune* $K \equiv \rho\sigma$ *et constituant trois faisceaux dont les bases sont les quaternes de points*

$$[\rho, \sigma, p^{BC'}, p^{B'C}], \quad [\rho, \sigma, p^{AC'}, p^{A'C}], \quad [\rho, \sigma, p^{AB'}, p^{A'B}].$$

Ces faisceaux sont projectifs deux à deux, puisque trois courbes correspondantes sont déterminées par les points $p^{AD'}$, $p^{BD'}$, $p^{CD'}$, qui sont des éléments homologues des ponctuelles perspectives marquées par le rayon mobile D' sur les droites A, B, C passant par le point commun ρ.

5. **Intersections complémentaires de la conique Γ avec les coniques** U. Les coniques Γ, U^{α}, BB' ayant une sécante commune K, celle des sécantes communes associées (1) à K qui se rapporte aux deux premières lignes passe par α', point de concours des sécantes communes associées T^{β} et R^{BC} correspondant

---

(1) Soient m_1, m_2, m_3, m_4 les points de base d'un faisceau de coniques ; nous disons que les droites m_1m_2 et m_3m_4, m_1m_3 et m_2m_4, m_1m_4 et m_2m_3 sont des *sécantes communes associées*.

aux couples (Γ, BB') et (U^α, BB'). On trouve semblablement que la sécante commune de Γ et U^α, associée à K, passe par le point $t^{\alpha\delta}$.

Il en résulte que cette sécante est la droite $P^\alpha \equiv \beta''\gamma''$, l'un des côtés du triangle $\alpha''\beta''\gamma''$ conjugué à Γ.

Pareillement on trouve que les sécantes communes associées à K, se rapportant aux couples (Γ, U^β) et (Γ, U^γ), s'identifient avec les côtés $P^\beta \equiv \gamma''\alpha''$ et $P^\gamma \equiv \alpha''\beta''$ du triangle $\alpha''\beta''\gamma''$.

Le système d'identités du troisième ordre

$$\left\{\begin{array}{l} P_1^\alpha . A_1A'_1 + R_1^{AD}.\Gamma_2 + T_1^\alpha . U_2^\alpha \equiv 0,\\ P_1^\alpha . B_1B'_1 + R_1^{BC}.\Gamma_2 + T_1^\beta . U_2^\alpha \equiv 0,\end{array}\right.$$

et deux systèmes analogues traduisent analytiquement ces résultats.

Ainsi, *les coniques* U^α, U^β, U^γ *coupent la conique* Γ, *en dehors des points* ρ *et* σ, *suivant des couples de points appartenant aux côtés du triangle* $P^\alpha P^\beta P^\gamma$ *conjugué à* Γ.

Il résulte de là que deux des trois sécantes communes associées à la sécante K sont réelles, tandis qu'une troisième est imaginaire.

6. Intersections complémentaires des coniques U, prises deux à deux. Les coniques U ayant une même sécante commune K, cherchons les sécantes communes associées à K pour ces courbes considérées deux à deux.

Déterminons, par exemple, cette seconde sécante commune pour U^α et U^β. Les coniques U^α, U^β et Γ passant toutes trois par ρ et σ, la sécante en question traverse tout d'abord le point γ'', intersection des droites P^α et P^β, qui constituent les sécantes communes associées à K pour les couples (U_α, Γ) et (U^β, Γ). Ensuite, les couples de coniques (U^α, CC') et (U^β, CC') fournissent deux sécantes communes, R^{BC} et R^{AC}, telles que la droite en question passe encore par leur point d'intersection π.

Il en résulte que U^α et U^β se coupent, en dehors de ρ et de σ, en deux points i^γ et j^γ de la droite $R^{\gamma''} \equiv \pi\gamma''$.

Analytiquement ce résultat se traduit par deux identités simultanées de la forme

$$R_1^{\gamma''}.\Gamma_2 + P_1^\beta . U_2^\alpha + P_1^\alpha . U_2^\beta \equiv 0,$$

$$R_1^{\gamma''}.C_1C'_1 + R_1^{AC}.U_2^\alpha + R_1^{BC}.U_2^\beta \equiv 0.$$

Par analogie, U^β et U^γ admettent deux intersections résiduelles i^α et j^α appartenant à la droite $R^{\alpha''} \equiv \pi\alpha''$ et, enfin, U^α et U^γ des intersections résiduelles i^β et j^β situées sur la droite $R^{\beta''} \equiv \pi\beta''$.

Ainsi, *les coniques* U^α, U^β, U^γ *se coupent deux à deux, en dehors des points fixes* ρ *et* σ, *en des couples de points distribués sur la droite* $R^{\alpha''}$ *pour* U^β *et* U^γ, *sur la droite* $R^{\beta''}$ *pour* U^α *et* U^γ, *sur la droite* $R^{\gamma''}$ *pour* U^α et U^β.

En résumé, *les quatre coniques* U^α, U^β, U^γ, Γ, *qui présentent une même sécante commune* K, *admettent, considérées deux par deux, six sécantes communes associées à* K *s'identifiant avec les six côtés du quadrangle complet* $\pi\,\alpha''\beta''\gamma''$.

7. **Pôles, par rapport aux coniques U, de la sécante commune** $K \equiv \rho\sigma$. Chacune des trois coniques U passe par huit couples de points remarquables du plan, notamment : par les points ρ et σ; par les insersections d'un des côtés du triangle $P^\alpha P^\beta P^\gamma$ avec la conique Γ ; par deux points fixes *p* ; par deux points mobiles *p* ; enfin, par les intersections *i* et *j* de deux composantes du groupe des trois droites $R^{\alpha''}$, $R^{\beta''}$, $R^{\gamma''}$ avec les deux coniques restantes.

Cela étant, considérons, par exemple, la conique U^α et désignons par F et G les tangentes à cette courbe en ρ et en σ. L'application du théorème de Pascal à l'hexagone inscrit FBC'GB'C montre que ces tangentes se coupent en un point de la droite $I^\alpha \equiv \beta\gamma$. On verrait de même que l'intersection des droites F et G se fait en un point de la droite $D^\alpha \equiv \alpha\delta$. Il en résulte que le pôle de K par rapport à U^α est le sommet α'' du triangle $P^\alpha P^\beta P^\gamma$.

De là, et par analogie, on conclut que *les sommets* α'', β'', γ'' *du triangle* $P^\alpha P^\beta P^\gamma$, *conjugué à* Γ, *sont les pôles, par rapport aux coniques* U^α, U^β, U^γ, *de la sécante commune* K *de ces dernières courbes.*

8. **Polaires du point π par rapport aux coniques U.** Prenons encore, par exemple, la conique U^α et désignons par *h* l'un quelconque des deux points communs à U^α, P^α et Γ ; puis par H et H' les droites correspondantes ρh et σh. On aura alors une identité de la forme

$$\mathcal{T}_1 . B_1B'_1 + R_1^{BC} . H_1H'_1 + R_1^{BH} . U_2^\alpha \equiv 0,$$

où $\mathcal{T}$ représente la tangente en h à U^α, et R^{BH} la droite qui contient les intersections de B avec H′ et de B′ avec H. Or, R^{BC} et R^{BH} passant par π (cf. n° 1), $\mathcal{T}$ passe également par ce point. Il en résulte que le pôle de P^α par rapport à U^α est le point π.

De là, et par analogie, on conclut que *les polaires, par rapport aux coniques* U^α, U^β, U^γ, *du point* π *sont les côtés* P^α, P^β, P^γ *du triangle conjugué à* Γ.

9. Sur un groupe de trois triangles conjugués aux coniques respectives U^α, U^β, U^γ. Nous allons établir que *les triangles* $\pi\beta''\gamma''$, $\pi\gamma''\alpha''$, $\pi\alpha''\beta''$ *sont conjugués aux coniques respectives* U^α, U^β, U^γ.

En effet, la conique U^α passe par $p^{AD'}$, $p^{A'D}$, $p^{BC'}$, $p^{B'C}$, et les côtés opposés $R^{AD} \equiv p^{AD'}p^{A'D}$ et $R^{BC} \equiv p^{BC'}p^{B'C}$ du quadrangle complet de ces points traversent le point π.

Cela étant, les couples de coniques (AB′, Γ) et (U^α, Γ), à sécante commune K, admettent comme sécantes communes associées les droites I^γ et P^α qui passent par le point γ'', la droite $p^{B'C}p^{AD'}$ qui figure la sécante commune des coniques AB et U^α, associée à K, passe aussi par γ''. De même, la droite $p^{BC'}p^{A'D}$ est astreinte à traverser ce point γ''.

Pareillement, on montrerait que les droites $p^{AD'}p^{BC'}$ et $p^{B'C}p^{A'D}$ passent par le point β''.

Concluons que le triangle $\pi\beta''\gamma''$, étant le triangle diagonal du quadrangle $p^{AD'}p^{A'D}p^{BC'}p^{B'C}$, inscrit dans la conique U^α, est conjugué par rapport à cette courbe.

Une démonstration analogue est applicable aux triangles $\pi\gamma''\alpha''$, $\pi\alpha''\beta''$.

Remarquons aussi que le point α'', par exemple, est le pôle, par rapport aux coniques U^β et U^γ, des sécantes communes $i^\gamma j^\gamma \equiv \pi\gamma'' \equiv R^{\gamma''}$ et $i^\beta j^\beta \equiv \pi\beta'' \equiv R^{\beta''}$, et que, parmi les trois couples de points

$$(i^\alpha, j^\alpha), \; (i^\beta, j^\beta), \; (i^\gamma, j^\gamma),$$

deux sont réels et le troisième imaginaire.....

10. **Sur les lieux des pôles μ^{α}, μ^{β}, μ^{γ} des droites fixes R^{BC}, R^{CA}, R^{AB} par rapport aux coniques mobiles correspondantes U^{α}, U^{β}, U^{γ} et sur les lieux des pôles ν^{α}, ν^{β}, ν^{γ} des droites mobiles R^{AD}, R^{BD}, R^{CD} par rapport aux mêmes courbes.** Les tangentes à une conique quelconque U^{γ}, par exemple, aux points de base $p^{AB'}$ et $p^{A'B}$ du faisceau U^{γ} se coupent en un point de la droite correspondante P^{γ}, tandis que les tangentes à la même courbe aux points variables $p^{CD'}$ et $p^{C'D}$ concourent encore en un point de cette droite. On trouve de la sorte que *les pôles* μ^{α}, μ^{β}, μ^{γ} *des droites fixes*

$$R^{BC} \equiv p^{BC'}p^{B'C}, \quad R^{CA} \equiv p^{AC'}p^{A'C}, \quad R^{AB} \equiv p^{AB'}p^{A'B},$$

ainsi que les pôles ν^{α}, ν^{β}, ν^{γ} *des droites mobiles*

$$R^{AD} \equiv p^{AD'}p^{A'D}, \quad R^{BD} \equiv p^{BD'}p^{B'D}, \quad R^{CD} \equiv p^{CD'}p^{C'D}$$

par rapport aux coniques mobiles correspondantes U^{α}, U^{β}, U^{γ}, *se meuvent sur les côtés* P^{α}, P^{β}, P^{γ} *du triangle* $\alpha''\beta''\gamma''$.

Ajoutons que ces pôles se déplacent simultanément sur d'autres droites remarquables de la figure. Ainsi, μ^{γ} se meut sur le côté I^{γ} du triangle $\alpha\beta\gamma$ inscrit à Γ. En effet, les couples de coniques (AB', Γ) et (U^{γ}, Γ) fournissant deux sécantes communes I^{γ} et P^{γ}, associées à K, la sécante commune correspondant au couple (AB', U^{γ}), qui n'est autre que la tangente en $p^{AB'}$ à U^{γ}, doit passer par le point d'intersection c' de I^{γ} et P^{γ} (n° 2). On verrait de même que ν^{γ} se déplace sur la droite mobile $D^{\gamma} \equiv \gamma\delta$. Le mouvement simultané de ν^{γ} sur P^{γ} et D^{γ} astreint d'ailleurs ce point à décrire une conique, puisqu'il figure l'intersection de deux rayons homologues de deux faisceaux projectifs de centres γ' et γ.

Au surplus, quand δ arrive en α ou β, ν^{γ} coïncide avec α ou β. Ensuite, en faisant tendre δ vers γ, on trouve que ν^{γ} tend aussi vers ce même point, tandis que D^{γ} tend vers sa position limite T^{γ}.

On déduit de là : 1° que *les pôles* $a' \equiv \mu^{\alpha}$, $b' \equiv \mu^{\beta}$, $c' \equiv \mu^{\gamma}$ *se déplacent sur les côtés fixes* I^{α}, I^{β}, I^{γ} *du quadrangle complet* $\alpha\beta\gamma\delta$, ces pôles n'étant autres que les trois points a', b', c' qui définissent l'axe d'homologie Y des triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha''\beta''\gamma''$, c'est-à-dire la polaire, par rapport à Γ, du centre d'homologie y des triangles $\alpha'\beta'\gamma'$ et $\alpha''\beta''\gamma''$ (cf n° 2) ; on sait d'ailleurs que cet axe Y pivote sur le centre d'homologie x des triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ (voir plus loin) ;

2° que *les pôles* ν^{α}, ν^{β}, ν^{γ}, *entraînés sur les côtés mobiles* D^{α}, D^{β}, D^{γ} *du même quadrangle, décrivent des coniques* Σ^{α}, Σ^{β}, Σ^{γ} *passant toutes trois par les sommets* α, β, γ *du triangle* $I^{\alpha}I^{\beta}I^{\gamma}$ *et par les sommets respectifs* α', β', γ' *du triangle* $T^{\alpha}T^{\beta}T^{\gamma}$, *tandis qu'elles sont tangentes à la conique* Γ *aux points respectifs* α, β, γ.

Les coniques Σ^{α}, Σ^{β}, Σ^{γ}, lieux des points ν^{α}, ν^{β}, ν^{γ}, ayant trois points communs α, β, γ, cherchons où elles se coupent deux à deux une quatrième et dernière fois.

Prenons, par exemple, les courbes Σ^{α} et Σ^{β}, et considérons la conique dégénérée $T^{\alpha}T^{\beta}$. Les trois courbes admettant une sécante commune $I^{\gamma} \equiv \alpha\beta$, les sécantes communes associées à I^{γ} pour Σ^{α} et $T^{\alpha}T^{\beta}$, Σ^{β} et $T^{\alpha}T^{\beta}$, Σ^{α} et Σ^{β}, c'est-à-dire les droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, S, passent par un même point. Donc S passe par l'intersection de $\alpha\alpha'$ et de $\beta\beta'$. Mais S traverse également le point γ. D'où $S \equiv \gamma\gamma'$.

Ainsi, *les coniques* Σ^{α}, Σ^{β}, Σ^{γ} *se coupent deux à deux une quatrième fois en un point des droites respectives* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, qui déterminent le centre d'homologie x des triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ (cf. n° 2).

Cette propriété est traduite analytiquement par le système d'identités

$$[\alpha\alpha']_1 . T_1^{\gamma}T_1^{\beta} + [\beta\beta']_1 . \Sigma_2^{\gamma} + [\gamma\gamma']_1 . \Sigma_2^{\beta} \equiv 0,$$

$$[\beta\beta']_1 . T_1^{\alpha}T_1^{\gamma} + [\gamma\gamma']_1 . \Sigma_2^{\alpha} + [\alpha\alpha']_1 . \Sigma_2^{\gamma} \equiv 0,$$

$$[\gamma\gamma']_1 . T_1^{\beta}T_1^{\alpha} + [\alpha\alpha']_1 . \Sigma_2^{\beta} + [\beta\beta']_1 . \Sigma_2^{\alpha} \equiv 0.$$

11. **Coup d'œil d'ensemble sur la figure obtenue.** Le lecteur aura déjà noté la remarquable identité de rôle de chacune des quatre coniques Γ, U^{α}, U^{β}, U^{γ} par rapport aux trois restantes, quand on fait abstraction du mouvement du point générateur δ, ainsi que la symétrie parfaite qui existe entre les quatre groupes

de lignes (Γ, U^α, U^β), (Γ, U^α, U^γ), (Γ, U^β, U^γ), (U^α, U^β, U^γ). A ces groupes répondent d'ailleurs les identités respectives

$$\begin{aligned} R_1^{\gamma''}.\Gamma_2 + P_1^{\beta}.U_2^{\alpha} + P_1^{\alpha}.U_2^{\beta} &\equiv 0, \\ R_1^{\beta''}.\Gamma_2 + P_1^{\gamma}.U_2^{\alpha} + P_1^{\alpha}.U_2^{\gamma} &\equiv 0, \\ R_1^{\alpha''}.\Gamma_2 + P_1^{\gamma}.U_2^{\beta} + P_1^{\beta}.U_2^{\gamma} &\equiv 0, \\ R_1^{\alpha''}.U_2^{\alpha} + R_1^{\beta''}.U_2^{\beta} + R_1^{\gamma''}.U_2^{\gamma} &\equiv 0. \end{aligned}$$

On conçoit que, dans ces conditions, toutes les propriétés de l'un quelconque des quatre groupes se transportent, telles quelles, aux groupes restants. Autrement dit, un même théorème se répète quatre fois dans des circonstances identiques et l'ensemble des quatre théorèmes constitue une propriété caractéristique de l'ensemble des quatre coniques......

Pour finir, nous allons traiter une question assez intéressante, qui se rapporte directement au mode de déplacement du point δ: la détermination des lieux des intersections complémentaires des coniques U, prises deux à deux, et la recherche des propriétés fondamentales qui se rattachent à ces figures nouvelles.

12. **Lieux des intersections complémentaires i^α et j^α, i^β et j^β, i^γ et j^γ des coniques U^α, U^β, U^γ considérées deux à deux**. Considérons, par exemple, les coniques mobiles U^β et U^γ, qui se coupent en deux premiers points, ρ et σ, et dont les deux dernières intersections, i^α et j^α, appartiennent à la droite $R^{\alpha\,\prime} \equiv \pi\alpha''$ pivotant sur le point fixe π (cf. n° 6). Les points de base

$$(\rho,\ \sigma,\ p^{AC'},\ p^{A'C}),\quad (\rho,\ \sigma,\ p^{AB'},\ p^{A'B})$$

de ces coniques admettant deux points communs ρ et σ, les points i^α et j^α sont astreints, en vertu du théorème de Chasles-Jonquières sur les faisceaux projectifs (¹), à décrire une quartique douée d'un point double en ρ et σ et d'un point simple en p^{AC}, $p^{A'C}$, $p^{AB'}$ et $p^{A\ B}$. Il y a lieu toutefois d'examiner de plus près l'allure particulière de cette courbe.

(¹) Voir, par exemple, les C. R., t. 37, p. 273 et t. 45, pp. 320 et 1061.

A cet effet, faisons tendre δ vers α sur la conique Γ. Alors U^{β} et U^{γ} « tendent » vers une courbe commune représentée par la conique dégénérée AA'. Quant au point correspondant α'', il se rapproche indéfiniment, sur la droite fixe $I^{\alpha} \equiv \beta\gamma$, du point a où cette dernière coupe la tangente T^{α} (cf. n° 2). Les positions limites des points i^{α} et j^{α} ne sont autres, enfin, que les intersections λ et λ' de la droite fixe $R^{a} \equiv \pi a$ avec A et A'.

Il résulte de là que notre quartique est astreinte à traverser cinq fois chacune des deux dernières droites. Elle se réduit donc à une courbe dégénérée dont la conique bilinéaire AA' fait partie intégrante.

Ainsi, *les lieux des points* i^{α} *et* j^{α}, i^{β} *et* j^{β}, i^{γ} *et* j^{γ}, *dernières intersections des coniques mobiles* U^{α}, U^{β}, U^{γ} *considérées deux à deux, sont des coniques* V^{α}, V^{β}, V^{γ} *passant toutes trois par les points* ρ *et* σ.

13. **Intersections complémentaires des coniques V avec la conique Γ.** En désignant par O la sécante commune, associée à K pour les coniques V^{α} et Γ, on obtient une identité de la forme

$$O_1 \,.\, U_2^{\beta} + R_1^{\alpha''} \,.\, \Gamma_2 + P_1^{\beta} \,.\, V_2^{\alpha} \equiv 0,$$

montrant que la droite O ne cesse de passer par le point mobile α'', intersection de $R^{\alpha''}$ avec P^{β}. D'où $O \equiv I^{\alpha}$.

Ainsi, *les deux intersections complémentaires des lieux du second ordre* V^{α}, V^{β}, V^{γ} *avec la conique* Γ *sont les points* β *et* γ, α *et* γ, α *et* β.

14. **Polaires du point π par rapport aux coniques V.** En désignant par Q la tangente en β à la conique V^{α}, par exemple, on trouve l'identité :

$$Q_1 \,.\, A_1A'_1 + R_1^{a} \,.\, B_1B'_1 + R_1^{AB} \,.\, V_2^{\alpha} \equiv 0,$$

qui montre que la droite en question passe par le point d'intersection π de $R^{a} \equiv \pi a \equiv \lambda\lambda'$ (cf. n° 12) avec R^{AB}. D'où $Q \equiv \pi\beta$.

Ainsi, *les polaires du point* π *par rapport aux coniques fixes* V^α, V^β, V^γ *sont les côtés du triangle* $\alpha\beta\gamma$.

On en déduit que les coniques V^α, V^β, V^γ se touchent deux à deux aux sommets du triangle $\alpha\beta\gamma$ et que les trois tangentes communes R^α, R^β, R^γ passent par un même point π du plan. Ce fait est mis analytiquement en évidence par l'identité symétrique du troisième ordre :

$$R_1^\alpha \,.\, V_2^\alpha + R_1^\beta \,.\, V_2^\beta + R_1^\gamma \,.\, V_2^\gamma \equiv 0.$$

15. **Pôles de la droite K par rapport aux coniques V.** L'application du théorème de Pascal à l'hexagone BB'J'C'CJ, inscrit à V^α, montre que les tangentes J et J', en ρ et σ, à cette conique, concourent en un point de la droite $R^{BC} \equiv p^{BC}\, p^{B'C}$. Ensuite, l'application du même théorème à l'hexagone inscrit $A[\sigma\lambda]J'A'[\rho\lambda']J$ conduit à conclure que J et J' se rencontrent en un point de la droite $\alpha\alpha'''$, le point α''' figurant la seconde intersection de $\alpha\alpha'$ avec Γ. En effet, $\alpha\alpha'''$ est la corde de contact des tangentes à Γ issues du point $a \equiv T^\alpha I^\alpha$ et les rayons homologues $\rho\lambda'$ et $\sigma\lambda$ se coupent en α''' sur cette conique.

On en déduit que J et J' passent par le point α'.

Ainsi, *les pôles de la droite* K *par rapport aux coniques* V^α, V^β, V^γ *sont les sommets* α', β', γ' *du triangle* $T^\alpha T^\beta T^\gamma$.

16. **Sécantes communes associées à K pour les couples de coniques** (U^α, V^α), (U^β, V^β), (U^γ, V^γ). Désignons par L, M, N les sécantes en question. Les identités du troisième ordre

$$\begin{aligned} L_1 \,.\, A_1A'_1 + R_1^a \,.\, U_2^\alpha + R_1^{AD} \,.\, V_2^\alpha &\equiv 0,\\ M_1 \,.\, B_1B'_1 + R_1^b \,.\, U_2^\beta + R_1^{BD} \,.\, V_2^\beta &\equiv 0,\\ N_1 \,.\, C_1C'_1 + R_1^c \,.\, U_2^\gamma + R_1^{CD} \,.\, V_2^\gamma &\equiv 0,\end{aligned}$$

où (cf. n^{os} 2 et 12) $R^a \equiv \pi a$, $R^b \equiv \pi b$, $R^c \equiv \pi c$, montrent qu'elles concourent en un même point du plan, le point fixe π, centre du faisceau des droites R.

Ensuite, les identités

$$L_1 \,.\, \Gamma_2 + l_1^{\alpha} \,.\, U_2^{\alpha} + P_1^{\alpha} \,.\, V_2^{\alpha} \equiv 0,$$
$$M_1 \,.\, \Gamma_2 + l_1^{\beta} \,.\, U_2^{\beta} + P_1^{\beta} \,.\, V_2^{\beta} \equiv 0,$$
$$N_1 \,.\, \Gamma_2 + l_1^{\gamma} \,.\, U_2^{\gamma} + P_1^{\gamma} \,.\, V_2^{\gamma} \equiv 0,$$

établissent que les mêmes sécantes passent par les points (cf. n° 2) $a' \equiv l^{\alpha}P^{\alpha}$, $b' \equiv l^{\beta}P^{\beta}$, $c' \equiv l^{\gamma}P^{\gamma}$ de la droite Y, axe d'homologie des triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha''\beta''\gamma''$, et polaire par rapport à Γ du centre d'homologie y des triangles $\alpha'\beta'\gamma'$ et $\alpha''\beta''\gamma''$. D'où $Z \equiv R^{a'}$, $M \equiv R^{b'}$, $N \equiv R^{c'}$.

Ainsi, *les sécantes communes, associées à* K *pour les couples de coniques* (U^{α}, V^{α}), (U^{β}, V^{β}), (U^{γ}, V^{γ}), *passent toutes trois par le point* π *et coupent l'axe mobile d'homologie des triangles* $\alpha\beta\gamma$ *et* $\alpha''\beta''\gamma''$ *aux trois points mêmes*, a', b', c', *définissant cet axe.*

Sur les alidades multiples

PAR

P. J. E. GOEDSEELS,
Professeur honoraire de l'Université catholique de Louvain ;
Administrateur-Inspecteur de l'Observatoire royal
et de l'Institut royal météorologique de Belgique.

---

1. *Nombre d'alidades.*

Les cercles gradués faisant partie des instruments topographiques, géodésiques ou astronomiques, sont généralement munis chacun de deux alidades faisant entre elles un angle de 180°. Mais les instruments de haute précision possèdent un nombre d'alidades plus grand ; généralement quatre, parfois six alidades.

Afin de traiter simultanément tous les cas, nous nous occuperons d'une manière générale de n alidades.

2. *Utilité des alidades multiples.*

On s'imagine communément qu'en adaptant n alidades à un même cercle gradué on a surtout en vue de remplacer les lectures uniques par des moyennes arithmétiques de n lectures.

Nous avons examiné en détail, dans notre *Théorie des erreurs d'observation* (4ᵉ édition, 1914), ce qu'il faut penser des moyennes arithmétiques. Nous montrerons ici que l'emploi de n alidades procure un avantage particulier, n'ayant rien de commun avec les avantages attribués, à tort ou à raison, aux moyennes arithmétiques, et que cet avantage particulier consiste 1° dans la diminution du nombre des erreurs systématiques ; 2° dans la facilité de déterminer les erreurs systématiques restantes. Pour donner dès à présent une idée de cet avantage particulier, bornons-nous à signaler que, pour un cercle gradué de précision, à quatre alidades, divisé de 2′ en 2′, et présentant, par conséquent, 10800 traits et par suite 10800 erreurs systématiques ; ce nombre d'erreurs est réduit à 2700 et par conséquent diminué de 8100 erreurs inconnues.

3. *Observations au moyen d'une seule alidade.*

Nous appelons *centre* d'un cercle gradué, et nous représentons généralement par S, le point de rencontre du plan de ce cercle et de l'axe de rotation autour duquel tourne le cercle ou l'alidade.

Ce centre S devrait évidemment coïncider avec le centre géométrique de la graduation. Mais cette condition n'est quasi jamais remplie.

L'écart éventuel entre les deux centres engendre des erreurs dites d'excentricité qu'on peut étudier séparément. Mais cette étude séparée ne présenterait ici aucun avantage.

Pour nous la *correction* d'un trait quelconque, A, comparativement au rayon SR passant par un trait conventionnel quelconque, R, de la graduation, est la quantité, positive ou négative, qu'il faudrait ajouter algébriquement à A pour obtenir la mesure exacte de l'angle $\widehat{RSA}$ commençant au côté SR et finissant au côté SA.

Nous désignerons cette correction par $c(A)$ et nous ne ferons aucune hypothèse sur les imperfections de construction dont elle peut être la conséquence. Nous remarquerons seulement ici, pour mémoire, qu'on a, quel que soit un nombre entier i,

$$c(A) = c(A + 2i\pi),$$

et qu'on a en outre

$$c(R) = 0.$$

De plus, puisque nous avons en vue des instruments de haute précision, nous considérerons le cas où les interpolations entre les traits consécutifs des cercles s'effectuent au moyen d'alidades munies de microscopes micrométriques ou micromètres.

Chacun de ces microscopes est muni d'un fil réticulaire fixé sur un cadre métallique. Ce cadre peut être déplacé au moyen d'une vis micrométrique à petit pas, filetée avec le plus grand soin. A une des extrémités de la vis est fixé un tambour divisé en un certain nombre, t, de parties égales.

Pour évaluer la rotation du tambour et, par suite, de la vis, nous prendrons pour unité une division du tambour. Nous prendrons en outre pour unité de longueur du déplacement du fil réticulaire la quantité parcourue par chaque point de ce fil, lorsque le tambour tourne d'une unité.

L'espace dans lequel on utilise le fil réticulaire mobile est généralement indiqué par un peigne à cinq dents espacées l'une de l'autre d'une longueur égale au pas de la vis, c'est-à-dire à t.

Pour faire passer le fil de la première dent à la dernière, on doit donc tourner de 4 tours. L'instrument est construit de manière que le tambour marque zéro chaque fois que le fil coïncide sensiblement avec la pointe d'une dent.

Nous désignons par m le nombre de divisions dont on doit faire tourner le tambour pour faire passer le fil de la première dent à une position quelconque.

Le nombre des multiples de t contenus dans m est donc indiqué par le peigne ; et la partie supplémentaire $< t$, par le tambour.

La ligne de foi de l'alidade est le rayon issu du centre S et passant par le point du cercle dont l'image se forme sur le fil mobile au moment où m prend une valeur conventionnelle, par exemple $m = 2t$.

Dans cette position le fil passe sensiblement par la pointe de la troisième dent.

Pour qu'un micromètre convienne à l'usage auquel il est destiné, il doit être construit avec une précision suffisante pour que la graduation interpolaire correspondant à la ligne de foi soit une fonction linéaire de m.

Dans cette hypothèse, et en désignant par A_i et m_i les quantités correspondant à une alidade quelconque portant le numéro i, nous avons une relation

$$A_i = a + bm_i.$$

Pour faire usage de cette relation, on doit évidemment connaître les constantes a et b.

Pour les déterminer, on amène le fil sur un trait A'_i visible dans le champ du microscope, et on fait la lecture m'_i.

Puis on amène le fil sur le trait suivant A''_i, et on fait la lecture m''_i.

On a donc, en vertu de la relation ci-dessus :

$$A'_i + c(A'_i) = a + b\, m_i,$$
$$A''_i + c(A''_i) = a + b\, m''_i,$$

En résolvant ces deux équations par rapport à a et b, en introduisant les solutions dans la formule précédente, en appliquant le résultat à la ligne de foi correspondant à $m = 2t.$, en posant

$$L_i = \frac{2t - m'_i}{m''_i - m_i}$$

et

$$A''_i - A'_i = \delta$$

on obtient finalement :

$$A_i = A'_i + c(A'_i) + L_i \{\delta + c(A''_i) - c(A'_i)\}$$

Cette formule donne l'angle commençant au rayon SR et finissant à la ligne de foi.

On peut la considérer comme un cas particulier d'une formule plus générale dans laquelle A_i désignerait l'angle commençant au rayon conventionnel SR mais finissant à un rayon invariablement lié à la ligne de foi.

Il suffirait évidemment d'ajouter au second membre une constante convenable pour obtenir la formule correspondant à ce cas général.

En mettant cette constante sous la forme $-\frac{i-1}{n} 2\pi + k_i$ nous obtenons.

$$(1)\quad A_i = A'_i - \frac{i-1}{n} 2\pi + k_i + c(A'_i) + L_i \{\delta + c(A''_i) - c(A'_i)\}.$$

Nous considérerons, dans la suite, l'angle A_i calculé par cette formule comme l'*indication* d'une alidade quelconque portant le numéro i.

4. Alidades multiples.

Lorsqu'un cercle est muni d'un nombre quelconque, n, d'alidades, nous numérotons ces dernières de 1 à n.

Ces alidades sont invariablement liées entre elles, de sorte qu'on a, quel que soit i,

$$(2)\qquad A'_i = A'_1 + \frac{i-1}{n} 2\pi.$$

Les constantes k_i sont choisies par hypothèse, de manière que tous les angles A_i soient égaux entre eux, et soient la mesure d'un angle au centre $\widehat{VSA}$ ayant une origine conventionnelle quelconque, SV, invariablement liée au cercle, et une extrémité, SA, invariablement liée aux micromètres. De cette manière, les n valeurs fournies par la formule (1) sont n valeurs d'un même angle $\widehat{VSA}$.

En désignant par A la moyenne arithmétique de ces valeurs, par k la moyenne arithmétique des constantes k_i et par L la moyenne arithmétique des quantités L_i ; en tenant compte de la dernière formule ci-dessus ; et en posant

$$(3) \qquad C(A'_1) = \frac{1}{n}\left[c(A'_1 + \frac{i-1}{n}2\pi)\right]_{i=1}^{i=n},$$

nous obtenons :

$$(4)\ A = A'_1 + k + C(A'_1) + L\,\delta + \frac{1}{n}\left[L_i\,\{c(A''_i) - c(A'_i)\}\right]_{i=1}^{i=n}.$$

Dans la pratique, l'expression

$$\frac{1}{n}\left[L_i\{c(A''_i) - c(A'^{i})\}\right]_{i=1}^{i=n},$$

est sensiblement égale à

$$L\{C(A''_1) - C(A'_1)\},$$

et on peut écrire :

$$(5) \quad A = A'_1 + k + C(A') + L\,\delta + L\,\{C(A''_1) - C(A'_1)\}.$$

Lorsque les quantités L_i sont très voisines de zéro, la moyenne L l'est également, et la formule ci-dessus se réduit à

$$(6) \qquad A = A'_1 + k + C(A'_1) + L\,\delta.$$

Les deux dernières formules ci-dessus nous permettent de mettre en lumière les avantages des alidades multiples.

Nous avons d'abord, en vertu de la formule (3), quel que soit un multiple $\frac{p}{n}2\pi$

$$C(A'_1 + \frac{p}{n}2\pi) = C(A'_1).$$

Par conséquent, le nombre des valeurs différentes $C(A'_1)$ figurant dans la formule (5) est n fois moindre que le nombre des valeurs différentes $c(A'_1)$ figurant dans la formule (1) correspondant à une alidade unique.

D'autre part, la relation (6) est une équation très simple permettant de déterminer les diverses valeurs de $C(A'_1)$.

L'observatoire royal de Belgique a publié dans ses ANNALES (Nouvelle Série. Annales astronomiques, T. XIV, Fasc. II, pp. 138-143) les 2700 valeurs de $k_2 + C(A'_1)$ obtenues pour le cercle méridien de l'établissement, au lieu de 10800 valeurs de $c(A'_1)$.

5. *Détermination des corrections* ($C(A'_1)$.

Pour exposer cette question, nous prendrons comme exemple le cercle méridien indiqué ci-dessus. Cet instrument possède deux cercles gradués centrés sur le même axe et invariablement liés l'un à l'autre, un cercle principal et un cercle auxiliaire.

Le cercle principal est divisé de 2′ en 2′ sur tout son pourtour, et fait corps avec l'axe de rotation. Le cercle auxiliaire peut être calé sur cet axe dans n'importe quelle position. Il est divisé de 1° en 1°. De plus, les intervalles (0°, 1°02′), (90°, 91°02′), (180°, 181°02′) et (270°, 271°02′) sont divisés de 2′ en 2′.

Les graduations sont numérotées de manière que les indications varient dans le même sens, lorsque les deux cercles tournent simultanément. Chacun des cercles possède quatre micromètres suffisamment bien équidistants pour que les quatre intervalles (A'_1, A''_1), $(A'_1 + 90°, A''_1 + 90°)$, $(A'_1 + 180°, A''_1 + 180°)$, $(A'_1 + 270°, A''_1 + 270°)$ se trouvent toujours en face des microscopes.

Le cercle principal est muni en outre d'un microscope non micrométrique appelé *viseur*, permettant de lire facilement la valeur de $A'_1 + k$, en supposant qu'on ait pris pour la constante arbitraire k un multiple arbitraire de δ tel que le trait $A'_1 + k$ soit précisément celui qui se présente dans le champ de ce viseur.

Pour éviter les malentendus nous écrirons, pour le cercle auxiliaire, la formule (5) sous la forme

$$(7) \quad a = a'_1 + k_a + C_a(a'_1) + L_a(\delta) + L_a \{C_a(a''_1) - C_a(a'_1)\}.$$

Donnons aux deux cercles une position quelconque permettant de négliger les derniers termes des formules (5) et (7). Nous avons :

$$A = A'_1 + k + C(A'_1) + L(\delta).$$
$$a = a'_1 + k_a + C_a(a'_1) + L_a(\delta).$$

Imprimons aux deux cercles une rotation inconnue ω, aussi voisine que possible de 1° ou de 2'.

Nous avons, par exemple, pour une rotation d'environ 2',

$$A + \omega = A'_1 + k + 2' + C(A'_1 + 2') + L'(\delta),$$
$$a + \omega = a'_1 + k_a + 2' + C_a(a'_1 + 2') + L'_a(\delta).$$

En posant

$$a_1 = \{(L_a - L'_a) - (L - L')\}\,\delta,$$

nous déduisons des cinq rotations ci-dessus :

$$(8) \qquad C(A'_1 + 2') - C(A'_1) - C_a(a'_1 + 2') + C_a(a'_1) = \alpha_1.$$

Pour une rotation d'environ 1° on a de même une équation

$$(9) \qquad C(A'_1 + 1^\circ) - C(A'_1) - C_a(a'_1 + 1^\circ) + C_a(a'_1) = \beta_1.$$

L'équation (9) sert pour déterminer les valeurs de $C(A'_1)$ de degré en degré.

La précédente permet ensuite de déterminer les valeurs de $C(A'_1)$ de 2' en 2'.

Pour les angles de 1° en 1° nous avons :

$$C(1^\circ) - C(0^\circ) = C_a(1^\circ) - C_a(0) + \alpha_1$$
$$C(2^\circ) - C(1^\circ) = C_a(1^\circ) - C_a(0) + \alpha_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$C(90^\circ) - C(80^\circ) = C_a(1^\circ) - C_a(0) + \alpha_{90}.$$

Nous avons en outre :

$$C(0^\circ) = C(90^\circ)$$

Nous avons donc en tout 91 équations et 93 inconnues.

Mais les corrections dépendent évidemment du repère SR choisi pour le cercle principal, et du repère analogue *sr* du cercle auxiliaire. Puisque ces repères peuvent être choisis arbitrairement, on peut prendre arbitrairement une des inconnues figurant dans les premiers membres, et une des deux inconnues $C_a(1^\circ)$ et $C_a(0)$.

Le système est donc entièrement déterminé. La résolution en est du reste extrêmement simple. On a en effet, en additionnant les équations membre à membre,

$$C_a(1^\circ) - C_a(0) = \frac{1}{90}\Big[-\alpha_i\Big]_{i=1}^{i=90}.$$

De plus, pour trouver ensuite une inconnue quelconque $C(p^\circ)$, il suffit d'additionner les p premières équations. On trouve ainsi :

$$C(p^\circ) = C(0) + p\,C_a(1^\circ) - p\,C_a(0) + \Big[\alpha_i\Big]_{i=1}^{i=p}.$$

On voit ainsi qu'on peut prendre arbitrairement par exemple $C_a(0) = 0$, et prendre ensuite arbitrairement $C(0)$, de manière que tous les $C(p^\circ)$ soient positifs.

Le calcul des corrections de $2'$ en $2'$ se fait ensuite d'une manière analogue. Nous avons, par exemple,

$$\begin{aligned} C(7^\circ 02') - C(7^\circ) &= C_a(02') - C_a(0) + \beta_1, \\ C(7^\circ 04') - C(7^\circ 02') &= C_a(02') - C_a(0) + \beta_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C(8^\circ) - C(7^\circ 58') &= C_a(02') - C_a(0) + \beta_{30}. \end{aligned}$$

Puisqu'on a déterminé préalablement $C(7^\circ)$ et $C(8^\circ)$ ainsi que $C_a(0)$, il y a 30 inconnues et 30 équations, de sorte que le système ne renferme plus aucune inconnue arbitraire.

Remarque. On nous a signalé à plusieurs reprises que dans les applications de la formule (5) aux observations, on peut négliger le dernier terme de cette formule lorsqu'un au moins des deux facteurs, L et $\{C(A''_1) - C(A'_1)\}$, de ce terme a une très petite valeur ; et faire usage, dans ce cas, de la formule (6).

Le petit calcul qu'on évite ainsi est insignifiant, à tel point que nous préconisons l'emploi exclusif de la formule (5) dans tous les cas.

6. *Choix de la constante* k.

Lorsqu'on veut faire usage, dans une série d'observations, d'un instrument pour lequel les valeurs de $C(A_1)$ ont été déterminées, et qui est muni d'un viseur, on commence par évaluer à l'estime, en chiffres ronds, la distance angulaire entre le viseur et le premier micromètre. Si on trouve ainsi une valeur k', on pose :

$$k = k' + k'',$$

de manière à ramener le choix de k à celui de k'', et à pouvoir lire dans le viseur la quantité $A'_1 + k'$ multiple de δ.

Pour choisir k'' on sait généralement qu'en dirigeant la ligne de visée d'une lunette invariablement liée au cercle vers certains points connus, on doit obtenir pour A des valeurs connues.

Pour le cercle méridien, par exemple, destiné à donner les déclinaisons, il faut qu'en visant un point céleste de déclinaison D on obtienne $A = D$. Cette condition suffit pour être à même de déterminer k''.

NOTES DE GÉOMÉTRIE

PAR **J. NEUBERG.**

A l'occasion de recherches sur la géométrie non-euclidienne du triangle, D$^{\text{r}}$ L. Berwald avait trouvé des théorèmes de géométrie euclidienne qui dualisent certaines propositions de M. Brocard. Consulté en mai et juin 1914 sur la nouveauté de ses résultats, je rédigeai immédiatement mes propres développements sur une figure considérée par mon correspondant ; ils sont l'objet d'une première note.

I. SUR DEUX TRIPLES DE CERCLES

Notations. — a, b, c désignent les côtés, limités ou indéfinis, du *triangle fondamental* ABC ; p, p_a, p_b, p_c, le demi-périmètre et les différences $p - a$, $p - b$, $p - c$; A, B, C, les angles de ABC ; O et R, le centre et le rayon du cercle circonscrit ; I et r, le centre et le rayon du cercle inscrit, qui touche a, b, c aux points D, E, F ; q_a, q_b, q_c les bissectrices intérieures AQ_a, BQ_b, CQ_c ; q'_a, q'_b, q'_c, les bissectrices extérieures AQ'_a, BQ'_b, CA'_c ; q, la droite $Q'_aQ'_bQ'_c$.

1. Décrivons, à l'intérieur des angles du triangle ABC, les cercles :

M_a touchant c en B et b en B',
M_b » a en C et c en C',
M_c » b en A et a en A' ;

les rayons de ces cercles sont :

$$\rho_a = c \operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \frac{cr}{p_a}, \quad \rho_b = \frac{ar}{p_b}, \quad \rho_c = \frac{br}{p_c}. \qquad (1)$$

Soient S_a, S_b, S_c les centres de similitude externe des couples de cercles M_bM_c, M_cM_a, M_aM_b, et soit g l'axe de similitude $S_aS_bS_c$. Le point S_a est situé sur la tangente commune CA′ ; si $a > b > c$, ce qui entraîne $\rho_b > \rho_c$, les relations

$$\frac{S_aC}{S_aA'} = \frac{\rho_b}{\rho_c}, = \frac{ap_c}{bp_b},\ S_aA' = S_aC - b$$

donnent :

$$S_aC = \frac{abp_c}{ap_c - bp_b},\ S_aB = \frac{a^2p_a}{ap_c - bp_b}.$$

D'où et par analogie :

$$\frac{S_aB}{S_aC} = \frac{a}{p_c} : \frac{b}{p_a},\ \frac{S_bC}{S_bA} = \frac{b}{p_a} : \frac{c}{p_b},\ \frac{S_cA}{S_cB} = \frac{c}{p_b} : \frac{a}{p_c}. \qquad (2)$$

Des égalités (2) on conclut facilement l'équation de g en coordonnées barycentriques (x, y, z) :

$$\frac{c}{p_b}x + \frac{a}{p_c}y + \frac{b}{p_a}z = 0 \qquad (3)$$

et celle en coordonnées normales (α, β, γ) :

$$\frac{\alpha}{bp_b} + \frac{\beta}{cp_c} + \frac{\gamma}{ap_a} = 0. \qquad (3')$$

Pour abréger l'écriture, posons :

$$d = \cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{pp_a}{b_c},\ e = \cos^2 \frac{1}{2} B,\ f = \cos^2 \frac{1}{2} C;$$

l'équation (3′) prend ainsi la forme

$$\frac{\alpha}{e} + \frac{\beta}{f} + \frac{\gamma}{d} = 0, \qquad (4)$$

et l'on a pour les coordonnées normales de S_a, S_b, S_c :

$$(o, f, -d), \quad (-e, o, d), \quad (e, -f, o). \qquad (5)$$

2. Construisons encore, à l'intérieur des angles de ABC, les cercles :

M'_a touchant b en C et c en C″,
M'_b » c en A et a en A″,
M'_c » a en B et b en B″ ;

leurs rayons sont :

$$\rho'_a = b \operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \frac{br}{p_a}, \ \rho'_b = \frac{cr}{p_b}, \ \rho'_c = \frac{ar}{p_c}, \qquad (6)$$

et l'on a :

$$\rho'_a \rho'_b \rho'_c = 4Rr^2 = \rho_a \rho_b \rho_c.$$

Désignons par S_a, S_b, S'_c les centres de similitude externe des couples de cercles $M'_b M'_c$, $M_c M'_a$, $M_a M'_b$, et par g' l'axe de similitude $S'_a S'_b S'_c$. On a les égalités :

$$\frac{S_a B}{S_a C} = \frac{c}{p_a} : \frac{a}{p_b}, \ \frac{S'_b C}{S_b A} = \frac{a}{p_b} : \frac{b}{p_c}, \ \frac{S'_c A}{S_c B} = \frac{b}{p_c} : \frac{c}{p_a}; \qquad (7)$$

d'où l'on conclut l'équation de g' en coordonnées barycentriques :

$$\frac{b}{p_c} x + \frac{c}{p_a} y + \frac{a}{p_c} z = 0, \qquad (8)$$

et celle en coordonnées normales :

$$\frac{\alpha}{f} + \frac{\beta}{d} + \frac{\gamma}{e} = 0; \qquad (9)$$

les coordonnées normales de S'_a, S'_b, S'_c, sont :

$$(o, d, -e), \quad (-f, o, e), \quad (f, -d, o). \qquad (10)$$

3. Connaissant les coordonnées des points S_a, S_b, ..., on trouve facilement les équations des droites $S_b S'_c \equiv g_a$, $S_c S'_a \equiv g_b$, $S_a S'_b \equiv g_c$:

$$d\alpha + f\beta + e\gamma = 0, \ f\alpha + e\beta + d\gamma = 0, \ e\alpha + d\beta + f\gamma = 0. \qquad (11)$$

4. Considérons encore la droite k, d'équation

$$d\alpha + e\beta + f\gamma = 0. \qquad (12)$$

On sait que les droites AD, BE, CF concourent en un point J, de coordonnées normales $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{e}$, $\frac{1}{f}$; J est le *point de Gergonne* du triangle ABC et le *point de Lemoine* du triangle DEF. La droite k passe par les points d'intersection D', E', F' des côtés correspondants des triangles homologiques ABC et DEF ; autrement dit, c'est la polaire trilinéaire du point J par rapport au triangle ABC. Elle est aussi la polaire de J par rapport au cercle I et la *droite de Lemoine* du triangle DEF.

L'axe d'homologie des triangles *abc* et $g_a g_b g_c$ a pour équation

$$\frac{\alpha}{d}+\frac{\beta}{e}+\frac{\gamma}{f}=0. \tag{13}$$

5. Avant de passer au cercle de Brocard, je vais présenter, sous une forme peut-être nouvelle, des remarques faites par Lemoine (¹) et par Socolof (²) sur certains groupes de points ou de droites.

A. Soient : X, Y, Z des coordonnées trilinéaires quelconques ; λ, μ, ν les coordonnées d'un *point fondamental* L ; L_a, L_b, L_c et L'_a, L'_b, L'_c les points d'intersection des côtés *a, b, c* du triangle de référence ABC avec les droites AL, BL, CL et avec la *droite unitaire* $X+Y+Z=0$.

Les droites $L_bL'_c$, $L_cL'_a$, $L_aL'_b$ rencontrent respectivement *a, b, c* en des points N_a, N_b, N_c tels que les droites AN_a, BN_b, CN_c concourent en un point N qui a pour coordonnées $\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}, \frac{1}{\lambda}$. De même, si N'_a, N'_b, N'_c sont les points où *a, b, c* coupent les droites L'_bL_c, L'_cL_a, L'_aL_b, les droites AN'_a, BN'_b, CN'_c concourent en un point N', de coordonnées $\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu}$.

N et N' sont les *Brocardiens* du point L.

Les droites BN_b et CN'_c, CN_c et AN'_a, AN_a et BN'_b se coupent respectivement en des points P_a, P_b, P_c qui ont pour coordonnées :

$$(\lambda, \nu, \mu), \quad (\nu, \mu, \lambda), \quad (\mu, \lambda, \nu)\,;$$

ces points sont les *semi-réciproques* de L.

Enfin les droites AP_a, BP_b, CP_c concourent en un point P, de coordonnées $\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}$; P est la *réciproque* de L.

Dans le système des coordonnées barycentriques, si L est le point de Lemoine du triangle ABC, N et N' sont les points de

---

(¹) Voir : NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, 1885, p. 201 ; MATHESIS, 1893, p. 252.

(²) Voir : MATHESIS, 1892, p. 193 et 1893, p. 166.

Brocard, et P_a, P_b, P_c sont les sommets du premier triangle de Brocard de ABC.

B. Appelons maintenant L_a, L_b, L_c les points où une *droite fondamentale* l, d'équation $\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0$, coupe les côtés a, b, c de ABC, et soient toujours L'_a, L'_b, L'_c les points d'intersection de ces côtés avec la droite unitaire.

Les droites $L_bL'_c$, $L_cL'_a$, $L_aL'_b$ rencontrent a, b, c en des points N_a, N_b, N_c situés sur une même droite n, de coordonnées $\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}, \frac{1}{\lambda}$. De même les points d'intersection N'_a, N'_b, N'_c de a, b, c avec les droites L'_bL_c, L'_cL_a, L'_aL_b sont situés sur une même droite n', de coordonnées $\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu}$.

Les droites n et n' sont les *Brocardiennes* de l.

Les coordonnées des droites $N_bN'_c$, $N_cN'_a$, $N_aN'_b$ sont

$$(\lambda, \nu, \mu), \quad (\nu, \mu, \lambda), \quad (\mu, \lambda, \nu),$$

ces droites sont les *semi-réciproques* de l. Elles rencontrent a, b, c en trois points de la droite $\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}\right)$, qui est la *réciproque* de l.

Si X, Y, Z sont des coordonnées normales, la droite unitaire passe par les pieds Q'_a, Q'_b, Q'_c des bissectrices extérieures du triangle ABC. Pour la droite fondamentale adoptons la polaire k du point J par rapport au cercle inscrit I. La comparaison des équations (3) et (11) montre que les droites g et g' sont les Brocardiennes de k ; donc les points S_a, S_b, S_c, S'_a, S'_b, S'_c sont situés respectivement sur les droites $E'Q'_c$, $F'Q'_a$, $D'Q'_b$, Q'_bF', Q'_cD', Q'_aE'. Les droites g_a, g_b, g_c sont les semi-réciproques de k. Remarquons aussi que les points (g_a, q_a), (g_b, q_b), (g_c, q_c) appartiennent à la droite k.

II. DUALISATION DU CERCLE DE BROCARD

Des études sur la géométrie non-euclidienne du triangle avaient conduit Dr L. Berwald à une parabole que l'on peut regarder comme une transformée par dualité de la circonférence de Brocard. Cette conique est tangente aux droites

$$k, g, g', g_a, g_b, g_c$$

qui ont été définies ci-dessus. Ce géomètre m'avait communiqué ses recherches en 1914 et 1915 ; j'ignore s'il les a publiées.

C'est d'une manière élémentaire que je vais établir et parfois compléter les résultats trouvés par M. Berwald.

6. Dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. XXXIX, p. 205, j'ai considéré l'équation barycentrique du cercle de Brocard (1) :

$$b'c'x^2 + c'a'y^2 + a'b'z^2 - a'yz - b'^2zx - c'^2xy = 0,$$

ou

$$a' : b : c' = a^2 : b^2 : c^2.$$

La présente note s'occupe de l'équation analogue en coordonnées tangentielles

$$W \equiv efu^2 + fdv^2 + dew^2 - e^2wu - f^2uv = 0\,;$$

u, v, w désignent ici les coefficients de l'équation d'une droite en coordonnées normales (α, β, γ), et d, e, f sont les coordonnées $\cos^2 \frac{1}{2} A$, $\cos^2 \frac{1}{2} B$, $\cos^2 \frac{1}{2}$ de la droite k.

De ce qu'on a vu pour le cercle de Brocard en coordonnées ponctuelles on peut conclure immédiatement douze tangentes de la conique W, à savoir :

(I) Les deux droites définies par le système d'équations

$$V \equiv duw + ewu + fuv = 0, \qquad \lambda \equiv u + v + w = 0\,;$$

(II) la droite k (d, e, f) ;

(III) les droites $g\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{f}, \frac{1}{d}\right.$ et $g'\left(\frac{1}{f}, \frac{1}{e}, \frac{1}{d}\right)$;

(IV) la droite qui a pour coordonnées

$$d(e + f - d), \qquad e(f + d - e). \qquad f(d + e - f)\,;$$

---

(1) Cette équation se trouve dans un travail inédit dont L. Ripert m'avait communiqué le manuscrit.

Ce n'est que tout récemment que j'ai eu connaissance d'un article des NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, 1905, p. 355, où M. Auric étudie la même équation.

(V) les droites $g_a(d, f, e)$, $g_b(f, e, d)$, $g_c(e, d, f)$;
(VI) les droites dont les cordonnées sont

$$(e + f - d, e, f), \quad (d, f + d - e, f), \quad (d, e, d + e - f).$$

Ce tableau montre que la conique W touche la droite k, les Brocardiennes g et g' et les semi-réciproques g_a, g_b, g_c de k.

Les équations $V = 0$, $\lambda = 0$ représentent respectivement le cercle inscrit au triangle ABC et le point unitaire I. On en conclut que le système de ces équations définit les droites isotropes passant par I ; ce point est donc un foyer de W.

On a :

$$\begin{aligned} e + f - d &= \cos^2 \frac{1}{2} B + \sin^2 \frac{1}{2} A - \sin^2 \frac{1}{2} B \\ &= \cos^2 \frac{1}{2} B + \sin \frac{1}{2} (A + C) \sin \frac{1}{2} (A - C) \\ &= \cos \frac{1}{2} B \left(\sin \frac{1}{2} (A + C) + \sin \frac{1}{2} (A - C) \right) \\ &= 2 \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2} A. \end{aligned}$$

De là et des valeurs analogues de $f + d - e$ et $d + e - f$ on conclut facilement que les coordonnées de la droite (IV) sont proportionnelles aux coordonnées sin A, sin B, sin C de la droite de l'infini.

Par conséquent : *la conique* W *est une parabole qui a pour foyer le point* I *et pour tangente au sommet la droite k.*

D'après la formule donnant en coordonnées normales la distance d'un point à une droite, le paramètre de la parabole W a pour expression

$$\frac{4r \Sigma \cos^2 \frac{1}{2} A}{\sqrt{\Sigma^2 \cos^2 \frac{1}{2} A - 12 \cos^2 \frac{1}{2} A \cos^2 \frac{1}{2} B \cos^2 \frac{1}{2} C}}.$$

7. Désignons par Δ le cercle de Brocard du triangle DEF ; il a pour diamètre la droite IJ.

Dans ce qui suit, il ne sera question que de pôle et polaire par rapport au cercle DEF. D'après un théorème de Poncelet, la polaire réciproque de Δ est une conique qui a pour foyer le centre I du cercle directeur de la transformation et pour directrice la polaire du centre M du cercle transformé Δ. Comme elle est symétrique par rapport à la ligne IM des centres et qu'elle touche les polaires des points I et J de Δ, cette courbe se confond avec la conique W.

8. La polarisation des autres éléments du cercle de Brocard présente quelque intérêt.

Soient θ l'angle de Brocard, Ω_1 et Ω_2 le premier et le second point de Brocard du triangle DEF, de sorte que si D, E, F désignent les angles de ce triangle, on a :

$$\cot \theta = \cot D + \cot E + \cot F = \operatorname{tg} \frac{1}{2} A + \operatorname{tg} \frac{1}{2} B + \operatorname{tg} \frac{1}{2} C,$$

$$\theta = \Omega_1 DE = \Omega_1 EF = \Omega_1 FD = DE\Omega_2 = EF\Omega_2 = FD\Omega_2. \quad (14)$$

La circonférence DEF recoupe les droites $D\Omega_1$, $E\Omega_1$, $F\Omega_1$ en des points E_1, F_1, D_1, et les droites $D\Omega_2$, $E\Omega_2$, $F\Omega_2$ en des points F_2, D_2, E_2. Des égalités (14) on conclut facilement que les angles au centre I :

$$DID_1, \quad EIE_1, \quad FIF_1, \quad D_2ID, \quad E_2IE, \quad F_2IF$$

sont égaux à 2θ.

Pour abréger le discours, désignons par ψ ou $-\psi$ une rotation du plan ABC sur lui-même autour du point I respectivement dans le sens positif DEF ou dans l'autre sens, l'angle de rotation étant égal à 2θ. Ces deux rotations font coïncider le triangle DEF respectivement avec les triangles $D_1E_1F_1$, $D_2E_2F_2$. On constate en même temps que Ω_1 est le second point de Brocard de $D_1E_1F_1$ et que Ω_2 est le premier point de Brocard de $D_2E_2F_2$; autrement dit, Ω_2 et Ω_1 sont des points homologues des triangles égaux DEF, $D_1E_1F_1$, et aussi des triangles égaux $D_2E_2F_2$, DEF. On retrouve aussi les relations : $I\Omega_2 = I\Omega_1$, *angle* $\Omega_2 I \Omega_1 = 2\theta$ (¹).

Les polaires t_1, t_2 des points Ω_1, Ω_2 sont également des éléments

---

(¹) Les propriétés des triangles $D_1E_1F_1$ et $D_2E_2F_2$ ont été signalées par Dr W. Godt (Lübeck).

homologues des triangles égaux DEF, $E_1F_1D_1$. La première, axe perspectif des triangles DEF et $E_1F_1D_1$ passe par les points

$$(EF,\ F_1D_1) \equiv T_a, \quad (FD,\ D_1E_1) \equiv T_b, \quad (DE,\ E_1F_1) \equiv T_c\ ;$$

par analogie, t_2 passe par les points

$$(EF,\ D_2E_2) \equiv T'_a, \quad (FD,\ E_2F_2) \equiv T'_b, \quad (DE,\ F_2D_2) \equiv T'_c.$$

Mais ces points peuvent aussi être définis ainsi :

$$\begin{array}{lll}(EF,\ t_2) \equiv T'_a, & (FD,\ t_2) \equiv T'_b, & (DE,\ t_2) \equiv T'_c, \\ (E_1F_1,\ t_1) \equiv T_c, & (F_1D_1,\ t_1) \equiv T_a, & (D_1E_1,\ t_1) \equiv T_b\ ;\end{array}$$

on voit par là que les points T'_a et T_c, T'_b et T_a, T'_c et T_b sont des éléments correspondants des triangles égaux DEF, $D_1E_1F_1$; par suite la rotation ψ fait coïncider T'_a, T'_b, T'_c respectivement avec T_c, T_a, T_b. Donc les droites T'_aT_c, T'_bT_a, T'_cT_b sont vues du point I sous l'angle 2θ, et comme les droites t_1, t_2 qui sont perpendiculaires aux droites $I\Omega_1$, $I\Omega_2$ font entre elles l'angle $\pi - 2\theta$, on conclut que les droites

$$t_1,\ t_2,\ T'_aT_c,\ T'_bT_a,\ T'_cT_b$$

touchent une même parabole W′ de foyer I.

La tangente au sommet de W′ passe par les projections G_1, G_2 du foyer I sur les tangentes t_1, t_2. Or la polaire de G_1 est la droite Ω_1J qui est perpendiculaire à la droite $I\Omega_1$; de même la polaire de G_2 est la droite Ω_2J. Il en résulte que la droite G_1G_2 coïncide avec la polaire K de J ; donc W′ se confond avec W.

9. Soient $A_1B_1C_1$ le triangle des tangentes au cercle DEF en D_1, E_1, F_1, et $A_2B_2C_2$ celui des tangentes en D_2, E_2, F_2. Les rotations ψ et $-\psi$ font coïncider ABC respectivement avec $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$.

Les triangles DEF, $B_1C_1A_1$ ont pour centre d'homologie le point Ω_1. Leur axe d'homologie est la droite t_1 ; en effet : 1° les droites EF, D_1F_1, par exemple, se coupent sur t_1, leurs pôles A et B_1 sont collinéaires avec le pôle Ω_1 de t_1 ; 2° les points

$$(BC,\ C_1A_1) \equiv Z_a, \quad (CA,\ A_1B_1) \equiv Z_b, \quad (AB,\ B_1C_1) \equiv Z_c$$

sont les pôles des droites DE_1, EF_1, FD_1 qui passent par Ω_1.

Semblablement les points

$$(BC,\ A_2B_2) \equiv Z'_a, \quad (CA.\ B_2C_2) \equiv Z'_b, \quad (AB,\ C_2A_2) \equiv Z'_c$$

sont les pôles des droites DF_2, ED_2, FE_2 qui passent par Ω_2.

En raisonnant comme ci-dessus pour les points T_a, T_b, ... on verra que les points Z'_a et Z_c, Z'_b et Z_a, Z'_c et Z_b sont des points homologues par rapport aux triangles ABC, $B_1C_1A_1$ et que, par suite, les angles Z'_aIZ_c, Z'_bIZ_a, Z'_cIZ_b sont égaux à 2θ. Remarquons aussi les égalités :

$$IZ'_a = IZ_c,\ IZ'_b = IZ_a,\ IZ_c = IZ_b,$$
$$CZ'_b = CZ_a,\ \textit{angle}\ Z'_bIC = CIZ_a = \theta,\ \text{etc.},$$

et que les droites Z'_aZ_c, Z'_bZ_a, Z'_cZ_b sont tangentes à la parabole W. Les dernières droites sont les polaires des points $(D\Omega_2,\ F\Omega_1)$, $(E\Omega_2,\ D\Omega_1)$, $(F\Omega_2,\ E\Omega_1)$, c'est-à-dire des sommets du premier triangle de Brocard du triangle DEF.

Les symédianes DJ, EJ, FJ du triangle DEF ayant pour pôles les points D', E', F', les tangentes menées de ces points au cercle I sont les polaires des sommets du second triangle de Brocard du triangle DEF.

Le lecteur aura déjà remarqué que les droites t_1, t_2, Z'_aZ_c, Z'_bZ_a, Z'_cZ_b coïncident avec g, g', g_a, g_b, g_c.

III. LE TRIANGLE PSEUDO-PYTHAGORÉEN $a^4 = b^4 + c^4$.

Bibliographie. ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT : XXXI, p. 524 ; XXXIV, p. 335 ; XXXV, pp. 123 et 448 ; XXXVI, p. 84 ; XLI, p. 26. Ces articles, à l'exception du premier, sont dus à M. Eckhardt.

MATHESIS, 1905, p. 259 (J. N.).

Il m'a paru intéressant d'attirer de nouveau l'attention des géomètres sur le triangle $a^4 = b^4 + c^4$ par une note *directe* et simple.

A. Soit ABC un triangle quelconque, inscrit dans une circonférence de centre O. Menons en B et en C les tangentes qui rencontrent en X et Y la parallèle à BC par A, et posons :

$$BX = CY = t, \quad AX = x, \quad AY = y, \quad XZ = x + y = a'.$$

Les triangles équiangles ABC, XAB, YCA donnent :

$$(1) \qquad t = \frac{bc}{a}, \quad x = \frac{c^2}{a}, \quad y = \frac{b^2}{a},$$

d'où l'on déduit : $bc = at = a\sqrt{xy}$, $b^2 + c^2 = aa'$.

Les angles AXB, AYC, CAB étant égaux, on a :

$$\begin{aligned} c^2 &= x^2 + t^2 - 2tx \cos \mathrm{A}, \\ b^2 &= y^2 + t^2 - 2ty \cos \mathrm{A}. \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2ta \cos \mathrm{A}\,; \end{aligned}$$

en ajoutant ces trois équations on obtient :

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2t\,[(a + a') \cos \mathrm{A} - t]. \tag{2}$$

Désignons par M le milieu de la droite qui joint les milieux X′, Y′ des tangentes BX, CY ; alors $a + a' = 4\mathrm{MX}'$, $t = 2\mathrm{BX}'$ et l'équation (2) prend la forme :

$$\begin{aligned} a^2 &= x^2 + y^2 - 4t\,(2\mathrm{MX}' \cos \mathrm{A} - \mathrm{BX}') \\ &= x^2 + y^2 - 4t\,(2\mathrm{PX}' - \mathrm{BX}'), \end{aligned}$$

P étant la projection de M sur la droite BX.

Par conséquent, si $\mathrm{BX}' = 2\mathrm{PX}'$, ce qui revient à $\mathrm{MX}' = \mathrm{MB}$,

on a : $$a^2 = x^2 + y^2 = \frac{c^4}{a^4} + \frac{b^4}{a^2},$$

c'est-à-dire $a^4 = b^4 + c^4$, et ABC est un *triangle pseudo-pythagoréen.*

B. Nous supposons maintenant $\mathrm{MX}' = \mathrm{MB}$, de sorte que la circonférence de centre M et de rayon MB passe par les points X′, Y′, C. L'angle CBM étant égal à BMX′ et par suite égal à $180^\circ - 2\mathrm{A}$, on voit que

$$\textit{angle}\ \mathrm{CBO} = 90^\circ - \mathrm{BOM_a} = 90^\circ - \mathrm{A} = \frac{1}{2}\,\mathrm{CBM} = \frac{1}{2}\,\mathrm{CMY}',$$

$\mathrm{M_a}$ désignant le milieu du côté BC. Il résulte de là que le centre O du cercle ABC coïncide avec le centre du cercle inscrit au triangle MBC et aussi avec l'intersection des droites BY′ et CX′.

Ce résultat nous donne un moyen de construire un triangle pseudo-pythagoréen dont on donne les sommets B, C et la hauteur h_a. En effet, sur la perpendiculaire élevée au milieu $\mathrm{M_a}$ de BC portons les longueurs $\mathrm{M_aM_1} = h_a$, $\mathrm{M_aM} = \frac{1}{2} h_a$ et menons par les points $\mathrm{M_1}$, M des parallèles p_1, p à BC. Décrivons de M comme centre avec le rayon MB une circonférence qui coupe p en X′ et Y′ ;

O étant le point de rencontre des droites BY′ et CX′, décrivons encore, de O comme centre avec le rayon OB, une circonférence qui coupe p_1 aux points A et A_1. Les triangles ABC et A_1BC résolvent le problème.

Pour que la construction soit possible, h_a ne peut surpasser la hauteur du triangle isocèle qui correspond à l'égalité $a^4 = b^4 + c^4$; le maximum de h_a est $\frac{a}{2}\sqrt{\sqrt{8} - 1}$.

c. Supposons $b > c$ et soit H_a le pied de la hauteur issue de A ; en faisant $H_aC = \gamma$, $H_aB = \beta$, $H_aM_a = \alpha$, on a :

$$\alpha = \beta + \gamma = h_a (\cot B + \cot C).$$

D'autre part, dans le triangle M_aBM,

$$\frac{1}{2} a = \frac{1}{2} h_a \cot M_aBM, \text{ d'où } a = - h_a \cot 2\,A.$$

En égalant les deux valeurs de a on obtient :

$$\cot 2\,A + \cot B + \cot C = 0. \tag{3}$$

Si ω est l'angle de Brocard du triangle ABC, l'égalité (3) donne successivement :

$$\frac{\cos 2\,A}{\sin 2\,A} - \frac{\cos A}{\sin A} + \cot \omega = 0, \quad \frac{1}{\sin 2\,A} + \cot \omega = 0,$$

$$\sin 2\,A = \operatorname{tg} \omega. \tag{4}$$

On a vu que $b^2 + c^2 = aa'$; par suite,

$$\cot \omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\,S} = \frac{a(a + a')}{2a\, h_a} = \frac{MX'}{M_aM} = \frac{MB}{M_aM}.$$

Il résulte de là que l'angle de Brocard de ABC est égal à $MX'M_a$;

De $\gamma = \frac{1}{2} a + \alpha$, $\beta = \frac{1}{2} a - \alpha$, on conclut $\beta\gamma = \frac{1}{4} a^2 - \alpha^2$.

Mais $b^2 = h^2_a + \gamma^2$, $c^2 = h^2_a + \beta^2$,

d'où $$b^2 - c^2 = \gamma^2 - \beta^2 = (\gamma + \beta)(\gamma - \beta) = a \cdot 2\alpha.$$

Par conséquent :

$$\beta\gamma = \frac{1}{4}\,a^2 - \frac{(b^2 - c^2)^2}{4\,a^2} = \frac{a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2}{4\,a^2} = \frac{b^2c^2}{2a^2}\,.$$

On a aussi $\beta\gamma = h^2_a \cot B \cot C$, d'où, en égalant les deux valeurs de $\beta\gamma$,

$$b^2c^2 = 2\,a^2h^2_a \cot B \cot C,$$

et à cause de $ah_a = bc \sin A$

$$(5) \qquad 2 \sin^2 A = \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

Cercles et sphères remarquables du triangle et du tétraèdre

PAR

V. THÉBAULT

I. Dans les NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, 1910, p. 278, nous avons donné des cercles remarquables du plan d'un triangle qui nous ont suggéré des résultats généraux d'une grande simplicité.

1. *Des projections* α, β, γ *d'un point P du plan sur les côtés d'un triangle ABC, comme centres, on décrit des circonférences orthogonales à une circonférence, réelle ou imaginaire, dont le centre P' est le conjugué isogonal de P par rapport au triangle. Elles coupent les côtés du triangle en six points,* a *et* a', b *et* b', c *et* c', *d'une circonférence de centre P.*

En effet,

$$\overline{\mathrm{P}a}^2 = \overline{a\alpha}^2 + \overline{\mathrm{P}\alpha}^2 = \overline{\alpha\mathrm{P}'}^2 - \rho^2 + \overline{\mathrm{P}\alpha}^2$$

$$= 2\overline{\alpha\omega}^2 + \frac{\overline{\mathrm{PP}'}^2}{2} - \rho^2 = \frac{4r^2 + d^2 - 2\rho^2}{2} = \text{const.},$$

r, ρ et d désignant les rayons des cercles $\alpha\beta\gamma$ et P' et la distance PP', ω étant le milieu de PP'.

Six points obtenus avec P' et P sont de même sur une circonférence de centre P'. En particulier, lorsque P et P' sont l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit au triangle, ρ étant nul, nous retrouvons nos cercles de 1910.

Réciproquement, si une circonférence P de rayon R coupe les côtés BC, CA, AB d'un triangle en a *et* a', b *et* b', c *et* c', *les circon-*

férences décrites sur aa′, bb′, cc′ *comme diamètres ont pour centre radical P′, conjugué isogonal de P par rapport au triangle.*

P est en effet le centre d'une circonférence, réelle ou imaginaire, orthogonale aux trois circonférences données, et

$$R^2 = \frac{4\overline{\omega\alpha}^2 + d^2 - 2\rho^2}{2};$$

d'où

$$\overline{\omega\alpha}^2 = \overline{\omega\alpha'}^2 = \frac{2R^2 - d^2 + 2\rho^2}{2} = \text{const.}$$

2. *Des projections* α, β, γ, δ *d'un point P sur les faces d'un tétraèdre ABCD, comme centres, on décrit des sphères orthogonales à une sphère, réelle ou imaginaire, dont le centre P est le conjugué isogonal de P′ par rapport au tétraèdre. Elles coupent les faces du tétraèdre suivant quatre cercles* Γ_a, Γ_b, Γ_c, Γ_d *situés sur une sphère de centre P.*

Si a est un point de Γ_a, r et ρ les rayons des sphères $\alpha\beta\gamma\delta$ et P′, Σ le milieu de PP′, comme précédemment,

$$\overline{Pa}^2 = \frac{4r^2 + d^2 - 2\rho^2}{2} = \text{const.}$$

Pareillement, quatre cercles Γ'_a, Γ'_b, Γ'_c, Γ'_d obtenus avec P′ et P, sont sur une sphère de centre P′.

Réciproquement, si une sphère P coupe les faces d'un tétraèdre suivant quatre cercles Γ_a, Γ_b, Γ_c, Γ_d, *les sphères décrites sur ces cercles comme grands cercles, ont pour centre radical P′ le conjugué isogonal de P par rapport au tétraèdre.*

Ces deux réciproques forment la question 9170 proposée par S. Roberts (Educational Times, 1887, p. 276) et démontrée par M. Neuberg, pour la première fois, dans le journal anglais, 1887, p. 305.

3. Enfin, voici un théorème plus général qui nous a été communiqué tout récemment par M. Neuberg :

Une ellipse ou une hyperbole de foyers F et F′ tourne autour de l'axe focal. Une sphère de centre F rencontre un plan tangent à la quadrique ainsi engendrée suivant un cercle C. La sphère Σ *décrite sur C comme grand cercle est de puissance constante par rapport à F′.*

En effet, soient R et r les rayons de la sphère de centre F et du cercle C, ω le centre de C, O celui de la quadrique ; la puissance de F′, par rapport à la sphère Σ, est :

$$F'\omega^2 - r^2 = F'_1\overline{\omega}^2 - (R^2 - F\overline{\omega}^2) = 2O\overline{\omega}^2 + \frac{\overline{FF'}^2}{2} - R^2 = \text{const.}$$

II. Soient un triangle ABC, O son cercle circonscrit, Aα, Bβ, Cγ trois droites rencontrant BC, CA, AB en α, β, γ, de manière que

$$\textit{angle}\,(A\alpha, CB) = \textit{angle}\,(B\beta, AC) = \textit{angle}\,(C\gamma, BA).$$

On mène par α les parallèles $\alpha\beta_1$ et $\alpha\gamma_2$ à Bβ et Cγ qui rencontrent AC et BA en β_2 et γ_2 ; on obtient de même des points α_1 et β_2, β_1 et α_2, sur CB et BA, AC et CB.

Dans l'Intermédiaire des Mathématiciens, 1905, p. 128, M. Malo fait remarquer que les six points α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 sont sur un même cercle, de centre ω, et se demande si ce cercle joue un rôle en Géométrie du triangle, au moins lorsque les droites Aα, Bβ, Cγ, sont les hauteurs du triangle ABC.

M. Neuberg, Mathesis, 1906, p. 83, propose de démontrer que le cercle ω signalé par M. Malo *est un cercle de Tucker*. Ce journal fait suivre la solution de la question proposée de remarques intéressantes.

A notre tour, nous voudrions développer d'autres propriétés de la même figure qui constituent peut-être une contribution nouvelle à la Géométrie du triangle.

1. Le cercle ω étant un cercle de Tucker du triangle ABC, les droites $\alpha_1\beta_2$, $\beta_1\gamma_2$, $\gamma_1\alpha_2$, déterminent un triangle $U_a\,U_b\,U_c$ symétriquement semblable à ABC. *Le centre d'homothétie de ces triangles est le point K de Lemoine qui leur est commun.*

Le centre ω est sur la perpendiculaire à CB, par exemple, qui passe à l'intersection de $\alpha_1\gamma_2$ et $\beta_1\alpha_2$ et contient les milieux Q_1 et Q_2 de $\alpha_1\alpha_2$ et $\beta_1\gamma_2$. a et u étant les milieux de CB et U_bU_c, Aa et U_au sont parallèles et contiennent Q_1 et Q_2. Donc $aQ_1 = uQ_2$, et *le centre Ω du cercle $U_aU_bU_c$, situé sur OK, est le symétrique de O par rapport à ω.*

Les triangles ABα et Aαγ₁ étant semblables,

$$A\gamma_1 \cdot \gamma_1 B = \overline{A\alpha}^2 - \overline{A\gamma_1}^2\,;$$

par suite, γ_1 est un point de l'axe radical des cercles O et (A, Aα). De même, β_2 est un point de cet axe radical.

Les antiparallèles égales $\alpha_1\gamma_2$, $\beta_1\alpha_2$, $\gamma_1\beta_2$ *sont donc les axes radicaux des cercles O et (B, Bβ), O et (C, Cγ), O et (A, Aα). Ces axes déterminent un triangle DEF semblable au triangle orthique de ABC et homologique à ABC, le centre d'homologie étant le point K de Lemoine et l'axe d'homologie, l'axe radical des cercles O et* ω.

Les sommets D, E, F sont donc les centres radicaux des triples de cercles

O, (B, Bβ), (C. Cγ) ; O, (C, Cγ), (A, Aα) ; O, (A, Aα), (B, Bβ).

Comme les perpendiculaires abaissées de D, E, F respectivement sur BC, CA, AB passent au centre ω du cercle de Tucker, ω *est le centre radical des trois cercles (A, Aα), (B, Bβ), (C, Cγ).*

2. Les groupes de points (C, B, γ_1, β_2), (B, A, β_1, α_2), (A, C, α_1, γ_2) sont situés sur des cercles Γ_a, Γ_b, Γ_c.

$\beta_1\gamma_2$ rencontre les tangentes au cercle O en C et B, en deux points N et P situés de plus respectivement sur Γ_b et Γ_c, car

$$\textit{angle}\ \mathrm{NCA} = \textit{angle}\ \mathrm{CBA} = \textit{angle}\ \mathrm{N}\gamma_2\mathrm{A}.$$

Donc

$$\mathrm{MN} = \mathrm{MP}, \quad \text{et} \quad \mathrm{MC}\,.\,\mathrm{MN} = \mathrm{MB}\,.\,\mathrm{MP},$$

M étant le pôle de BC par rapport à O.

M est par suite sur l'axe radical MA des cercles Γ_c et Γ_b, lequel axe est la symédiane MK de ABC.

Le point de Lemoine K du triangle ABC est donc le centre radical des cercles Γ_a, Γ_b, Γ_c (¹).

3. Dans un tétraèdre quelconque, nous ne connaissons comme analogie avec le triangle, qu'une proposition de M. Neuberg (MATHESIS, 1909 p. 138), dont voici une légère généralisation :

Par les sommets A, B, C, D d'un tétraèdre on trace des droites de même pente, par rapport aux faces opposées, qui rencontrent

---

(¹) Lorsque Aα, Bβ, Cγ sont les hauteurs, le cercle ω est celui de Taylor du triangle ABC. Les propriétés précédentes, qui s'y appliquent, ont été pour la plupart données dans ce cas particulier : MATHESIS, 1881, p. 190 (J. Neuberg) ; 1908, p. 76 (Lamotte).

M. Neuberg a eu l'obligeance de nous communiquer la dernière propriété du point de Lemoine dans la figure de Taylor.

BCD, CDA, DAB, ABC en A', B', C', D' respectivement. On trace ensuite les droites A'a_1, *A'*a_2, *A'*a_3 *qui coupent les arêtes AB, AC, AD de manière que*

$$\textit{angle } AA'a_1 = \textit{angle } ABA'\,;\ \textit{angle } AA'a_2 = \textit{angle } ACA'\,;$$
$$\textit{angle } AA\,a_3 = \textit{angle } ADA.$$

On obtient de même des points (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3), (d_1, d_2, d_3) *sur (BA, BC, BD), (CA, CB, CD), (DA, DB, DC). On peut faire passer des sphères* Γ_a, Γ_b, Γ_c, Γ_d *par les groupes de six points (B, C, D,* a_1, a_2, a_3*), (A, C, D,* b_1, b_2, b_3*), ... Le centre radical de ces sphères est le point dont la somme des carrés des distances aux faces du tétraèdre est minimum.*

III. Le Journal de Vuibert, puis Ed. Lucas, Mathesis, 1889 p. 180, ont signalé des cercles intéressants du triangle. Nous allons développer succinctement des résultats plus généraux. Un triangle de côtés BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$, étant donné, trois cercles ω_a, ω_b, ω_c tangents respectivement en A, B, C au cercle O circonscrit au triangle, se coupent : ω_a et ω_b, ω_b et ω_c, ω_c et ω_a, sous un même angle θ. Des calculs simples donnent les expressions suivantes des rayons ρ_a, ρ_b, ρ_c de ces cercles :

$$\rho_a = \frac{bcR}{aR\sqrt{2(1-\cos\theta)} \pm bc}\,; \qquad \rho_b = \frac{acR}{bR\sqrt{2(1-\cos\theta)} \pm ac}\,;$$
$$\rho_c = \frac{abR}{cR\sqrt{2(1-\cos\theta)} \pm ab}.$$

On en déduit, par exemple,

$$\frac{R \pm \rho_a}{\rho_a} : \frac{R \pm \rho_b}{\rho_b} = \frac{a^2}{b^2}\,; \qquad \frac{R \pm \rho_b}{\rho_b} : \frac{R \pm \rho_c}{\rho_c} = \frac{b^2}{c^2}\,;$$
$$\frac{R \pm \rho_c}{\rho_c} : \frac{R \pm \rho_a}{\rho_a} = \frac{c^2}{a^2}\,;$$

et, S, T, U étant les points où les lignes $\omega_b\omega_c$, $\omega_c\omega_a$, $\omega_a\omega_b$ des centres rencontrent respectivement BC, CA, AB,

$$SC : SB = c^2 : b^2\,; \quad TA : TC = a^2 : c^2 : \quad UB : UA = b^2 : a^2.$$

S, T, U, sont donc trois points de la droite Δ *de Lemoine du triangle ABC.*

Les deux triangles ABC et $\omega_a\omega_b\omega_c$ sont homologiques, le centre étant O et l'axe la droite Δ de Lemoine. De plus, les cercles ω_a,

ω_b, ω_c coupant le cercle O sous un même angle, *le centre radical* Ω *de ces trois cercles est un point du diamètre de Brocard OK du triangle ABC.*

Il existe un cercle Γ, autre que O, tangent à ω_a, ω_b, ω_c, les contacts étant de même nature. *Son centre est sur OK ; il est orthogonal au cercle S d'Apollonius du triangle ABC et touche* ω_a *au point commun à ce cercle et au cercle S.* Soient D le pôle de BC par rapport à O, E et F les points communs aux cercles ω_b et ω_c, A′ l'intersection de la symédiane AK avec le cercle O ;

$$\overline{DC}^2 = DA' \,.\, DA = DE \,.\, DF.$$

Or le milieu P de EF est un point du cercle de diamètre SD comme le contact M de la tangente DM au cercle S d'Apollonius ; de plus $DP \geqslant DM$, et P est intérieur ou situé sur le cercle S. E et F, symétriques par rapport à $S\omega_c\omega_b$, sont sur le cercle S.

Les cercles ω_a *et* ω_b, ω_b *et* ω_c, ω_c *et* ω_a *sont donc coaxiaux respectivement avec les cercles S, T, U d'Apollonius du triangle ABC.*

La construction de trois cercles ω_a, ω_b, ω_c dans un triangle ABC, l'angle θ étant donné, ne présente plus de difficulté.

E, par exemple, situé sur le cercle S du triangle ABC, appartient aussi à un cercle Σ, passant par B et C, et capable de l'angle $\left(A + \frac{\theta}{2}\right)$. Ces cercles S et Σ se coupent toujours en deux points, d'où deux positions de E, l'une intérieure, l'autre extérieure au cercle O. De même F décrit un cercle Σ', passant en B et C, capable de l'angle $\left(A - \frac{\theta}{2}\right)$.

ω_b et ω_c sont déterminés par la perpendiculaire abaissée de S sur EF.

Le cas particulier où $\theta = \pi$ a été signalé par le JOURNAL DE VUIBERT, puis par Ed. Lucas.

Lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, ω_a, ω_b, ω_c sont orthogonaux et *l'orthocentre du triangle* $\omega_a\omega_b\omega_c$ *est sur le diamètre de Brocard OK du triangle ABC.*

Si $\theta = 120°$, les cercles ω_a, ω_b, ω_c passent au *centre isodynamique W* du triangle ABC.

LA

Notion Mathématique de l'Indicatrice

ILLUSTRÉE

par les franges des lames minces

par M. E. CHARRON

On sait que, lorsqu'une surface S est tangente à un plan P que nous supposerons horizontal, deux cas se présentent : au voisinage immédiat du point de tangence T, la surface S peut être tout entière du même côté de P, par exemple au-dessus, ou bien elle peut traverser ce plan, qui la coupe alors suivant deux lignes A et A′ se croisant en T, appelées lignes asymptotiques.

D'autre part, si l'on sectionne S par un plan parallèle à P, à une distance h très faible, on obtient une courbe C qui, agrandie dans le rapport d'homothétie $\frac{1}{\sqrt{2h}}$, donne une nouvelle courbe C′. Lorsque h tend vers zéro, C′ se rapproche de la forme d'une ellipse dans le premier cas et d'une hyperbole dans le second, et les distances des foyers et des sommets de la courbe limite appelée indicatrice sont généralement finies. Dans le premier cas, la section doit, naturellement, être faite au-dessus de P, et dans le second on obtient, suivant qu'elle est au-dessus ou au-dessous de P, deux hyperboles conjuguées dont les asymptotes sont les tangentes à A et A′ en T.

Il résulte de ceci que, si l'on fait dans S des sections par un certain nombre de plans parallèles à P, équidistants et suffisamment rapprochés, les courbes obtenues, C, ont sensiblement la forme de très petites ellipses ou hyperboles dont les rapports d'homothétie sont entre eux comme les racines carrées des nombres entiers et qui, par suite, sont de plus en plus resserrées deux à deux.

Les franges d'interférence produites par les lames minces constituent un excellent procédé pour illustrer cette théorie. Supposons d'abord qu'on les observe, sous l'incidence normale, entre un plan de verre V parfaitement dressé et la face inférieure S d'une lame de verre quelconque L qui, n'ayant pas été taillée spécialement, présente de légères ondulations, de faibles courbures et qui, posée sur le plan V, ne le touche qu'en quelques points, le reste étant un peu au-dessus de ce plan. Les franges de même nature, par exemple les franges noires, sont les courbes d'intersection de S par une série de plans V' parallèles à V et distants l'un de l'autre de la demi-longueur d'onde relative à la lumière employée, soit environ $\frac{3}{10.000}$ millimètre pour la lumière du sodium. Ce sont donc les lignes de niveau de S si l'on suppose V horizontal. L'aspect du phénomène rappelle, en effet, celui d'une carte de géographie représentant, par ses lignes de niveau, un pays accidenté : les franges ont tracé instantanément et exactement la carte de S et il serait facile de la fixer par photographie.

On sait d'ailleurs que les constructeurs ont recours à ce phénomène ou autres semblables pour achever la taille des verres utilisés dans certains appareils d'optique.

Soit T_1 l'un des points de tangence de S avec un plan P_1 parallèle à V. Parmi les plans V' il s'en trouve toujours un qui n'est distant de P_1 que d'une quantité inférieure à $\frac{3}{20.000}$ mm. Ce plan et les plans voisins dessinent les courbes C qui, effectivement, ont la forme d'ellipses ou d'hyperboles de plus en plus resserrées à partir du centre T_1 du phénomène. Dans le cas particulier où la surface S est sphérique, ces courbes sont les anneaux de Newton.

En appuyant progressivement sur la lame de verre L, on la rapproche du plan V (sauf aux points de contact) en la déformant légèrement ; sa face inférieure S s'enfonce à travers les plans V' et les franges se modifient. Si, au voisinage d'un point de tangence T_1, les courbes C sont elliptiques, on voit ces ellipses se rétrécir progressivement et s'engloutir successivement en T_1 ou bien, au contraire, prendre naissance en ce point et s'élargir, suivant que S présente au voisinage de T_1 un sommet ou une dépression. Le phénomène est plus curieux lorsque les courbes C sont hyperboliques. Soient H et H' les deux hyperboles les plus proches de T_1, l'une au-dessus, l'autre au-dessous. On voit les deux branches de l'une d'elles, H par exemple, s'éloigner l'une de l'autre, l'angle des asymptotes ne variant pas sensiblement, tandis que les branches de l'autre hyperbole H′ se rapprochent et que leurs sommets arrivent à se souder figurant le point T_1. Le plan V′ qui les détermine est alors tangent à S en T_1 et les franges qui se coupent en ce point sont les lignes asymptotiques, intersections A et A′ de S par ce plan tangent. Ensuite, on voit ces franges se séparer en T_1 pour former l'hyperbole conjuguée de H′ (par conséquent semblable à H), puis les branches de cette nouvelle hyperbole s'écartent progressivement comme il était arrivé pour H. Pendant cette transformation, les branches des hyperboles semblables à H se sont éloignées et celles des hyperboles semblables à H′ se sont rapprochées. Ensuite le même phénomène se reproduit plusieurs fois avec les nouvelles courbes voisines de T_1.

J'ai supposé que les franges se formaient entre une lame de verre ordinaire L et un plan P parfaitement dressé. Pratiquement, ce dernier est inutile et il suffit d'opérer entre deux lames telles que L. Soient, en effet, S_1 et S_2 les surfaces en regard et P un plan idéal passant, par exemple, par 3 points de contact de S_1 et S_2 et dans lequel nous choisissons des axes ox et oy. Les équations de S_1 et S_2 étant $z_1 = f_1(x, y)$ et $z_2 = f_2(x, y)$, les franges produites par S_1 et S_2 sont celles qui se formeraient entre le plan P et la surface $S' = z_2 - z_1$ laquelle jouit, naturellement, comme S_1 et S_2 des propriétés générales de toute surface. Cette méthode offre même un avantage : en déplaçant l'une des plaques par rapport à l'autre, on peut faire varier la surface S′, et par suite les franges, d'une infinité de manières.

Si l'on veut que les courbes C soient bien formées et suffisamment grandes pour être facilement visibles malgré l'extrême rapprochement des plans V′, il faut, naturellement, que les courbures de S ou S′, en tout point et dans toutes les directions, soient très faibles et varient lentement d'un point à l'autre. On doit donc éviter que les surfaces des verres soient déformées par des stries ou de fines bulles. Des plaques photographiques débarrassées de leur gélatine ou même simplement des morceaux de verre à vitre conviennent assez bien. Avec deux plaques d'environ 50 cm^2 on peut couramment observer une dizaine de régions de tangence.

Il est, d'ailleurs, facile de provoquer artificiellement certaines courbures arbitraires. Par exemple, soient A, B, C, D les milieux des côtés d'un système de deux lames bien planes superposées. En deux régions opposées A et C, on sépare les lames par une petite cale telle qu'un morceau de papier et on presse ces lames l'une contre l'autre en B et D. Cela produit, vers leur centre, une surface à courbures opposées sur laquelle on voit les franges en hyperboles très régulières.

Un autre mode opératoire consiste à déposer, sur la face bien propre S_1 d'une lame de verre, quelques gouttes d'eau que l'on étend en une très mince couche, et à observer les franges produites par S_1 et la surface libre S_2 du liquide. On déforme cette surface en y promenant le doigt ou en basculant la plaque successivement dans plusieurs directions ; la tension superficielle atténue rapidement les courbures de S_2 qui convient alors très bien pour ces expériences. Pour profiter des qualités de cette surface S_2, il faut naturellement que la face de verre S_1 soit très plane : on pourra prendre une bonne glace dont l'argenture aura été enlevée. Dans cette méthode les franges se modifient constamment par suite de la déformation spontanée de S_2 sous l'influence de la pesanteur, de la tension superficielle et de l'évaporation, et l'on observe tous les phénomènes décrits plus haut.

En particulier, il est facile de former temporairement, sur S_2, une sorte de bourrelet liquide, d'ailleurs très peu accusé. On le coupe ensuite en deux tronçons en le traversant par une pointe quelconque comme si l'on voulait tracer, sur le verre, une droite perpendiculaire au bourrelet. Les deux bords de la coupure se ressoudent presque aussitôt et le liquide forme à cet endroit une surface à courbures opposées sur laquelle on ne tarde pas à voir paraître des hyperboles.

On sait que ces franges sont beaucoup plus visibles en lumière réfléchie qu'en lumière transmise. Si l'on ne possède pas le dispositif d'éclairage employé pour observer les anneaux de Newton sous l'incidence normale, on peut se contenter de regarder, à peu près normalement, la lame éclairée avec un brûleur au chlorure de sodium, soit directement, soit par l'intermédiaire d'une glace semi-transparente.

E. Charron,
Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille.

Notes sur la Flore du Katanga

PAR

É. DE WILDEMAN
Directeur du Jardin Botanique de l'État, Bruxelles

VI

LILIACEAE

WURMBEA *Thunb.*

Wurmbea Homblei *De Wild.* in Bull. Jard. Bot. Brux. V (1915), p. 8.

Plante herbacée atteignant 29 cm. de haut, à bulbe d'environ 10-12 mm. de diam., à feuille basilaire réduite à une gaine membraneuse plus ou moins oblique au sommet, dépassant le bulbe de 10-15 mm. ; feuilles caulinaires au nombre de 3, l'inférieure linéaire de 10-12 cm. de long et atteignant au maximum 2 mm. de large, aiguë, les deux supérieures très longuement engainantes de 2-5 cm. de long, très aiguës ; fleurs au nombre de 3-5, distantes de 0,6-2 cm. le long de raclin, sessiles, périanthe de 6-7 mm. de long, à 6 lobes lancéolés soudés à leur base sur 1-1,5 mm., atteignant env. 1 mm. de large, 3-nerviés à la base, subaigus, ovaire ellipsoïde à 3 styles libres jusqu'à la base et d'environ 1,7 mm. de long, plus courts que le périanthe, accrescents après l'anthèse, étamines à filet d'env. 4 mm. de long, anthère d'environ 1 mm. de long.

Plateau de Biano, environs de Katentania, novembre 1912 (Homblé, n. 814. — Dans la plaine, au voisinage d'un ruisseau).

Obs. — Par ses trois styles libres jusqu'à la base, la présence de feuilles caulinaires, les lobes du périanthe unis à la base sur un peu plus de 1 mm., nous devons ranger cette plante dans le genre *Wurmbea,* dont les représentants ont cependant, en général, un tube corollin peu allongé. Dans l'unique espèce de l'Afrique tropicale, le *W. tenuis* Baker, les fleurs sont moins nombreuses, la feuille inférieure plus courte.

CHLOROPHYTUM *Ker.*

Chlorophytum katangensis *De Wild.*

Vallée de Kapiri, 1913 (Homblé, n. 1150).

Chlorophytum longipes *Baker.*

Shinsenda, 1912 (Ringoet, coll. Homblé, n. 385. — Nom vern. : Pepe).

DASYSTACHYS *Baker.*

Dasystachys Bequaerti *De Wild.* in *Fedde* Repert. XII (1913), p. 299 ; Notes Fl. Katanga III (1914), p. 8.

Souche... feuilles basilaires linéaires atteignant 35 cm. de long et 1 cm. de large, glabres sur les 2 faces, légèrement ciliées sur les bords vers le sommet, glabres vers la base. Pédoncule subcylindrique atteignant 60 cm. de long, portant 8 feuilles réduites engainantes à la base, aiguës au sommet et diminuant de grandeur de la base vers le sommet ; fleurs très courtement pédicellées à pédicelle de moins de 1 mm. de long, à bractée scarieuse atteignant 6 mm. de long, lancéolée, très aiguë, périanthe de 2 à 6 mm. de long, blanc, glabre extérieurement, muni d'une ligne médiane plus colorée, mais non noirâtre, étamines exsertes à anthères jaunes d'env. 1,5 mm. de long, style dépassant les étamines.

Élisabethville, 15 avril 1912 (J. Bequaert, n. 333).

Obs. — Par ses étamines exsertes, son périanthe de 5 à 6 mm., le pédoncule portant plus de 3 feuilles réduites, le *D. Bequaerti* se rapproche du *D. papillosa* Baker (cf. Baker in FLORA OF TROP. AFR., VII, p. 514), dont il se différencie entre autres par la couleur et le développement des fleurs, et par les anthères de celles-ci, qui, d'après Baker, mesureraient 3 mm. de long.

TULBAGHIA *Heist.*

Tulbaghia Cameroni *Baker.*

Tschinsenda (Rogers, n. 10279).

DIPCADI *Medic.*

Dipcadi longifolia *Baker.*

Kamatanda (Rogers, n. 10347).

SCILLA *L.*

Scilla lanceaefolia *Baker.*

Kamatanda (Rogers, n. 10350).

ACROSPIRA *Welw.*

Acrospira breviscapa *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUX. V (1915), p. 3.

Plante herbacée, réduite, à base tubéreuse atteignant env. 2 cm. de long, à nombreuses racines fibreuses cylindriques, à feuilles toutes basilaires, au nombre de 4 à 5, les 2 ou 3 extérieures réduites à une gaine plus ou moins apiculée, velues densément sur les nervures en relief, les deux supérieures lancéolées, embrassantes à la base, atteignant 8 cm. de long et 26 mm. de large, glabres sur les deux faces, même sur les nervures en relief, densément ciliées sur les bords, épaisses, aiguës, apiculées au sommet ; pédoncule court, un peu plus long ou plus court que les feuilles ; racème de 5-7 cm. de long, pauciflore, à 9-10 bractées florales, lancéolées-linéaires atteignant 2 cm. de long et 4-5 mm. de large, très aiguës, velues sur les nervures dorsales, ciliées sur le bord, glabres sur la face interne, dressées ou réfléchies après la floraison ; fleurs blanches courtement pédicellées, à pédicelle articulé à la base de 3 mm. env. de long, glabre, périanthe à segments étalés de 9-13 mm. de long et atteignant 4 mm. de large à 3-5 nervures ; étamines à filet de 4 mm. env. de long, à anthères de 4 mm. de long, basifixes s'enroulant par le sommet, style glabre plus long que les étamines, environ aussi long que les pétales.

Environs de Katentania (Biano), dans les parties humides non boisées du plateau, novembre 1912 (Homblé, n. 746).

Obs. — Par son port cette plante rappelle certains *Anthericum* comme certains *Chlorophytum;* nous devons la considérer comme un *Acrospira* par l'enroulement des étamines.

Acrospira Homblei *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUX. V (1915) p. 4.

Plante herbacée de 2 m. environ de haut, à racines fibreuses, souche de 1,5 cm. de diam. ; feuilles dressées de plus de 79 cm. de long et d'env. 1 cm. de large, striées longitudinalement, velues sur les deux faces ; hampe florale centrale de plus de 1,45 m. de long, glabre, munie de bractées engainantes, à limbe peu différencié, aigu, terminée par un épi simple de 23,5 cm., à fleurs espacées de 1 à 1,5 cm., bractéolées à la base, à bractée externe ovale-aiguë, de 5 mm. de long et 3-4 mm. de large, scarieuse à env. 5 nervures médianes, bractée interne plus courte, arrondie au sommet ; fleurs fasciculées pédicellées, à pédicelle glabre, court, atteignant 5 mm. de long, articulé près de la base ; fleurs blanches à pétales de 2,5 cm. de long et de 4,5-6 mm. de large, trinerviés ; étamines à filet de 9 mm. env. de large à anthères de 10 mm. de long, s'enroulant légèrement par le sommet.

Vallée de Kapiri, février 1913 (Homblé, n. 1119. — Terre riche schisteuse).

Obs. — Cette plante rappelle, par son port, certains *Anthericum* et *Chlorophytum ;* nous la rangeons dans le genre *Acrospira* par le fait que les anthères s'enroulent par le sommet. Elle se caractérise par ses fleurs très développées, beaucoup plus grandes que dans les autres espèces d'*Acrospira* et par ses feuilles velues, caractère présenté par plusieurs *Anthericum.*

ANTHERICUM *L.*

Anthericum Homblei *De Wild.*

Vallée de Kapiri, 1913 (Homblé, n. 1190).

Anthericum kapiriense *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUX. V (1915) p. 4.

Plante à souche peu épaissie, à racines fibreuses cylindriques, nombreuses, à plus de 6 feuilles dressées, engainantes à la base à gaines plus ou moins colorées en rouge-vineux, linéaires, atteignant 55 cm. de long et 7 mm. de large, carénées sur le dos, à nervures proéminentes, lisses sur les bords, aiguës au sommet ; pédoncule aplati, nu, atteignant 60 cm. de long, à 3,5 mm. de large vers la base ; inflorescence ramifiée, lâche atteignant 13 cm. de long, ramifications peu nombreuses, les inférieures distantes de 4,5 cm. et parfois ramifiées atteignant 8 cm. de long, subétalées, bractéolées à la base, à bractéoles au nombre de 2, l'externe ovale-aiguë plus développée que l'interne pouvant atteindre 4 mm. de long, d'un brun rougeâtre ; fleurs solitaires, distantes de 2-11 mm., alternes, bractéolées à la base, à bractéoles réduites, d'un rouge brunâtre, ne dépassant pas 1,5 mm. de long, pédicellées à pédicelle articulé vers la base, de 2-4 mm. de long, glabre, accrescent, segments du périanthe blancs, étalés dès la base, 3-nerviés, de 8 mm. env. de long sur 4-4,5 mm. de large, anthères basifixes d'env. 3 mm. de long ; fruits capsulaires, trivalves, à pédicelle atteignant 5 mm. de long, de 5 mm. de haut et de large, peu échancré, à valves striées transversalement sur la face externe, entourées par les lobes du périanthe persistants ; graines noires polygonales, d'environ 2 mm. de long.

Vallée de Kapiri, février 1913 (Homblé, n. 1092).

Obs. — Cette plante doit être rangée, par les segments étalés du périanthe, ses fruits peu profondément lobés à graines non discoïdes, dans le genre *Anthericum.* Elle se fait remarquer par ses pédicelles floraux articulés près de la base et non vers le milieu ou le sommet.

Anthericum rigidum *De Wild.* in *Fedde* Repertorium XI (1913), p. 507.

— — var. **breviscapum** *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUX. V (1915), p. 5.

Plante herbacée, feuilles au nombre de 2 à 3, entourées de fibrilles linéaires, atteignant 12 cm. de long et 3 mm. de large, striées, velues sur la face inférieure, ciliées ; inflorescence atteignant 13 cm. de long. scape très légèrement comprimée, striée, courtement velue ; racème de 2,5-3,5 cm. de long, fleurs solitaires ou géminées. bractéolées à la base, bractéoles ovales-lancéolées, aiguës, de 7 mm. environ de long et 2 mm. de large, ciliées sur les bords ; fleurs blanches pédicellées, à pédicelle de 7-10 mm. de long, glabre, articulé à la base, périanthe de 1 cm. environ de long, à lobes d'environ 1 mm. de large, subaigus au sommet, anthères d'env. 4 mm.

Environs de Katentania, novembre 1912 (Homblé, n. 754. — Dans la plaine non boisée).

Obs. — Nous rapportons cette plante comme variété à celle que nous avons définie antérieurement sous le nom de *A. rigidum ;* elle s'en différencie par des feuilles réduites, une hampe florale plus courte, des fleurs à pétales plus étroits. Peut-être cette variété pourrait-elle être considérée comme espèce.

ALBUCA *L.*

Albuca Homblei *De Wild.* in Bull. Jard. Bot. Brux. IX (1914), p. 427.

Bulbe de 17-27 mm. de diam. ; feuilles basilaires au nombre de 2 à 4, linéaires, glabres, de 20-37 cm. de long et 7-11 mm. de large vers le milieu, aiguës au sommet, à bord scarieux ; pédoncule central, nu, atteignant 45 cm. de long et 3,5 mm. de diam., cylindrique, racème de 6-13 cm. de long, pluriflore, à 8-12 fleurs, pédicellées, à pédicelle dressé, atteignant 7 mm. de long, glabre, articulé sous la fleur, bractéolé à la base à bractéole lancéolée de 8-20 mm. de long et 4-6 mm. de large ; périanthe d'un jaune-clair, de 20-25 mm. de long, à lobes nerviés, les externes de 5-6 mm. environ de large, les internes plus larges, plus obtus, atteignant env. 8 mm. de large ; étamines environ aussi longues que le périanthe, anthères de 6 mm. environ de long, filaments aplatis, élargis à la base autour de l'ovaire, style dépassant légèrement les anthères.

Vallée de Kapiri, février 1913 (Homblé, n. 1235. — Rare, très localisé).

Obs. — Par la couleur du périanthe, sa dimension et celle des feuilles, notre espèce se range dans le voisinage du *A. Lugardi* Baker et du A. *Schweinfurthii* Engl. (cf. Baker in Flora of trop. Afr., VII, p. 533), se différenciant du premier entre autres par la longueur des bractées florales plus réduites, du second par les dimensions du pédoncule et du racème et par des anthères plus développées.

ASPARAGUS *L.*

Asparagus Bequaerti *De Wild.* in *Fedde* Repert. XII (1913), p. 192 ; Notes Fl. Katanga III (1914), p. 8.

Plante à tiges dressées, très fortement ramifiées, glabres dans toutes ses parties, à rameaux divergents, étalés, atteignant plus de 20 cm. de long, feuilles munies d'éperons fortement recourbés à la base, épineux dans les rameaux principaux ; cladodes peu nombreux sur les rameaux florifères, présents seulement à l'extrémité des rameaux florifères, solitaires, sétacés à pointe légèrement recourbée, de 10 à 12 mm. de long. Fleurs axillaires, solitaires ou géminées souvent divergentes, à pédicelle atteignant 6 mm. de long, articulé à env. 1 à 1,5 mm. de la base, à périanthe à lobes de 4 mm. env. de long, à étamines plus courtes que les lobes du périanthe.

Sankisia, 21 septembre 1911 (J. Bequaert, n. 205. — Savane boisée).

Obs. — Cette espèce est voisine des *A. equisetoides* Welw. et *A. nudicaulis* Baker ; elle diffère de la première par les cladodes plus longs, de la seconde par la présence de quelques cladodes peu nombreux, il est vrai, mais cependant présents ; elle diffère en outre de l'*A. nudicaulis* par des fleurs généralement géminées et par les pédicelles toujours articulés en dessous du milieu, tandis que chez l'*A. nudicaulis* les fleurs sont solitaires et les pédicelles articulés au milieu.

Asparagus Homblei *De Wild.* in *Fedde* Repert. XII (1913), p. 292 ; Notes Fl. Katanga III (1914), p. 8.

Plante à tiges dressées plus ou moins ramifiées à rameaux atteignant plus de 60 cm. de long, plus ou moins dressés, tige et ramifications plus ou moins anguleuses, glabres ; feuilles munies à la base d'éperons atteignant 5 mm. de long, relativement peu recourbés ; cladodes nombreux dans un fascicule, parfois au nombre de dix, souvent recourbés, atteignant 5 cm. de long, filiformes, aigus, fleurs ......, fruit globuleux rougeâtre, de 7 à 8 mm. de diamètre, porté sur un pédicelle de 5-6 mm. de long, articulé à env. 1,5 mm. au-dessus de la base.

Élisabethville, février (Homblé, n. 172. — Sur termitière. — Nom indigène : Kakawa maganga).

Obs. — Cette espèce est, par le nombre de ses cladodes et leur longueur, à classer dans le voisinage de l'*A. mozambicus*, du Mozambique ; elle se différencie de cette espèce par des cladodes plus nombreux et plus longs ; en effet, chez le *A. mozambicus* les cladodes atteignent de 12 à 15 mm., tandis qu'ici ils atteignent 5 cm. de long et en moyenne au moins 25 mm., les fleurs et les fruits de l'*A. mozambicus* sont inconnus.

Asparagus Kaessneri *De Wild.* in *Fedde* Repert. XII (1913), p. 293 ; Notes Fl. Katanga III (1914), p. 8.

Tiges dressées d'au moins 70 cm. de long, très légèrement tomenteuses, plus ou moins cylindriques, à ramifications assez longues, dressées, feuilles munies à la base d'épines étalées à extrémité légèrement recourbée, cladodes solitaires ou géminés, très rarement à 3 ou 4 à une même aisselle, rigides, subulés-dressés 8 à 18 mm. de long, fleurs solitaires ou géminées à pédicelle étalé atteignant env. 4 mm. de long, articulé vers la base un peu au-dessus de la sortie des bractées engainantes, à périanthe de 3 à 3 5 mm. de long, plus ou moins étalé, à étamines un peu plus courtes que les lobes du périanthe.

Vallée de la Ruzizi, 22 juillet 1908 (Kassner, n. 3178).

Obs. — Par l'ensemble de ses caractères cet *Asparagus* semble se rapprocher de l'*A. Schweinfurthii* Baker (cf. Flora of Trop. Afr., VII, p. 429) ; il en diffère d'abord par ses tiges courtement tomenteuses, non glabres ; par ses cladodes plus courts, moins nombreux dans les fascicules ; par les pédicelles floraux moins longs ; par le périanthe plus développé.

Asparagus Pauli-Guilielmi *Solms.*

Élisabethville (Rogers, n. 10170).

Asparagus striatus *De Wild.* in *Fedde* Repert. XII (1913), p. 293 ; Notes Flore Katanga III (1914), p. 8.

Plante à tiges dressées atteignant plus de 60 cm. de long, sillonnées longitudinalement, plus ou moins scabres de même que les ramifications dressées qui peuvent atteindre plus de 25 cm. de long. Feuilles munies d'un éperon peu arqué, étalé, épineux, pouvant atteindre 9 mm. de long, cladodes solitaires, géminés ou par 3 à 4 en un fascicule, subulés ou très légèrement aplatis, aigus au sommet, atteignant 13 mm. de long et 0,7 mm. de large. Fleurs axillaires, solitaires ou géminées, parfois au nombre de 4 à l'aisselle d'une épine, à pédicelle court atteignant un peu plus de 2 mm. de long, articulé au-dessus du milieu, bourrelet de contact très proéminent, périanthe de 3 mm. env. de long. Étamines plus courtes que le périanthe.

Kakonde, septembre 1911 (Hock).

Obs. — Si l'on suit la clef analytique proposée par Baker dans la Flora of Trop. Africa (vol. VII, p. 425), cette plante, par ses cladodes subulés, les éperons de la base des feuilles, les fleurs généralement géminées, les cladodes parfois relativement nombreux et atteignant 12 mm. de long, semble devoir se classer dans le voisinage de l'*A. deflexus* qui se différencie de l'*A. Nelsii* par l'absence de villosité sur les tiges. Ce qui la sépare à première vue, c'est la présence de stries en relief sur les tiges qui rend celles-ci plus ou moins scabres. Une espèce voisine, l'*A. mozambicus*, possède des tiges anguleuses ; mais dans cette dernière les cladodes sont en plus grand nombre et plus allongés.

KNIPHOFIA *Moench.*

Kniphofia mpalensis *Engl.*

Mpala (Debeerst).

Kniphofia Homblei *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUXELLES V (1915), p. 3.

Souche de 2 cm. env. de diam., à racines fibreuses nombreuses cylindriques, à 10-12 feuilles linéaires, érigées, de 45-90 mm. de long et de 7-10 mm. de large, scabres sur les bords ; pédoncule atteignant 85 cm. de long et 8 mm. de large, muni au sommet de bractées subscarieuses, subamplexicaules, triangulaires, de 6-7 mm. de long et 4 mm. de large à la base, terminé par un racème dense atteignant 8 cm. de long, à fleurs jaunes et rouge-orangé, courtement pédicellées, à pédicelle réfléchi de 2-3 mm. de long, bractéolé de base à bractéole papyracée-scarieuse diminuant de grandeur de la base du racème vers le sommet ; périanthe subcylindrique, de 22-29 mm. de long, légèrement contracté au-dessus de l'ovaire, atteignant 4-6 mm. de diam. vers le sommet, lobes ovales, subobtus, de 1,5-2 mm. de long ; étamines plus courtes que le périanthe ou finalement exsertes de 2 mm., style d'abord inclus, finalement exsert de 1 cm.

Vallée de la Kapanda (parties humides), décembre 1912 (Homblé, n. 968).

Obs. — Cette espèce semble avoir certaines ressemblances avec le *K. Grantii* Baker (cf. TRANS. LINN. SOC. XXIX, p. 159, t. 101 B et FLORA OF TROP. AFR. VII, p. 51) ; elle nous montre une grande variété dans les caractères tirés des étamines et du style qui peuvent être inclus ou exserts. Un caractère très particulier est la scabréité des marges des feuilles, scabréité formée par des dents courtes disposées au maximum à 1 mm. de distance les unes des autres. Ce *K. Grantii* Baker est dit à feuilles lisses sur les bords.

DRIMIA *Jacq.*

Drimia Hocki *De Wild.* in *Fedde* Repert. XII (1913), p. 294 ; Notes Fl. Katanga III (1914), p. 8.

Bulbe globuleux ou ovoïde atteignant 3 cm. de large. Feuilles n'apparaissant pas en même temps que les tiges florales. Scapen on tachetée atteignant, racème compris, jusque 50 cm. de long. Racème de 7 à 20 cm. de long, portant plus de 10 fleurs plus ou moins espacées, à pédicelle atteignant au maximum 5-6 mm. de long, étalé-dressé, même après l'anthèse, muni à la base d'une bractée plus ou moins caduque, linéaire, atteignant 4 mm. de long, périanthe rougeâtre de 11 à 13 mm. de long, à tube plus ou moins campanulé de 4 à 5 mm. de long à segments réfléchis, linéaires, à 1 nervure médiane colorée, atteignant environ 1,5 mm. de large, étamines plus courtes que les segments à filet violacé ; à anthère petite d'un peu moins de 1 mm. de long ; à style aussi long ou dépassant légèrement les anthères.

Élisabethville, septembre 1911 (A. Hock.-Dembo) ; Bukama, 14 juillet 1911 (J. Bequaert, n. 146).

Obs. — *D. Hocki* se range dans le groupe du *D. Coleae* Baker (cf. Baker in FLORA OF TROP. AFR. VII, p. 525) et se différencie de cette espèce et des espèces voisines par l'absence de feuilles au moment de la floraison, la longueur du racème, la couleur du périanthe.

SMILAX *L.*

Smilax Kraussiana *Meisn.*
Élisabethville (Rogers, n. 10087).

AMARYLLIDACEAE

HAEMANTHUS *L.*

Haemanthus sambesiacus *Baker.*
Élisabethville (Rogers, in 10247).

CRINUM *L.*

Crinum longifolium *Thunb.*
Élisabethville (Rogers, n. 10065).
Crinum scabrum *Sims.*
Vallée de la Kapanda, déc. 1912 (Homblé, n. 1025).

HYPOXIS *L.*

Hypoxis filiformis Baker.
Élisabethville (Rogers, n. 10099).
Hypoxis angustifolia *Lam.*
Plateau de Biano, 1912 (Homblé, n. 809).

IRIDACEAE

GLADIOLUS *L.*

Gladiolus Corbisieri *De Wild.* in *Fedde* Repert. XII (1913), p. 296 ; Notes Fl. Katanga III (1914) p. 9.

Bulbe de 9 à 20 mm. de diamètre ; bractées basilaires scarieuses au nombre de 1 ou 2 ; feuilles au-dessus de la bractée au nombre de 8 à 10 ; les inférieures et les supérieures plus courtes que les médianes, les plus longues à partie libre atteignant 18 cm. de long et au maximum 1 cm. de large. Épi assez dense à fleurs disposées d'un même côté, de 8 à 17 cm. de long, portant de 3 à 8 fleurs, valves de la spathe lancéolées, rigides, imbriquées, plus ou moins colorées, l'inférieure atteignant 42 mm. de long et jusque 12 mm. de large, périanthe pourpre plus ou moins foncé, de 4 cm. environ de long, à tube grêle de 16 mm. environ de long, à limbe horizontal, à lobe supérieur plus ou moins cucullé de 23 cm. environ de long, plus fortement coloré que les lobes latéraux et d'environ 12 à 13 mm. de large, plus ou moins obtus au sommet, lobes inférieurs plus pâles, les médians surtout rétrécis-onguiculés vers la base, anthères linéaires d'environ 8 à 9 mm. de long, plus courtes que le lobe supérieur.

Welgelegen, 1912 (Corbisier, coll. Homblé, n. 602) ; Shinsenda, mars 1912 (Ringoet). Coll. Homblé, n. 435 et 518. — Nom indigène : Mandindinde) ; Mont Mugila, penchant Ouest, 23 mai 1908 (Kassner, n. 2996) ; Shiwele, 19 février 1908 (Kassner, n. 2477) ; Environs de Kibwa, 1910 (A. Hock) ; Lukafu, 1900 (E. Verdick) ; Vallée de Kapiri, 1913 (Homblé, n. 1239).

Obs. — Cette espèce est voisine du *Gladiolus Hanningtoni* Baker (cf. FLORA OF TROP. AFRIC. VII, p. 366) qui existe dans le Sud de la région du Kasai. La plante se différencie surtout par ses feuilles plus nombreuses, semble-t-il, et plus étroites ; elle présente un facies un peu différent si on compare les échantillons, le nombre de fleurs étant moins grand et les feuilles moins longues, leur limbe n'atteignant jamais 20 cm. de longueur.

Gladiolus corneus *Oliv.*

Vallée de la Kapanda, 1912 (Homblé, n. 966).

Gladiolus Debeerstii *De Wild.* in *Fedde* Repert. XII (1913), p. 296 ; Notes Fl. Katanga III (1914), p. 9.

Plante de 60 cm. env. de hauteur, munie à la base de 2 ou 3 gaines relativement développées et de 2 feuilles libres sur au moins 50 cm. de long, le reste de la scape étant entouré par 2-3 feuilles très longuement engainantes ; feuilles à limbe libre, allongé, atteignant au moins 2 mm. de diamètre ; scape pouvant atteindre 48 cm. de long, inflorescence lâche de 7 à 10 cm. de long à fleurs penchées du même côté, au nombre de 4 à 5, valves extérieures lancéolées, rougeâtres à l'état sec, atteignant dans la fleur inférieure env. 2 cm. de long, périanthe violacé d'environ 3 cm. de long, à tube légèrement recourbé d'env. 15 mm. de long, étroit, segments env. aussi longs que le tube, anthères d'env. 5 mm. de long.

Tanganika (Debeerst).

Obs. — Ce *Gladiolus*, à feuilles étroites, à fleurs relativement petites, disposées d'un même côté de l'inflorescence, à lobe supérieur cucullé, à feuilles linéaires, glabres, d'env. 2 mm. de diam., doit se ranger dans le voisinage du *G. zambeziacus* Baker (cf. FLOR. OF TROP. AFR. VII, p. 364), dont il diffère d'abord par ses tiges plus longues, par les valves plus développées, par le périanthe de plus de 24 mm. de long; ensemble de caractères qui donnent à la plante un facies particulier.

Gladiolus katubensis *De Wild.* in *Fedde* Repert. XII (1913), p. 297.

Plante de plus de 80 cm. de hauteur, à tige munie à la base de 2 à 3 gaines velues sur le dos, feuilles à limbe plus ou moins développé au nombre de 3 à 4 au moins, ensiformes, rigides, pouvant atteindre, au-dessus de la gaine, une trentaine de cm. de long, et mesurant jusque 17 mm. de large, velues assez fortement surtout sur le dos de la gaine, épis assez lâches mesurant 30 cm. de long, à 7 fleurs, à valve externe de la spathe verte, lancéolée, cunéiforme au sommet, n'atteignant guère plus de 5 cm. de long, à extrémité plus ou moins colorée, non longuement cunéiforme, périanthe de 7 cm. env. de long à tube légèrement recourbé atteignant 6-7 mm. de diamètre, segment supérieur cucullé. Étamines env. aussi longues que le segment supérieur à anthères linéaires de 17 mm. env. de long.

Rivière Katuba (N. W. Rhodesia), 30 décembre 1907 (Kassner, n. 2268).

Obs. — Nous donnons ici la description de cette espèce, bien qu'elle n'ait pas été rencontrée dans le domaine du Katanga. Elle est indiscutablement voisine du *G. velutinus*, dont elle se différencie par la valve externe des spathes plus courte, ce qui lui donne un aspect assez particulier, et peut-être aussi la consistance papyracée de ses valves. L'échantillon de la collection Kassner est d'ailleurs peu complet, comme c'est le cas malheureusement pour un grand nombre d'espèces du genre *Gladiolus*.

Gladiolus Melleri *Baker.*
Élisabethville (Rogers, n. 10190).

Gladiolus primulinus *Baker.*
Élisabethville (Rogers, n. 10942, 10991).

Gladiolus pauciflorus *De Wild.* in *Fedde* Repert. XII (1913), p. 297 ; Notes Fl. Katanga III (1914), p. 9.

Souche bulbeuse d'env. 3 cm. de diamètre, tige dressée atteignant plus de 75 cm., inflorescence comprise, portant à la base 3 ou 4 feuilles réduites à des gaines et env. 3 feuilles glabres, longuement engainantes, dont la partie libre atteint, pour la feuille inférieure, 15 cm. de long et 15 mm. de large, à nervure médiane excentrique. Inflorescence lâche à 3-4 fleurs recourbées du même côté de la tige, atteignant 29 cm. de long, valves de la spathe vertes, lancéolées, l'inférieure mesurant jusque 5 3 cm. de long, périanthe jaune rougeâtre atteignant près de 8 cm. de long, à tube dressé, recourbé vers le haut, atteignant environ 4 mm. de diamètre, environ aussi long que les segments oblongs, le supérieur cucullé, les latéraux un peu plus longs que le supérieur. Étamines plus courtes que les segments à filet recourbé dans le segment supérieur. Fruit de 3 cm. de long dépassé par les valves de la spathe.

Bugege, septembre 1911 (Ad. Hock) ; Katanga, octobre 1911 et Shinsenda, décembre 1911 (Hock).

Obs. — Cette espèce se range dans le voisinage du *G. sulfureus* Baker (Flor. of Trop. Afr. VII, p. 370), se différencie d'abord par le développement total de la plante qui atteint plus de 75 cm. de haut, puis par les feuilles dont la partie libre atteint plus de 7,5 cm. de long, ensuite par l'inflorescence mesurant au minimum 17 cm. de long et par les lobes extérieurs de la spathe dont l'inférieur atteint toujours au moins 5 cm. de long.

Gladiolus Quartinianus *A. Rich.*
Vallée de la Kapanda, 1912 (Homblé, n. 970) ; Chisangwe, janvier 1912 (Homblé, n. 81. — Nom ind. : Kintungutungu).

Gladiolus velutinus *De Wild.* in *Fedde* Repert. XII (1913), p. 207 ; Notes Fl. Katanga III (1914), p. 9.

Tiges munies à la base de feuilles réduites à des gaines velues sur le dos ; feuilles à limbe développé au nombre de 4, ensiformes, rigides, pouvant atteindre dans leur partie libre env. 30 cm. de long et mesurant de 10 à 19 mm. de large, velues très fortement surtout sur le dos de la gaine. Tige atteignant 70 cm. de haut à épis assez lâches mesurant 25 cm. de long à 5-7 fleurs, valve externe de la spathe verte, lancéolée, largement aiguë, l'inférieure atteignant 7 cm. de long. Périanthe de 9 cm. de long à tube recourbé assez étroit, atteignant à l'état sec 5 mm. de diamètre, segment cucullé assez large d'environ 3,2 cm. de large. Étamines à peu près aussi longues que le segment supérieur à anthère linéaire de 18 mm. environ de long.

Élisabethville, décembre 1911 (Ad. Hock) ; Shisangwe, janvier 1912 (Homblé, n. 96. — Nom ind. : Kuntungu-Tungu. — Dembos inondés).

Obs. — Nous rapportons au *G. velutinus* l'échantillon de Shisangwe, bien que ce dernier soit privé de feuilles ; d'après les notes de M. Homblé, la plante de Shisangwe possède des fleurs jaunes. Comme on peut le voir par la diagnose que nous venons de donner, la plante se range dans le voisinage du *G. Quartinianus A. Richard* (Cf. Baker FLOR. OF TROP. AFR., VII, p. 371), mais s'en différencie par la villosité de la gaine et du limbe foliaire. — Caractère que la plante partage avec celle que nous avons décrite sous le nom de *G. Hocki*, dont les valves de la spathe sont plus courtes et dont malheureusement nous ne connaissons pas les feuilles.

ZINGIBERACEAE

KAEMPFERA *L.*

Kaempfera aethiopica (*Solms*) *Benth.*
Élisabethville (Rogers, n. 10071).

CADALVENA *Fenzl.*

Cadalvena spectabilis *Fenzl.*
Élisabethville (Rogers, n. 10126) ; Kamatanda (Rogers, n. 10346).

ORCHIDACEAE

LISSOCHILUS *R. Br.*

Lissochilus Corbisieri *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUX. VI (1919), p. 80, pl. XV, fig. 5-9.

Welgelegen, 1912 (leg. Corbisier, coll. Homblé, n. 586) ; Prairies de la Kafubo, Élisabethville, 1911 (Ad. Hock).

Lissochilus Descampsii *De Wild.* Bull. Jard. Bot. Brux. VI (1919), p. 81, pl. XVI, fig. 1-7.

Entre le Luapula et le Lufila (Descamps); Bords du Moero, 1900 (Verdick).

Lissochilus dilectus *Reichb. f. ; De Wild.* Bull. Jard. Bot. Brux. VI (1919), p. 82.

Élisabethville, 1911 (Ad. Hock); Vallée de la Luembe, 1910 (Ad. Hock); Plateau de Biano (Katentania), 1912 (Homblé, n. 764); Vallée de la Kapanda, 1912 (Homblé, n. 905).

Lissochilus Homblei *De Wild.* Bull. Jard. Bot. Bruxelles VI (1919), p. 88, pl. XIII, fig. 6-13.

Env. de Katentania, 1912 (Homblé, n. 768); Katanga, 1900, (Ed. Verdick).

Lissochilus kapandensis *De Wild.* Bull. Jard. Bot. Bruxelles VI (1919), p. 90, pl. XIII, fig. 1-5.

Vallée de la Kapanda, 1912 (Homblé, n. 973).

Lissochilus katentaniensis *De Wild.* Bulletin Jard. Bot. Bruxelles VI (1919), p. 91, pl. XIV, fig. 6-12.

Environs de Katentania (Biano), 1912 (Homblé, n. 765).

Lissochilus kisanfuensis *De Wild.* Bull. Jard. Bot. Brux. VI (1919), p. 93, pl. XVII, fig. 11-15.

Kisanfu, 1911 (Ad. Hock).

Lissochilus pyrophilus *Reichb. f. ; De Wild.* Bull. Jard. Bot. Bruxelles VI (1919), p. 98.

Tanganyka (R. P. Debeerst); Sankisia, 1911 (J. Bequaert, n. 163, 169); Élisabethville, 1911 (Ad. Hock).

Lissochilus vermiculatus *De Wild.* Bull. Jard. Bot. Brux. VI (1919), p. 107, pl. XII, fig. 8-11.

Élisabethville, 1911 (Ad. Hock).

EULOPHIA *R. Br.*

Eulophia angustilabellata *De Wild.* Bull. Jard. Bot. Brux. VI (1919), p. 109, pl. XXIII, fig. 7-12.

Kisanfu, 1911 (Ad. Hock).

Eulophia Debeerstii *De Wild.* Bull. Jard. Bot. Brux. VI (1919), p. 111, pl. XVII, fig. 1-10.

Tanganyka (R. P. Debeerst); Katanga, 1900 (Ed. Verdick).

Eulophia elamellata *De Wild.* Bull. Jard. Bot. Brux. VI (1919), p. 112, pl. XVIII, fig. 7-11.

Environs de Katentania, 1912 (Homblé, n. 764).

Eulophia Hocki *De Wild.* Bull. Jard. Bot. Brux. VI (1919), p. 120, pl. XVII, fig. 1-6.

Vallée de la Ninga, 1911 (Ad. Hock).

Eulophia katangensis *De Wild.* Bull. Jard. Bot. Brux. VI (1919), p. 121, pl. XVI, fig. 8-12.

Katanga, 1900 (Éd. Verdick).

Eulophia Leopoldi *Kränzl. De Wild.* Bull. Jard. Bot. Brux. VI (1919), p. 122

Katentania (Biano), 1912 (Homblé, n. 729-782); Plateau de la Manika, 1911 (Ad. Hock).

Eulophia paucisquamata *De Wild.* Bull. Jard. Bot. Brux. VI (1919), p. 125, pl. XXIII, fig. 1-6.

Kisanfu, 1911 (Ad. Hock).

Eulophia sankisiensis *De Wild.* Bull. Jard. Bot. Brux. V (1919), p. 126, pl. XXI, fig. 4-7.

Sankisia, 1611 (J. Bequaert, n. 168).

Eulophia trilamellata *De Wild.* Bull. Jard. Bot. Brux. VI (1916), p. 127, pl. XXI, fig. 1-3.

Embouchure de la Kapanda, 1912 (Homblé, n. 778).

Eulophia Walleri *(Reichb. f. Kranzl.) ; De Wild.* Bull. Jard. Bot. Brux. VI (1919), p. 129.

Lupaka river (Kassner, n. 2456); Lukafu, 1097 (Verdick, n. 316); Lofoi 1899 (Verdick) ; Vallée de la Luembe, 1910 (Ad. Hock); Yembe-Yembe, 1911 (Ad. Hock); Vallée de Lualaba-Kapanda, 1912 (Homblé), n. 1005.

SATYRIUM *Sw.*

Satyrium katumbense *Kranzl.* in *Engler* Bot. Jahrb. VI, 1914, p. 380.

Sekanje et Kitimbe, janv. 1908 (Kassner, n. 2290) ; Vallée de la petite Luembe, février 1910 (A. Hock).

Obs. — A été également récoltée dans le Nordwest-Rhodesia par M. Kassner.

VANILLA *Andr.*

Vanilla planifolia *Andr.*
Élisabethville (Rogers, n. 10148).

POLYSTACHYA *Hook.*

Polystachya epiphytica *De Wild.*
Plateau de Biano (env. de Katentania), déc. 1912 (Homblé, n. 911).

PIPERACEAE

PIPER *L.*

Piper capense *L. f.*
Kamatanda (Rogers, n. 10327).

PROTEACEAE

Protea L.

Protea obtusifolia *De Wild.* nov. spec. (¹)

Arbre d'env. 3 m. de haut, rameaux jeunes brunâtres, densément et courtement velus. Feuilles obovales ou longuement elliptiques de 12-17 cm. de long et 3,5-6 cm. de large, obtuses ou très arrondies au sommet, cunéiformes à la base, légèrement embrassantes, tomenteuses sur les deux faces, coriaces; nervures latérales pennées, dressées, visibles sur les deux faces, réticulation peu apparente. Capitule terminal d'env. 7 cm. de diam., bractées rigides sur env. 4 rangs, les extérieures les plus courtes, les internes ne dépassant pas les périanthes, atteignant 4 cm. de long et 1 cm. de large, toutes velues-soyeuses

---

(¹) *Protea obtusifolia*: Arbor circ. 3 m. altus; ramis juvenilis brunneolis, dense et breviter velutinis; foliis obovatis vel longe ellipticis 12-17 cm. longis et 3,5 6 cm. latis, apice rotundato-obtusis, basi cuneatis, subamplexicaulibus, coriaceis, supra et infra tomentosis; capitulis terminalibus circ. 7 cm. diam., bracteis rigidis, usque 4 cm. longis et 1 cm. latis, extus velutinis, margine ciliatis intus glabris; perianthio roseo 38-40 mm. longo, anguloso infra glabro, supra extus et intus dense velutino; anthera lineari circ. 8 mm. longa, ovari brunneo-piloso, stylo glabro circ. 10 mm. exserto.

sur la face externe, ciliées sur les bords, glabres sur la face interne, rougeâtres à l'état sec. Périanthe rosé de 38-40 mm. de long, anguleux et glabre dans sa partie inférieure, densément velu intérieurement et extérieurement à partir de 6-7 mm. de la base. Anthère linéaire de 8 mm. env. de long, ovaire à poils brunâtres nombreux, atteignant 10 mm. de long ; style glabre dépassant le périanthe d'au moins 10 mm.

Plateau de Biano, Tsisinka, février 1913 (Homblé, n. 1253. — Partie sèche boisée du versant). — Nom ind. : Kinemena [Kis.]; Kifumankangi [Kis.]. — Paraît assez commun).

Obs. — Cette espèce semble assez particulière par la présence de feuilles nettement elliptiques, à peu près aussi larges au sommet qu'à la base, la plus grande largeur au centre, et par celle de feuilles nettement obovales, la plus grande largeur au-dessus du milieu, le sommet beaucoup plus large que la base. La variabilité du caractère tiré du diamètre des feuilles ne permet guère de la classer d'après la clef proposée par MM. Baker et Wright dans la FLORA OF TROP. AFRICA, VI, p. 195.

Notre plante semble avoir certaines affinités avec le *P. congensis* Engler, dont elle diffère par les feuilles plus grandes, les capitules plus réduits, les anthères plus courtes. Elle se rapproche aussi du *P. manikensis* De Wild., mais les feuilles tomenteuses sur les deux faces permettent la différenciation.

LORANTHACEAE

LORANTHUS *L.*

Loranthus erianthus *Sprague.*
Shinsenda, 11 juin 1912 (J. Bequaert, n. 504. — Savane boisée sèche).

POLYGONACEAE

POLYGONUM *L.*

Polygonum lanigerum *R. Br.*
Vallée de la Kapanda, décembre 1912 (Homblé, n. 974).

Polygonum serrulatum *Lag.*
Vallée de Kapiri, 1013 (Homblé, n. 1101) ; Élisabethville (Rogers, n. 10188, 10881).

CHENOPODIACEAE

CHENOPODIUM *L.*

Chenopodium Botrys *L.*
Shinsenda, février et mars 1912 (Ringoet, coll. Homblé, n. 371 et 369. — Nom ind. : Lenga-Lenga).

AMARANTACEAE

ACHYRANTHES *L.*

Achyrantes aspera *L.*
Bukama, 7 juillet 1911 (J. Bequaert, n. 139. — Serait adventice); Élisabethville, février et mars 1912 (Homblé, n. 159 et 213. — Sur termitières. — Nom ind. : Kalambata).

GOMPHRENA *L.*

Gomphrena globosa *L.*
Élisabethville (Rogers, n. 10960).

NYCTAGINACEAE

BOERHAAVIA *L.*

Boerhaavia ascendens *Willd.*
Vallée de Kapiri, février 1913 (Homblé, n. 1129).

PORTULACACEAE

PORTULACA *L.*

Portulaca oleracea *L.*
Tschinsenda (Rogers, n. 10277).

BASELLACEAE

BASELLA *L.*

Basella alba *L.*
Monts Kundelungu, 8 décembre 1908 (Kassner, n. 2714).

CARYOPHYLLACEAE

SILENE *L.*

Silene Burchellii *Benth.*
Élisabethville, 1912 (Ad. Hock) ; Kambove, 1911 (Ad. Hock) ; Nieuwdorp, 1912 (Ringoet, n. 11).

NYMPHAEACEAE

NYMPHAEA *L.*

Nymphaea capensis *L.*
— — var. **sansibarensis** (Casp.) CONARD MONOG. OF GENUS NYMPHAEA (1905), p. 157, tab. XI, fig. 61.
Lac Moero, 1900 (E. Verdick) ; Mtowa, 1895 (Descamps) ; Lukafu, octobre 1899 (E. Verdick) ; Chisangwe, janvier 1912 (Homblé, n. 77. — Nom ind. : Dibula).
Nymphaea stellata *Willd.*
Élisabethville (Rogers, n. 10030).

RANUNCULACEAE

CLEMATIS *L.*

Clematis orientalis subsp. **Wightiana** *O. K.*
Shinsenda, 15 mai 1912 (Ringoet, n. 67. — Sur termitières).
Clematis Lugnignu *De Wild.*
Vallée de Kapiri, février 1913 (Homblé, n. 1182. — Hauteur 1,50 m. — Nom ind. : Kinemena [Kis.]).

RANUNCULUS *L*

Ranunculus pubescens *Thunb.*
Élisabethville (Rogers, n. 10081).

ANONACEAE

ARTABOTRYS *R. Br.*

Artabotrys brachypetala *Benth.*
Élisabethville (Rogers, n. 10264).

ANONA *L.*

Anona senegalensis *Pers.*
Mushoshi (Rogers, n. 10381) ; Nieuwdorp, 3 octobre 1912 (Ringoet, n. 2. — En terre noire).

CRASSULACEAE

KALANCHOE *Adans.*

Kalanchoe Homblei *De Wild.* in *Fedde* Repert. XII (1913), p. 298 ; Notes Fl. Katanga III (1914), p. 12.

Plante à tiges dressées atteignant plus de 1 mètre de haut, simples à la base, ramifiées vers le sommet, à tiges velues à l'état jeune, à poils glanduleux au sommet, devenant glabres à l'état adulte, feuilles basilaires... ; feuilles du milieu de la tige épaisses, sessiles, embrassantes, glabres, papyracées à l'état sec, obovales ou elliptiques, dentées-ondulées sur les bords, atteignant 13 cm. de long et 5,5 cm. de large, feuilles supérieures réduites passant aux bractées, velues comme les tiges atteignant parfois 2 cm. seulement de long. Inflorescences ramifiées, à rameaux de la partie médiane parfois ramifiés à leur tour et atteignant 20 cm. de long, velus comme les tiges, cimes plus ou moins dichotomes, à rachis velu, à fleurs bractéolées, à bractéoles linéaires, ciliées, atteignant jusque 3 mm. de long ; calice plus ou moins renflé à l'état adulte, atteignant environ 5 mm. de long, fendu jusqu'au delà de la moitié de sa longueur, éparsement velu et cilié, corolle jaune à tube velu extérieurement, renflé à la base, atteignant environ 1 cm. de long, à lobes elliptiques longuement acuminés, de 4 mm. environ de long et de 1,5 à 2,5 mm. de large, ovaire glabre, à style court, capité ; fruit à graines nombreuses.

Élisabethville, mai 1912 (Homblé, n. 656. — Sur les termitières, dans la brousse et dans le creux des arbres).

Obs. — Cette espèce est indiscutablement voisine du *K. glandulosa* Hochst. dont le prof. Engler a décrit une variété : *benguelensis* à laquelle nous avons rapporté un échantillon recueilli à Lukafu ; mais cet échantillon, comme d'ailleurs la plante recueillie dans le Marangu par Volkens, est beaucoup plus fortement velu. Quant au type de l'Abyssinie, dont nous avons sous les yeux un échantillon de Schimper, il possède des calices fructifères beaucoup plus développés et semble présenter, dans la disposition de ses feuilles, des caractères que nous ne trouvons pas dans la plante du Katanga.

Kalanchoe Homblei forma **reducta** *De Wild.* form. nov.

Plante atteignant au max. 45 cm. de haut, souvent plus réduite, à tige simple, à feuilles caulinaires atteignant au max. 3 cm. de long, embrassantes, les supérieures à limbe ovale-lancéolé ne mesurant souvent que 2 cm. de long et 2,5 cm. de large, à bords entiers ou très légèrement ondulés-dentés au sommet. Inflorescences terminales plus ou moins compactes à caractères assez semblables à ceux du type, mais à lobes libres de la corolle atteignant jusque 5 cm. de diamètre.

Élisabethville, 19 mai 1912 (J. Bequaert, n. 452. — Homblé, n. 656, p.p.).

Obs. — Les deux plantes ont été recueillies mélangées par M. Homblé ; à première vue elles diffèrent énormément ; nous avons tenu à les séparer de façon à attirer sur elles l'attention, car nous ne savons pas si la plante très développée, à inflorescence ramifiée, que nous décrivons comme type a été trouvée sur les termitières, ou si c'est la forme qui existe dans la savane ou dans le creux de certains arbres.

M. Bequaert, qui a récolté la plante uniquement sur les termitières, n'a trouvé que des formes réduites; on peut donc se demander si cette réduction n'est pas due à l'habitat.

ROSACEAE

PARINARIUM *Aubl.*

Parinarium Bequaerti *De Wild.* in *Fedde* Repert. XIII (1914), p. 108 ; Notes Fl. Katanga III (1914), p. 12.

Arbre à rameaux plus ou moins ramifiés, courtement tomenteux, brunâtres à l'état jeune, devenant glabres, à écorce fissurée ; feuilles elliptiques courtement pétiolées, à pétiole velu de 5 mm. env. de long, portant au sommet et de chaque côté une glande en dehors du limbe foliaire, à limbe arrondi à la base ou largement cunéiforme, courtement acuminé au sommet, glabre et luisant sur la face supérieure, mat et courtement tomenteux sur la face inférieure, de 6 à 12 cm. de long et de 2,8 à 6 cm. de large ; à 7-8 nervures latérales de chaque côté de la nervure médiane, plus proéminentes en dessous qu'en dessus. Inflorescences terminales ou à l'aisselle des feuilles supérieures formant par leur ensemble une panicule dense pouvant atteindre 20 cm. de diamètre. Inflorescences partielles plus ou moins fortement ramifiées, à rachis densément velu plus ou moins séricé, à tomentum d'un gris verdâtre, à fleurs plus ou moins longuement pédicellées, à bractées de la base du pédicelle rapidement caduques, pédicelle atteignant env. 5 mm. de long, tube calicinal en entonnoir, velu extérieurement, atteignant env. 5 mm. de long, glabre intérieurement sur le côté opposé à l'insertion de l'ovaire, densément velu à la gorge, lobes du calice arrondis atteignant 7 mm. de long et 6 mm. de large. Pétales atteignant 8 mm. de long et 5 mm. de large. Étamines exsertes à filet glabre, atteignant 13 mm. de long, à anthère d'env. 1,5 mm. de long; ovaire densément velu, style glabre env. aussi long que les étamines.

Élisabethville, 4 juillet 1912 (J. Bequaert).

Parinarium curatellifolium *Planch.*

Élisabethville, 25 juin et 4 juillet 1912 (J. Bequaert, n. — Nom ind. : Mupunda); Chisangwe, janvier 1912 (Homblé, n. 85. — Bois secs) ; Vieux-Kasongo (île des Eléphants), 30 sept. 1910 (J. Bequaert, n. 83) ; Lukonzolwa, 1 janvier 1912 (J. Bequaert, n. 249).

BYRSOCARPUS *Schun.* et *Thonn.*

Byrsocarpus coccineus *Sch.* et *Th.*

Riv. Lufira (Rogers, n. 10326).

ACACIA *Tourn.*

Acacia Buchananii *Harms.*

Vallée du Kapiri, février 1913 (Homblé, n. 1173. — Arbre. — Nom ind. : Kipunga [Kis.]).

CYNOMETRA *L*

Cynometra Bequaerti *De Wild.* in *Fedde* Repert. XII (1913), p. 293 ; Notes Fl. Katanga III (1914), p. 12.

Arbuste à tige ligneuse ; feuilles paripennées, à 2 paires de folioles, à rachis de 1,4 à 4 cm. de long à folioles glabres sur les 2 faces, mates en dessous, brillantes au-dessus, de 5 à 15 cm. de long et de 15 à 46 mm. de large, inéquilatérales, cunéiformes à la base, acuminées au sommet, émarginées, à nervures principales à plus de 10 de chaque côté de la nervure médiane, anastomosées en arc avant d'atteindre le bord, à réticulation peu proéminente mais nette sur les 2 faces. Inflorescences solitaires ou géminées à l'aisselle de feuilles existantes ou de feuilles tombées, à pédoncule commun atteignant un peu plus de 1 cm. de long, tomenteux, fleurs bractéolées à la base du pétiole ou vers la base de ce pétiole, à bractéole linéaire caduque, calice à tube de 3,5 mm. env. de long, à lobes lancéolés ou ovales-lancéolés réfléchis pendant l'anthèse, atteignant 9 mm. de long et de 1 à 3,5 mm. de large, pétales dressés subégaux, obovales-oblongs, atteignant 13 mm. de long et de 2 à 3,5 mm. de large ; étamines à filets glabres soudées à leur base, atteignant 14 mm. de long, à anthère d'env. 1 mm. Ovaire densément velu à style glabre.

Cynometra floribunda *Benth.*

Tschinsenda (Rogers, n. 10371).

BAUHINIA *L.*

Bauhinia fassoglensis *Kotsch.*

Vallée de Kapiri (Katanga), février 1913 (Homblé, n. 1183. — Nom vern. : Matewa [Kis.]).

Bauhinia Petersiana *Bolle.*

Vallée de Kapiri (Katanga), février 1913 (Homblé, n. 1163. — Nom vern. : Mutata [Kis.]).

Bauhinia reticulata *DC.*

Vallée de Kapiri (Katanga), février 1913 (Homblé, n. 1243. — Nom vern. : Mufumbi [Kis.]).

CASSIA *L.*

Cassia mimosoides *L.*

Tschinsenda (Rogers, n. 10114) ; Élisabethville (Rogers, n. 10184).

Cassia Petersiana *Bolle.*

Vallée de Kapiri, mars 1913 (Homblé, n. 1310. — Arbuste, fleurs jaunes .

SWARTZIA *Schreb.*

Swartzia madagascariensis *Desv.*

Nieuwdorp, 26 octobre 1910 (Ringoet) ; Katentania, plateau des monts Biano-Manika, novembre 1912 (Homblé, n. 699) ; Vallée de Kapiri, février 1913 (Homblé, n. 1169. — Nom vern. : Pambi [Kis.]) ; Vallée de Kapiri, mars 1913 (Homblé, n. 1297. — Nom vern. : Pambi [Kis.]).

Swartzia *sp.*

Lukonzolwa, janvier 1912 (J. Bequaert, n. 241) ; Élisabethville, mai 1912 (Homblé, n. 296. — Nom vern. : Dali).

CROTALARIA *L.*

Crotalaria Baumiana *Harms.*

Élisabethville, 4 mars 1912 (J. Bequaert, n. 228) ; mai 1912 (Homblé, n. 320. — Nom ind. : Mukombe) et décembre 1911 (Ad. Hock).

Crotalaria cephalotes *Steud.*

Sakania (Rogers, n. 10026) ; Élisabethville (Rogers, n. 10900).

Crotalaria cleomifolia *Welw.*

Élisabethville, juin 1912 (J. Bequaert, n. 439) et mai 1912 (Homblé, n. 334. — Nom ind. : Kissombo).

Crotalaria cylindrocarpa *DC.*

Élisabethville, avril 1912 (Homblé, n. 289. — Nom ind. : Sombo).

Crotalaria Elisabethae *Baker f.*

Élisabethville, mai 1912 (Homblé, n. 302. — Nom ind. : Sombo), et 17 mai 1912 (J. Bequaert, n. 446).

Crotalaria glauca *Willd.*

Vallée de Kapiri, mars 1912 (Homblé, n. 1292. — Voisinage des cours d'eau, fleurs jaunes, 1 m. de hauteur).

Crotalaria Homblei *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUXELLES V (1915), p. 23.

Arbuste de 2 m. de hauteur, à rameaux dressés, polygonaux, striés, densément velus, olivâtres, à feuilles rapprochées, entrenœuds atteignant 15 mm. de long ; feuilles trifoliolées, pétiolées, à pétiole de 1,3-3 cm. de long, densément et courtement velu, folioles oblongues ou obovales, subsessiles, plus ou moins longuement cunéiformes sur la base, cunéiformes et courtement apiculées au sommet, assez densément velues sur les deux faces, à poils apprimés, subséricés, ciliées sur les bords, de 1,7-6 cm. de long et 7-22 mm. de large ; à environ 7 nervures latérales principales de chaque côté de la nervure médiane, anastomosées près du bord, peu visibles sur les deux faces, stipules ovales-falciformes à nervure centrale submarginale, arrondies à la base, longuement aiguës au sommet, velues sur les deux faces comme les feuilles, atteignant 2 cm. de long et env. 6 mm. de large. Fleurs axillaires, solitaires, formant à l'extrémité des rameaux un racème plus ou moins considérable, feuillu ou nu, pédicellées, à pédicelle velu, atteignant 13 mm. de long, bractéolé vers le sommet, bractéoles rapidement caduques ; calice densément velu extérieurement, de 15 mm. env. de long, à 5 lobes ovales-lancéolés, apiculés, atteignant 12 mm. de long et jusque env. 5 mm. de large, glabres intérieurement, ciliés sur les bords ; étendard à onglet d'env. 5 mm. de long, à limbe glabre sur les deux faces, jaune-rougeâtre, subcirculaire, atteignant 18 mm. env. de long et de large ; ailes à onglet d'env. 5 mm., à limbe glabre de 18 mm. env. de long et 10 mm. de large ; carène aiguë au sommet à onglet de 4 mm. env., à limbe recourbé d'environ 15 mm. de long, glabre sur le dos sauf à la base, densément velue-ciliée sur le bord ; ovaire glabre sauf sur les sutures dorsales et ventrales, plus ou moins longuement ciliées, à poils brunâtres et au sommet, à la naissance du style, celui-ci glabre sauf sur la face ventrale ciliée au sommet.

Vallée de Kapiri, versant du plateau de Biano, sur schiste gréseux, février 1913, assez rare (Homblé, n. 1223) ; Shinsenda, 24 février 1912 (Ringoet, coll. Homblé, n. 388. — Rare).

Crotalaria kapiriensis *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUXELLES, V (1915), p. 23.

Plante forte atteignant 2 m. de haut, ramifiée, à rameaux courtement velus, striés longitudinalement, épineux ; feuilles trifoliolées, pétiolées, à pétiole atteignant 13 mm. de long, velu, à poils apprimés, à stipules courtes, triangulaires-lancéolées, d'env. 1 mm. de long, à folioles subsessiles, longuement obovales, cunéiformes à la base, arrondies-tronquées et courtement apiculées ou émarginées au sommet, glabres sur la face supérieure, velues sur la face inférieure, à poils apprimés, ciliées sur les bords, de 7-25 mm. de long et 3-5 mm. de large ; fleurs solitaires par deux plus ou moins longuement distantes sur les épines ou plus nombreuses au sommet des ramifications se terminant en épine ; à pédicelle velu, atteignant 5 mm. de long, bractéolé à la base, à bractéole linéaire, velue, de 2 mm. env. de long ; calice d'env. 10 mm. de long, à lobes lancéolés-aigus d'au moins 5 mm. de long ; étendard de 18 mm. env. de long et 15 mm. de large, séricé extérieurement ; ailes de 14 mm. env. de long et 4 mm. de large ; carène d'env. 18 mm. de long, courbée à angle droit à la base, glabre, rétrécie au sommet ; fruits sessiles de 25 mm. de long et 14 mm. d'épaisseur, courtement velus, à plusieurs graines.

Vallée de Kapiri, février 1913 (Homblé, n. 1206. — Assez rare ; fructifie en mars-avril).

Crotalaria lanceolata *E. Meyer.*
Riv. Lufira (Rogers, n. 10398).
Crotalaria ononoides *Benth.*
Vallée de Kapiri, 1913 (Homblé, n. 1205).
Crotalaria Rogersii *Baker f.*
Élisabethville (Rogers, n. 10241).

INDIGOFERA *L.*

Indigofera Baumiana *Harms.*
Vallée de la Luembe, février 1910 (Ad. Hock) ; Élisabethville, 4 mars 1912 (J. Bequaert, n. 228) ; Élisabethville, février 1912 (Homblé, n. 208. — Nom ind. : Mumela. — Brousses et chemins, hauteur 60 cm.) ; Élisabethville, décembre 1911 (Ad. Hock).
Obs. — Les échantillons : Homblé, n. 208, 320 et Hock, décembre 1911, sont rapportés par M. Baker f. à ce type avec doute.
Indigofera emarginella *Steud.*
Shinsenda, février 1912 (A. Ringoet, n. 374. — Nom ind. : Kanjiminjumio).
Indigofera hilaris *Eckl.* et *Zeyher.*
Sakania (Rogers, n. 10042).
Indigofera Hocki *De Wild.*
Élisabethville, septembre 1912 (Ad. Hock).
Indigofera macrophylla *Schum.* et *Thonn.*
Vallée de la petite Luembe, février 1910 (Ad. Hock) ; Élisabethville, mars 1912 (Homblé, n. 266. — Graines vénéneuses. — Nom ind. : Mukonke).
Indigofera setiflora *Baker.*
Sakania (Rogers, n. 10039).

TEPHROSIA *Pers.*

Tephrosia Forbesii *Baker.*
Tschinsenda (Rogers, n. 10103, 10394).
Tephrosia Vogelii *Hook. f.*
Vallée de Kapiri, mars 1913 (Homblé, n. 1287). — Nom vern. : Kawawa (Kis.). — Les indigènes empoisonnent les poissons avec cette plante)

AESCHYNOMENE *L.*

Aeschynomene nambalensis *Harms.*
Tschinsenda (Rogers, n. 10105).

SMITHIA *Ait.*

Smithia strobylantha *Welw.*
Élisabethville (Rogers, n. 10239).

DESMODIUM *Desv.*

Desmodium gangeticum *DC.*
Kamatanda (Rogers, n. 10337).
Desmodium paleaceum *Guill.* et *Perrot.*
Élisabethville (Rogers, n. 10214),

PTEROCARPUS *L.*

Pterocarpus Dekindtianus *Harms.*
Vallée de Kapiri, Katanga, février 1913 (Homblé, n. 1117). — Nom vern. : Mutondo [Kis.]).

CRAIBA *Harms.*

Craiba affinis *De Wild.* (Lonchocarpus affinis *De Wild.*).
Sankisia, 18 août 1911 (J. Bequaert, n. 178. — Bords de la Luena).

Obs. — La plante recueillie par M. Bequaert diffère légèrement du type des environs de Lukafu ; il faudrait, pour arriver à définir avec précision les espèces de ce genre, des matériaux nombreux, car, à en juger d'après les récoltes de M. Bequaert, les feuilles sont très variables sur un même pied suivant leur situation.

GLYCINE *L.*

Glycine moerensis *De Wild.* in *Fedde* Repert. XII (1913), p. 294 ; Notes Fl. Katanga III (1914), p. 16.

Plante paraissant sous-frutescente, à base ligneuse, à tiges dressées, plus ou moins divergentes atteignant 30 à 40 cm. de hauteur, rameaux striés longitudinalement, densément velus à poils plus ou moins réfléchis, stipules lancéolées plus ou moins persistantes atteignant 5 mm. de long et 1,5 mm. de large à la base. Feuilles trifoliolées à pétiole commun velu comme les tiges, atteignant 2,5 cm. de long, folioles latérales courtement pétiolulées, à pétiolule d'environ 2-3 mm. de long, foliole terminale distante des latérales de 15 à 22 mm., folioles elliptiques, les latérales peu ou pas inéquilatérales, velues légèrement, scabres sur les 2 faces, de 4,5 à 7 cm. de long et de 8 à 25 mm. de large, à 6-7 nervures latérales principales de chaque côté de la nervure médiane. Inflorescences axillaires ou terminales, plus ou moins longuement pédonculées à pédoncule pouvant atteindre 7,5 cm. de long, fleurs blanches réunies en capitules denses, bractéolées à la base, à bractéole linéaire pouvant atteindre 5 mm. de long. Calice densément velu comme les tiges, atteignant env. 5 mm. de long. Étendard de 6 mm. environ de long, émarginé au sommet et de 3 mm. de large, plus long que les ailes et la carène, ovaire légèrement velu.

Kilwa, novembre 1904, dans la savane à environ 1000 mètres d'altitude.

Obs. — Par son aspect général, par la disposition et la couleur des fleurs, le *G. mœrensis* rappelle les *G. holophylla* (Baker) *Taub.* et *G. Bequaerti De Wild.*, se différenciant de tous deux par le nombre de folioles des feuilles, se rapprochant du dernier surtout par la forme de la foliole.

Glycine Ringoeti *De Wild* in *Fedde* Repert. XII (1913), p. 295 ; Notes Fl. Katanga III (1914), p. 16.

Plante à tige plus ou moins volubile, polygonale, à poils brunâtres, denses, réfléchis; stipules caduques ; feuilles trifoliolées, pétiolées à pétiole velu comme les tiges atteignant 5,5 cm. de long, folioles toutes pétiolulées, stipellées à stipelle linéaire atteignant 2 5 mm. de long, à pétiolule velu de 3-4 mm. de long, à limbe longuement elliptique, arrondi ou subcordé à la base, arrondi-apiculé au sommet, velu sur les 2 faces, un peu plus pâle en dessous qu'au-dessus, à environ 7-9 nervures latérales principales de chaque côté de la nervure médiane, de 4 à 7,5 cm. de long et de 9 à 20 mm. de large, racème axillaire allongé atteignant 50 cm. de long, lâche, à rachis fortement velu à poils réfléchis. Fleurs solitaires, géminées ou fasciculées, bractéolées à la base, à bractéole velue, ciliée, pédicellée. à pédicelle atteignant 3 mm. de long, calice bibractéolé à bractéoles longuement ciliées, atteignant environ 2 mm. de long, calice très longuement velu, cilié à poils apprimés, atteignant environ 4 mm. de long, corolle dépassant assez peu le calice à étendard d'environ 5 mm. de long, dépassant un peu les ailes et la carène. Corolle rougeâtre.

Shinsenda, mars 1912 (Ringoet, coll. Homblé, n. 466).

Obs. — Cette espèce présente quelques ressemblances avec le *G. Gilletii* que nous avons décrit antérieurement du Bas-Congo, mais chez ce dernier les folioles latérales sont, comme les terminales, beaucoup plus développées et inéquilatérales, tandis que dans la forme du Katanga ces folioles sont régulières.

ERYTHRINA *L.*

Erythrina tomentosa *Br.*
Élisabethville (Rogers, n. 10171).

RHYNCHOSIA *DC.*

Rhynchosia caribaea *Dc.*
Riv. Lufira (Rogers, n. 10316).

ERIOSEMA *DC.*

Eriosema Engleriana *Harms.*
Sakania (Rogers, n. 10034).
Eriosema parviflorum *E. Meyer.*
Tschinsenda (Rogers, n. 10372, 10292).

PHYSOSTIGMA *Balf.*

Physostigma mesoponticum *Taub.*
Élisabethville (Rogers, n. 10017, 10167) ; Muskoshi (Rogers, n. 10379).

VIGNA *Savi.*

Vigna marginata *Benth.*
Muskoshi (Rogers, n. 10380).

DOLICHOS *L.*

Dolichos lupinifolia *Baker.*
Élisabethville (Rogers, n. 10298).

PSOPHOCARPUS *Neck.*

Psophocarpus longipedunculatus *Hassk.*
Vallée de Kapiri, février 1913 (Homblé, n. 1184).

OXALIDACEAE

OXALIS *L.*

Oxalis minima *De Wild.*
Vallée de Kapiri, février 1913 (Homblé, n. 1095).

BIOPHYTUM *DC.*

Biophytum Ringoeti *De Wild.*
Élisabethville, novembre 1911 (Ad. Hock. – Sur termitière).
Biophytum sensitivum *L.*
Vallée de Kapiri, février 1913 (Homblé, n. 1107).

RUTACEAE

FAGARA *L.*

Fagara Homblei *De Wild.* in Bull. Jard. Bot. Brux., IV (1914), p. 390.

Arbre à écorce munie d'excroissances terminées par une épine atteignant 11 mm. de long, plus ou moins recourbée, disparaissant à l'état adulte ; tige fructifère munie de feuilles vers l'extrémité seulement, feuilles imparipennées à rachis épineux ou non, plus ou moins canaliculé, légèrement ailé, atteignant 18 cm. de long, à 4-5 paires de folioles, toutes sessiles même la terminale, glabres sur les 2 faces, parfois munies de quelques poils à la base, plus pâles en-dessous qu'au-dessus, limbe des folioles latérales inéquilatéral, de 1 à 5.7 cm. de long et de 6 à 22 mm. de large, largement cunéiforme à la base, cunéiforme au sommet à bords entiers légèrement recourbés, foliole terminale régulière souvent plus courte que les latérales. Inflorescences axillaires vers le sommet des branches. Fleurs... Infrutescences à rachis simple ou à peine ramifié vers la base, ne dépassant pas 4,5 cm. de long, à fruits stipités, déhiscents, à valves d'env. 6 mm. de long et 6 mm. de large à graine d'un noir violacé brillant.

Élisabethville, février 1912 (Homblé, n. 167. — Sur les termitières. — Nom indigène : Popwe. — Employées par les indigènes en usage interne contre les maux de ventre ; les feuilles dégagent, par froissement, une très forte odeur de citronnelle. Les fruits possèdent la même propriété).

CLAUSENA *Burm.*

Clausena anisata *Hook. f.*
Katentania, nov. 1912 (Homblé, n. 732) ; Élisabethville, sept. 1911 (Ad. Hock).

SIMARUBACEAE

IRVINGIA *Hook. f.*

Irvingia katangensis *De Wild.*
Plateau de Biano (Esschen-Plateau), novembre 1912 (Homblé, n. 860. — Fleurs blanches) ; Environs de Katentania, 1912 (Homblé, n. 784. — Feurs roses ; n. 771. — Fleurs blanches).

MELIACEAE

TRICHILIA *L.*

Trichilia emetica *Vahl.*
Élisabethville (Rogers, n. 10295).

POLYGALACEAE

POLYGALA *L.*

Polygala abyssinica *Fresen.*
Nieuwdorp (Rogers, n. 10797).
Polygala Ehlersii *Gürke.*
Vallée de Kapiri, 1913 (Homblé, n. 1138).
Polygala usafuensis *Gürke.*
Vallée de Kapiri, 1912 (Homblé, n. 1211. — Assez commun).

SECURIDACA *L.*

Securidaca longipedunculata.
Vallée de Kapiri, février 1913 (Homblé, n. 1153. — Nom ind. : Mwiu [Kis.]).
— — var. **parvifolia** *Oliv.*
Nieuwdorp, mai 1912 (J. Bequaert, n. 408).

EUPHORBIACEAE

PSEUDOLACHNOSTYLIS *Pax.*

Pseudolachnostylis glauca *Hutch.*
Kongolo, février 1911 (J. Bequaert, n. 76) ; Élisabethville, février 1912 (Homblé, n. 198. — Nom ind. : Mu Sangali. — Sur termitière ; grand arbre à fruits comestibles).
Pseudolachnostylis maprounaefolia *Pax.*
Élisabethville (Rogers, n. 10264).

EUPHORBIA *L.*

Euphorbia Eylesii *Rendle.*
Kamatanda (Rogers, n. 10345).
Euphorbia zambesina *Benth.*
—— var. **bengulense** *N. E. Br.*
Sakania (Rogers, n. 10010).

PHYLLANTHUS *L.*

Phyllanthus retinervis *Hutch.*
Élisabethville (Rogers, n. 10090).

HYMENOCARDIA *Wall.*

Hymenocardia acida *Tul.*
Élisabethville (Rogers, n. 10179, 20294).

ANTIDESMA *L.*

Antidesma membranaceum *Muell.-Arg.*
Riv. Lufira (Rogers, n. 10312).
Antidesma venenosum *E. Meyer.*
Élisabethville, mai 1912 (Homblé, n. 312. — Nom. ind. : Ditompo) et février 1912 (Homblé, n. 158. — Sur termitière).

UAPACA *Baill.*

Uapaca Kirkiana *Muell.-Arg.*
Élisabethville (Rogers, n. 10144).

Uapaca pilosa *Hutch.*
Kamatanda (Rogers, n. 10343).

PAIVAEUSA *Welw.*

Paivaeusa dactylophylla *Welw.* Sert. angol. p. 21, tab. VII. Katanga, 1911 (Ad. Hock. — Nom ind. : Musongwe; Kilumbi-Lumbi); Nieuwdorp, mai 1912 (J. Bequaert, n. 405).

BRIDELIA *Willd.*

Bridelia micrantha *Baill.*
Riv. Lufira (Rogers, n. 10313).

NEOBOUTONIA *Muell.-Arg.*

Neoboutonia africana *Muell.-Arg.*
Élisabethville (Rogers, n. 10261).

ACALYPHA *L.*

Acalypha ambigua *Pax.*
Élisabethville (Rogers, n. 10098).

Acalypha ciliata *Vahl.*
Shinsenda, mars 1911 (Ringoet, coll. Homblé, n. 464. — Nom ind. : Kipopo).

Acalypha psilostachys *Hochst.*
Élisabethville (Rogers, n. 10053).

Acalypha senensis *Kl.*
Chisangwe, janvier 1912 (Homblé, n. 80. — Nom ind. : Kawoko); Shinsenda, mars 1912) (leg. Ringoet, coll. Homblé, n. 460).

Acalypha Stuhlmannii *Pax.*
Tschinsenda (Rogers, n. 10110)

MAPROUNEA *Aubl.*

Maprounea africana var. **benguelensis** *Pax.*
Sankisia, 2 août 1912 (J. Bequaert, n. 1617. — Savane boisée); Nieuwdorp, 4 mai 1912 (J. Bequaert, n. 411. — Nom ind. : Kasununu. — Savane boisée).

ANACARDIACEAE

SCLEROCARYA *Hochst.*

Sclerocarya caffra *Sond.*
Riv. Lufira (Rogers, n. 10309).

ICACINACEAE

APODYTES *E. Meyer.*

Apodytes dimidiata *E. Meyer.*
Baya (Rogers, n. 10129).

SAPINDACEAE

PAULLINIA *L*

Paullinia pinnata *L.*
Élisabethville (Rogers, n. 10132) ; Riv. Lufira (Rogers, n. 10305).

BALSAMINACEAE

IMPATIENS *L.*

Impatiens Homblei *De Wild.* in Bull. Jard. Bot. Brux. V (1915), p. 39.

Plante herbacée atteignant 1,50 m. de haut, ramifiée, rameaux glabres ; feuilles alternes, pétiolées à pétiole de 0,5-3 cm. de long, glabre, plus ou moins ailé, muni surtout vers la base de quelques glandes marginales, limbe elliptique, longuement cunéiforme à la base et cunéiforme apiculé au sommet, de 5,5-10 cm. de long et 2-3,5 cm. de large, très peu profondément denté sur les bords, à dents sétuleuses sur le côté, grisâtre sur la face inferieure, d'un vert noirâtre à l'état sec sur la face supérieure, glabre sur les deux faces ; fleurs roses et jaunes axillaires, solitaires, ou géminées, pédonculées, à pédoncule glabre de 22-25 mm. de long, sépales latéraux lancéolés, de 3,5 mm. env. de long, aigu et de env. 1 mm. de large, glabre ; étendard très convexe d'environ 9 mm. de long, de 3-4 mm. de profondeur, apiculé au sommet, labelle de

15 mm. env. de long en entonnoir, à éperon recourbé d'env. 5 mm. de long, obpyriforme au sommet, obtus; ovaire glabre, ellipsoïde, de 5 mm. env. de long.

Région du Lualaba, vallée de la Kapanda, dans les marais, décembre 1912 (Homblé, n. 1017).

Obs. — Cette espèce présente certaines analogies avec l'*I. bicolor* Hook. f. très répandu en Afrique tropicale ; l'*I. Homblei* se différencie par des feuilles à dents moins accusées et moins acérées, et par l'éperon du labelle beaucoup plus court; dans l'*I. bicolor* Hook. cet éperon est environ aussi long que le labelle; dans l'*I. Homblei,* alors que le labelle mesure 15 mm. env., l'éperon ne mesure que 5 mm. (Cf. *O. Warburg* in *Engler* Bot. Jahrb. XXII, p. 47, et Bot. magaz., tab. 5365).

Impatiens Irvingii *Hook.* f.

Env. de Katentania, novembre 1912 (Homblé, n. 816).

Impatiens katangensioides *De Wild.*, nov. spec. (¹).

Plante herbacée, à tiges dressées de 20-50 cm. de haut, à entre-nœuds de 1-10 cm. de long, les inférieurs généralement les plus longs, glabres ; feuilles opposées sessiles ou subsessiles, les inférieures parfois subcirculaires, subréniformes ne mesurant que 10 cm. de long, les moyennes atteignant 5 cm. de long et 14 mm. de large, glabres sur les deux faces, arrondies ou subcordées à la base, cunéiformes subaiguës au sommet, denticulées peu profondément sur les bords, nervure médiane peu proéminente sur les deux faces, nervures secondaires très obscures, fleurs blanches axillaires, solitaires, à pédoncule glabre de 32-35 mm. de long, sépales ovales-aigus de env. 3 mm. de long, labelle infundibuliforme d'env. 9 mm. de long du sommet du pédicelle à la pointe, se terminant en un éperon légèrement recourbé atteignant 8-9 mm. de long.

Vallée de Kapiri, février 1913 (Homblé, n. 1233) ; Plateau de Biano (Esschen), vallée boisée, novembre 1912 (Homblé, n. 860).

Obs. — Cette espèce se range dans le voisinage du *S. katan-*

(¹) *Impatiens katangensioides* : Herbaceus, ramis erectis 20-50 cm. longis, internodiis 1-10 cm. longis ; foliis oppositis sessilibus vel subsessilibus, subcircularibus, subreniformibus vel ovatis, usque 5 cm. longis et 14 mm. latis, supra et infra glabris, basi rotundatis vel subcordatis, apice cuneatis subacutis, margine leviter dentatis ; floribus axillaribus, solitaribus, pedonculo glabro 32-35 mm. longo, sepalis ovato-acutis circ. 3 mm. longis, labellum infundibuliforme circ. 9 mm. longum, calcaratum, calcaro leviter recurvato 8-9 mm. longo, alis circ. 18 mm. longis, ovario glabro.

gensis De Wild., dont elle se différencie, entre autres, par la glabréité des tiges, ce qui lui communique à première vue un facies particulier.

Impatiens katangensis *De Wild.*

Élisabethville, février 1912 (Homblé, n. 123. — Fleurs blanches. — Nom ind. : Nianpowo).

RHAMNACEAE

ZIZYPHUS *Adans.*

Zizyphus Jujuba *Lam.*

Riv. Lufira (Rogers, n. 10307).

— — var. **obliquifolia** *Engl.*

Katentania (Manika), novembre 1912 (Homblé, n. 720. — Vallée boisée. Arbre sur termitière).

HELINUS *E. Meyer.*

Helinus ovata *E. Meyer.*

Élisabethville (Rogers, n. 10054).

AMPELIDACEAE

AMPELOCISSUS *Planchon.*

Ampelocissus cavicaulis *(Baker)* Planchon.

Vallée de la Lufira, décembre 1899 (Éd. Verdick, n. 335).

Ampelocissus venenosa *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUX. IV (1914), p. 364.

Plante sarmenteuse, à racine allongée tuberculeuse, à tiges grêles ou épaissies-ligneuses, atteignant 6 mm. de diam., à entre-nœuds pouvant atteindre 13 cm. de long, glabres à l'état adulte, striées longitudinalement, velues à l'état jeune, cirrhes, grêles simples ou ramifiées ; stipules falciformes aiguës, ciliées, caduques de 5 mm. env. de long ; feuilles 5-foliolées, à pétiole de 2,2-6 cm. de long velu à l'état jeune, devenant plus ou moins rapidement glabre, folioles plus ou moins scabres sur la face supérieure, devenant parfois glabres, velues sur la face inférieure à villosité d'un brun roussâtre, foliole médiane obovale, plus ou moins longuement cunéiforme à la base, arrondie ou cunéiforme au sommet, dentelée sur les bords, pétiolulée à pétiolule atteignant 17 mm. de long, à limbe plus ou moins décurrent le long du pétiolule, à environ 6 nervures latérales principales en relief sur la face inférieure, plus ou moins en creux sur la face supérieure, se terminant avec les ramifications dans les dents du limbe, atteignant 9 cm. de long et 3,5 cm. de large, folioles intermédiaires de même forme mais plus petites, souvent plus courtement pétiolulées, parfois subsessiles à l'état jeune, folioles latérales subsessiles ou à limbe décurrent presque jusqu'à la base, plus petites que les intermédiaires, inéquilatérales à la base, de 2,4-6 cm. de long et de 14-29 mm. de large ; inflorescences... ; infrutescences à pédoncule commun glabre atteignant 6 cm. de long, portant au sommet, latéralement, une vrille simple ou ramifiée glabre, et un glomérule lâche de fruits plus ou moins longuement pédicellés, à pédicelle de 2-6 mm. de long glabre; fruits obovoïdes plus ou moins longuement rétrécis à la base, glabres, rougeâtres, atteignant (mûrs ?) 12 mm. de long et 10 mm. de large.

Élisabethville, février 1912 (Homblé, n. 170. — Plante sarmenteuse. — Nom ind. : Milundu).

TILIACEAE

CORCHORUS *L.*

Corchorus tridens *L.*

Shinsenda, mars 1912 (Ringoet, Coll. Homblé, n. 473. — Nom ind. : Dulua).

GREWIA *L.*

Grewia Homblei *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUX. V (1915), p. 68.

Liane à rameaux subcylindriques plus ou moins densément velus, à poils ramifiés ou étoilés, devenant glabres, à écorce noirâtre irrégulièrement striée longitudinalement ; feuilles pétiolées, stipules... caduques, pétiole de 4-5 mm. de long, courtement tomenteux, limbe ovale ou obovale, plus ou moins inéquilatéral, arrondi à la base, plus ou moins brusquement ou subobtusément acuminé au sommet, doublement denticulé-serré sur les bords, de 3-8,5 cm. de long et 1,6-5 cm. de large, éparsement velu sur la face supérieure à poils étoilés courts, plus densément velu sur la face inférieure, sur le limbe et les nervures ; nervures basilaires 3, nervures latérales principales au nombre de 5 env. de chaque côté de la nervure médiane, à domaties axillaires, non anastomosées entre elles vers le bord, nervures secondaires subhorizontales, toutes plus proéminentes en-dessous qu'au-dessus ; inflorescences axillaires à pédoncule commun très court, de 3-4 cm. de long, velu, involucre à lobes de 2-3 cm. de long, velus extérieurement, subglabrescents intérieurement, fleurs jaunes peu nombreuses, au nombre de 1-5, pédicellées à pédicelle velu de 5-7 mm. de long, sépales au nombre de 5 de 16 mm. env. de long et 2,5 mm. de large, velus extérieurement, glabres intérieurement, pétales légèrement onguiculés de 9 mm. env. de long, plus ou moins élargis à la base et velus, glanduleux intérieurement, velus-séricés extérieurement de 3 mm. env. de large, glabres dans leur partie supérieure sur les deux faces, torus de 1,5-2 mm. de long, glabres sauf au niveau de l'insertion des étamines où il est très légèrement et courtement tomenteux, étamines libres à filet glabre atteignant env. 11 mm. de long, ovaire densément velu, style grêle velu presque jusqu'au sommet, de 9 mm. env. de long, à stigmate à peine élargi.

Élisabethville, février 1912 (Homblé, n. 161. — Sur termitière. Liane à fleurs jaunes, tige à section très irrégulière. — Nom ind. : Mulembwe).

Grewia kapiriensis *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUX. V (1915), p. 69.

Arbre de taille moyenne à rameaux cylindriques, densément et assez courtement velus à l'état jeune, à poils plus ou moins étalés, devenant glabre à écorce grisâtre, entre-nœuds de 5-12 mm. de long ; feuilles alternes pétiolées à pétiole court de 2-3 mm. de long, velu, stipulé à stipules plus ou moins rapidement caduques, linéaires, velues de 3-4 mm. de long ; limbe elliptique ou obovale, de 11-42 cm. de long et 9-17 mm. de large, inéquilatéral à la base, obtus-subcordé, arrondi ou très largement cunéiforme au sommet, éparsement velu sur la face supérieure au moins sur les nervures, à poils étoilés, plus densément velu sur la face inférieure, nervures basilaires au nombre de 3, nervures latérales principales au nombre de 3-4 de chaque côté de la nervure médiane, non anastomosées en arc avant d'atteindre le bord, peu ou pas proéminentes en-dessous ; inflorescences axillaires à pédoncule commun court atteignant au maximum 5 mm. de long, velu ; involucre... ? ; fleurs jaunes au nombre de 1-3, à pédicelle de 9-10 mm. de long, velu, sépales au nombre de 5, atteignant 17 mm. de long et 2,5 mm. de large, assez densément mais courtement velus-étoilés sur le dos, glabres intérieurement ; pétales 5, de 11 mm. env. de long, velus et glanduleux intérieurement à la base, de 2,5 mm. env. de large, velus-séricés extérieurement, glabres dans sa partie supérieure sur les deux faces et de 25 mm. env. de large, torus de 2 mm. de long ondulé et glabre ou très légèrement tomenteux au sommet, étamines libres de 10 mm. env. de long à filet glabre, ovaire densément velu à style dépassant les étamines, irrégulièrement lobulé au sommet, velu dans sa moitié inférieure ; fruit à 4 graines, plus ou moins quadrilobé, devenant glabre à l'état de maturité, à écorce plus ou moins luisante, fragile, recouvrant une enveloppe fibreuse dans laquelle une graine de 6-7 mm. de long et 5 mm. de large.

Vallée de Kapiri, février 1913 (Homblé, n. 1176. — Arbre de taille moyenne, en terre sèche assez commun) ; Lukafu, octobre

1899 (Éd. Verdick, n. 199. — Nom. ind. : Butola. — Arbre à fruits comestibles ?).

TRIUMFETTA *L.*

Triumfetta Bequaerti *De Wild.* in Bull. Jard. Bot. Brux. V (1915), p. 73.

Plante à tiges dressées, ramifiées, à rameaux densément velus, plus ou moins brunâtres, à poils simples et étoilés mélangés ; feuilles alternes pétiolées, à pétiole de 8-55 mm. de long, densément velu à poils étalés, simples et étoilés, limbe rhomboïdal, subcordé à la base, obscurément trilobé ou ovale, plus ou moins cordé à la base, plus ou moins acuminé subobtus au sommet, à 5-7 nervures basilaires, à 3-4 nervures latérales, velu-tomenteux sur les deux faces, surtout à l'état jeune, à poils simples assez allongés plus nombreux que les poils étoilés, plus pâle en dessous qu'au-dessus, de 2,5-10,5 cm. de long et 1-8 cm. de large, largement denté sur les bords ; stipules linéaires, velues-ciliées, atteignant 8 mm. de long, fleurs en fascicules axillaires, à pédicelle densément et courtement tomenteux atteignant 2 mm. de long, bractéolé à la base, à bractéoles filiformes densément velues-grisâtres, calice densément velu extérieurement à lobes linéaires de 6 mm. env. de long, glabres intérieurement, munis d'une corne de 0,5 mm. env. de long, velue, pétales de 4 mm. env. de long, velus à la base, étamines au nombre de 8-10, ovaire velu, style glabre ; fruits de 6 mm. env. de diamètre, épines comprises, 4-loculaires, déhiscents, velus sur le corps comme sur les épines, celles-ci de 2 mm. max. de long, à poils plus ou moins étalés depuis la base jusqu'au sommet, terminées par une soie raide, droite ou oblique, rarement par plus d'une soie.

Welgelegen, 3 mai 1913 (J. Bequaert, n. 416) ; Tsinshenda, 15 mai 1912 (Ringoet, n. 1).

Triumfetta patulo-pilosa *De Wild.* in Bull. Jard. Bot. Brux. V (1915), p. 74.

Plante de plus de 50 cm. de haut, plus ou moins ramifiée, à rameaux grêles cylindriques, velus, à poils simples et étoilés plus ou moins denses, entre-nœuds de 1-6 cm. de long ; feuilles pétiolées à pétiole de 3-15 mm. de long, velues, limbe elliptique, de 2,8-5,3 cm. de long et 10-24 mm. de large, arrondi ou très légèrement subcordé à la base, cunéiforme au sommet, grossement denté sur les bords, éparsement velu sur les deux faces, à poils simples, 3-5 nervures basilaires, la nervure basilaire interne se continuant jusqu'au delà du milieu du limbe, nervures latérales principales au nombre de 2-3 de chaque côté de la nervure médiane, plus proéminentes en dessous qu'au-dessus ; stipules linéaires atteignant 3,5 mm. de long, ciliées ; inflorescences axillaires, en cymes au nombre de 1-5, généralement triflores, à pédoncule velu atteignant 4-5 mm. de long, muni au sommet de bractées linéaires, ciliées atteignant 3 mm. de long ; fleurs pédicellées, à pédicelle atteignant 2 mm. de long courtement poilu, calice de 4-5 mm. env. de long, lobes linéaires, densément velus extérieurement, à poils étalés-brunâtres, à corne terminale d'env. 0,5 mm. ciliée ; pétales de 4-5 mm. env. de long obovales-oblongs, ciliés à la base ; étamines environ aussi longues que les pétales, à filet glabre ; ovaire velu, style glabre ; fruits inconnus.

Tshisinka (Plateau de Biano), février 1913 (Homblé, n. 1256. — Commun. Endroits humides).

Triumfetta Descampsii *De Wild.*

Bukama, 1911 (J. Bequaert, n. 96) ; Nieuwdorp, 1912 (Ringoet, n. 3) ; Élisabethville, 1911 (Ad. Hock).

Triumfetta glechomoides *Welw.*

Shinsenda, mars 1912 (Ringoet, Coll. Homblé, n. 459) ; Élisabethville, 1912 (J. Bequaert, n. 368).

— — var. **glabra** *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUX. V (1915), p. 72.

Feuilles ovales-obtuses, cordées à la base, atteignant 6 cm. de long et 5,5 cm. de large, à 5-7 nervures basilaires, glabres sur les deux faces ou à poils simples ou étoilés épars sur les nervures ; cymes à l'aisselle de feuilles normales ou de bractées, formant ainsi des inflorescences interrompues, fleurs jaunes par 2-5 au sommet d'un pédoncule commun atteignant 12 mm. de long, éparsement poilu, pédoncule bractéolé au sommet à bractéoles lancéolées atteignant 4 mm. de long, pédicelle atteignant 5 mm. de long à poils épars, articulé vers la base, lobes du calice de 9 mm. env. de long, glabres sur toute leur surface, corne glabre ou à soies très courtes, rarement sur les cinq cornes à la fois, pétales glabres plus courts que les sépales.

Shinsenda, mars 19112 (Ringoet, coll. Homblé, n. 437. — Nom ind. : Sole Sole) ; Élisabethville, mars 1912 (Homblé, n. 267. — Nom ind. : Kissabi. — Voisine d'un cours d'eau, plante rampante à fleurs jaunes).

Triumfetta Hensii *De Wild.*

Shinsenda, 1912 (Ringoet, n. 381) ; Lemfu 1912 (H. Vanderyst).

Triumfetta pedunculata *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUX. V (1915), p. 71.

Plante dressée atteignant 1 m. de hauteur, simple à la base, plus ou moins ramifiée vers le haut, densément et courtement pubescente à poils étoilés ; feuilles pétiolées à pétiole de 7-25 mm. de long assez densément velu, stipulé à stipules lancéolées-linéaires de 5 mm. env. de long, velues, plus ou moins caduques ; limbe obovale, elliptique ou elliptique-lancéolé passant insensiblement aux bractées des inflorescences supérieures, atteignant 12 cm. de long et 4,5 cm. de large, subarrondi ou largement cunéiforme à la base, acuminé-subaigu au sommet, velu sur les deux faces, à poils brunâtres étoilés sur la face supérieure foncée, grisâtre sur la face inférieure, plus ou moins nettement, doublement et assez profondément denticulé sur les bords, nervures basilaires au nombre de 3-5, les externes peu marquées, les internes se continuant jusque vers le milieu du limbe, nervures latérales principales au nombre de 4-5 de chaque côté de la nervure médiane, obscurément anastomosées entre elles vers le bord de la feuille ; inflorescences subaxillaires, solitaires ou à plusieurs à pédoncule commun de 5-8 mm. de long, velu, bractéolé au sommet à bractéoles linéaires de 2 mm. de long, ciliées, terminé par 1-3 fleurs, pédicellées, pédicelle de 2,5-3 mm. de long velu, articulé un peu au-dessus de sa base, calice à lobes lancéolés de 6,5 mm. env. de long, éparsement poilus sur le dos, à poils simples, à corne terminale uniciliée de 0,2 mm. env. de long; pétales plus courts que les sépales de 4 mm. env. de long, glabres, étamines à filet glabre environ aussi long que les sépales, au nombre de 8-10, ovaire velu à style glabre aussi long que les étamines ; fruit de 6 mm. env. de diam., glabre, épineux, à épines élargies à la base, coniques, terminées par une soie droite ou légèrement oblique, à 4 loges uniséminées, à graines glabres de 1,8 mm. env. de long.

Élisabethville, 7 mars 1912 (n. 256) et 26 avril 1912 (n. 304) (J. Bequaert) (Dans la savane boisée sèche et près des habitations); Élisabethville, février 1912 (Homblé, n. 186. — Sert à faire des tatouages sur les corps des femmes. — Nom ind.: Kasingawasike).

Triumfetta pilosa *Roth.*

Welgelegen, 1912 (J. Bequaert, n. 416^bis).

Triumfetta Rogersii *Sprague* et *Hutch.*

Élisabethville (Rogers, n. 10149, 10183).

Triumfetta Welwitschii *Masters.*

Sakania (Rogers, n. 10032) ; Élisabethville (Rogers, n. 10166) ; Kamatanda (Rogers, n. 10328).

Triumfetta laxiflora *Sprague.*

Shinsenda, 1911 (Rogers, n. 10275); Chilongo, 1911 (Ad. Hock); Katentania, 1912 (Homblé, n. 644) ; Vallée de Kapiri, 1913 (Homblé, n. 1290) ; Élisabethville (Rogers, n. 10070).

MALVACEAE

HIBISCUS *L.*

Hibiscus Bequaerti *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUX. V (1915), p. 35.

Plante à tiges dressées atteignant plus de 75 cm. de haut, cylindriques, courtement et densément tomenteuses, à poils étoilés ; feuilles pétiolées, pétiole de 4-15 mm. de long courtement tomenteux comme les tiges, limbe ovale ou ovale-lancéolé, de 4,5-13 cm. de long, et 1,4-7 cm. de large, arrondi ou cordé à la base, acuminé au sommet, subobtus, plus ou moins profondément denté sur les bords, velu sur les deux faces, plus fortement en dessous qu'au-dessus, à 5-7 nervures basilaires, les extérieures peu visibles, toutes plus proéminentes en dessous qu'au-dessus, nervures latérales principales au nombre de 4 environ de chaque côté de la nervure médiane ; stipules linéaires de 3-5 mm. de long, velues. Fleurs axillaires formant au sommet des rameaux, des inflorescences plus ou moins compactes atteignant 15 cm. de long, solitaires ou géminées ou paucifasciculées, à pédicelle de 8-7 mm, de long, velu, articulé à la base, épicalice à 7 bractées lancéolées, linéaires, velues, conniventes à la base, de 2-3 cm. de long ; calice de 6 mm. environ de long à 5 lobes de 4 mm. de long, velus sur le dos, ciliés ; pétales jaunes de 18 mm. environ de long et 8-9 mm. de large, velus sur le dos, glabres sur la face supérieure ; colonne staminale anthéridifère depuis 4 mm. au-dessus de sa base ; capsule de 12 mm. environ de long, ovoïde-globuleuse, obtuse au sommet, ou courtement apiculée au sommet, à valves densément velues extérieurement, à plusieurs graines par loge, à soies blanches, de 3 mm. environ de long.

Bukama, 4 mai 1911 (J. Bequaert, n. 94).

Hibiscus bukamensis *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUX. V (1915), p. 38.

Plante herbacée, à tiges étalées ou plus ou moins dressées atteignant 30 cm. de long, à souche fusiforme plus ou moins ligneuse, à radicelles fibreuses; rameaux plus ou moins densément velus, à poils étalés. Feuilles courtement pétiolées à pétiole de 2.5-7 mm. de long, cilié, à poils allongés, à limbe obovale ou ovale-trapéziforme non lobé, de 1-4,5 cm. de long et 9 mm. à 3,5 cm. de large, arrondi ou cunéiforme à la base, aigu au sommet, denté sur les bords, à poils très épars sur les deux faces, surtout sur les nervures, nervures basilaires au nombre de 3-4 de chaque côté de la nervure médiane, anastomosées en arc ; stipules linéaires plus ou moins caduques, d'environ 3 mm. de long ; fleurs solitaires, axillaires, pédonculées, à pédicelle de 2-4 cm. de long, velu, cilié, articulé à env. 5 mm. de la base du calice ; épicalice à 5 lobes lancéolés-ciliés, de 5 mm. env. de long, calice de 14 mm. env. de long à cinq lobes lancéolés de 11 mm. env. de long, velus-ciliés, de 2,5 mm. environ de large ; pétales blancs d'environ 3 cm. de long et 8-10 mm. de large, glabres ; capsule d'environ 1 cm. de long, plus courte que les sépales, ovoïde-globuleuse, courtement aiguë, à 5 valves glabres sur le dos, ciliées sur les bords ; graines d'env. 2 mm. de long, lisses.

Bukama, 8 mars 1911 (J. Bequaert, n. 124).

Hibiscus cannabinus *L.*

Élisabethville, 1913 (Homblé. n. 275. — Nom ind. : Makombwe).

Hibiscus Hocki *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUX. V (1915), p. 36.

Plante à tiges dressées atteignant plus de 50 cm. de long, cylindriques, courtement et densément tomenteuses à poils étoilés, devenant assez rapidement glabres ; feuilles absentes sur les tiges florifères, pétiolées à pétiole de 5 8 mm. de long, courtement tomenteux, grisâtre, limbe subcirculaire ou très largement ovale de 2-4,5 m. de long et 24-42 mm. de large, arrondi ou subémarginé au sommet, arrondi ou subcordé à la base, velu sur les deux faces, plus fortement en dessous qu'au-dessus, nervures basilaires au nombre de 5, nervures latérales principales au nombre de 5 environ de chaque côté de la nervure médiane, plus proéminentes en dessous qu'au-dessus ; stipules linéaires de 3 mm. env. de long, velues ; fleurs fasciculées, en fascicules rapprochés, formant, au sommet des rameaux, des inflorescences plus ou moins compactes, simples ou courtement ramifiées à la base, pouvant atteindre 25 cm. de long, pédicelle de 2-5 mm. de long, velu, articulé à la base ; épicalice à env. 7 bractées lancéolées, conniventes à la base, de 3 cm. de long, velues ; calice de 6 mm. env. de long à 5 lobes de 4 mm. env. de long, velus sur le dos, ciliés ; pétales jaunes de 20 mm. env. de long et 7 mm. de large, velus sur le dos, à poils étoilés ; colonne staminale anthéridifère depuis 6 cm. environ au-dessus de sa base ; capsule de 13 cm. env. de large, ovoïde ou globuleuse, obtuse au sommet ou courtement apiculée au sommet, à valves densément velues extérieurement, à plusieurs graines par loge à soies blanches ou brunâtres.

Kansenia, bords de la Panda, octobre 1911 (Ad. Hock).

Hibiscus Homblei *De Wild.* in Bull. Jard. Bot. Bruxelles, V (1915), p. 37.

Arbuste à rameaux dressés ou couchés, à tiges cylindriques, courtement tomenteuses, grisâtres ; feuilles plus ou moins longuement pétiolées, à pétiole assez grêle de 1,8 à 5 cm. de long, courtement tomenteux, grisâtre, limbe plus ou moins largement ovale, plus ou moins trilobé, à lobes subaigus, denticulés sur les bords, de 2-10,5 cm. de long et jusque 10.5 cm. de large, arrondi ou cordé à la base, à poils épars sur la face supérieure, surtout sur les nervures, plus densément velu sur la face inférieure, nervures basilaires au nombre de 7, les externes moins proéminentes que les autres, nervures latérales principales au nombre de 4 environ de chaque côté de la nervure médiane, anastomosées en arc avant d'atteindre le bord, plus proéminentes en-dessous qu'au-dessus ; stipules plus ou moins rapidement caduques, linéaires, ciliées, de 6 mm. env. de long, fleurs solitaires, axillaires, pédonculées, pédoncule de 8-20 mm. de long, courtement tomenteux-grisâtre, épicalice à 5 lobes distincts, oblongs-lancéolés, contractés à la base, très longuement acuminés-filiformes au sommet de 12-16 mm. de long et 3,5 mm. de large, velus-ciliés, plus ou moins cornés à la base ; calice de 19-23 mm. env. de long, à 5 lobes libres sur env. 13-14 mm. et de 6-10 mm. env. de large, velus éparsement sur le dos, ciliés, à une nervure médiane plus ou moins en relief, accrescents autour du fruit et atteignant 15 mm. de large ; corolle jaune à tache centrale pourpre, à pétales atteignant 5,5 cm. de long et jusque 3,4 cm. de large, glabres sur les deux faces ; colonne staminale de 1,5 cm. de long, staminifère depuis environ 4 mm au-dessus de la base dépassée d'env. 8 mm. par le style 5-fide, à stigmates subglobuleux ciliés ; capsule subgloboïde-ovoïde, très courtement acuminée au sommet, glabre, de 14 mm.

env. de haut, plus courte que les sépales persistants, graines glabres ou à poils épars, apprimés, courts.

Élisabethville, février 1912 (Homblé, n. 201, 209. — Nom ind.: Lukuku, Mulembwe. — Sur termitière, et thalweg) ; et mars 1912 (Homblé, n. 262. — Au bord du cours d'eau. — Nom ind. : Mwajaje. — Sans feuilles au moment de la récolte, racines fines) ; Élisabethville, 19 avril 1912 (J. Bequaert, n. 341. — En particulier sur les termitières).

Hibiscus katangensis *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUXELLES, V (1915), p. 33.

Tiges plus ou moins dressées, herbacées, atteignant plus de 40 cm. de long, courtement velues, entre-nœuds plus ou moins allongés, atteignant 4,5 cm. de long ; stipules linéaires atteignant env. 5 mm. de long, ciliées, feuilles plus ou moins longuement pétiolées, pétiole grêle de 3-17 mm. de long, velu, limbe subtriangulaire, subcordé à la base, plus ou moins profondément tri-lobé, à lobes subaigus, peu profondément dentés sur les bords, velu sur les deux faces, plus fortement en dessous qu'au-dessus, à poils furqués ou étoilés, de 1-4 cm. de long et 8 à 41 mm. de large, 5-7-nervié à la base, à nervure externe se perdant rapidement, nervures latérales principales au nombre de 3-4 de chaque côté de la nervure médiane, toutes plus proéminentes en dessous qu'au-dessus ; fleurs axillaires, solitaires ou géminées, pédicellées, pédicelle atteignant de 1,5 à 2 cm. de long, velu, grêle, articulé à env. 3-4 mm. du sommet, épicalice à 5 lobes linéaires, libres, de 3,5 mm. env. de long, velus-ciliés, calice de 5-6 mm. de long, à 5 lobes libres de 4 mm. env. de long, velus sur les deux faces, ciliés sur les bords, légèrement accrescents après l'anthèse, pétales atteignant environ 12 mm. de long, velus sur le dos, ciliés, roses ou violacés ; colonne staminale de 6-7 mm. env. de long, staminifère au sommet sur env. 3 mm., styles dépassant la colonne de 4 mm. env. ; capsule globuleuse-comprimée, de 7-8 mm. de large et 3-4 mm. de haut, velue, à 5 valves, 5-lobée, à lobes subailés, déhiscente le long des carènes proéminentes, loges velues extérieurement à soies raides sur les angles saillants, glabres intérieurement, graine solitaire dans chaque loge, glabre ou à quelques poils épars très courts.

Shinsenda, 8 mai 1912 (J. Bequaert, n. 426).

Hibiscus panduraeformis *Burm.*

Élisabethville, mai 1912 (Homblé, n. 323. — Nom ind. : Lukuku. — Fleurs comestibles).

Hibiscus rhodanthus *Gürke.*

Élisabethville (Rogers, n. 10063).

Hibiscus Welwitschii *Hiern.*

Élisabethville, 1912 (Homblé, n. 307. — Par pieds isolés dans brousse. — Nom ind. : Kikasa) ; Plateau de Biano, environs de Katentania, 1912 (Homblé, n. 848) ; Sankisia, 1911 (J. Bequaert, n. 107. — Savane boisée).

STERCULACEAE

KOSTELETSKYA *Presl.*

Kosteletskya Buettneri *Gürke.*
Élisabethville (Rogers, n. 10135).
Kosteletskya adoensis *Hochst.*
— — var. **hirsuta** *Oliv.*
Élisabethville (Rogers, n. 10212).

DOMBEYA *Lav.*

Dombeya Ringoeti *De Wild.* in Bull. Jard. Bot. Bruxelles, V (1915), p. 24.

Arbuste à rameaux cylindriques très courtement pubescents, devenant glabres, à écorce brunâtre ; feuilles coriaces, pétiolées, à pétiole de 3-3,5 cm. de long, subcylindrique, très courtement tomenteux-grisâtre, limbe coriace, largement ovale-subcirculaire, cordé à la base, obtus au sommet, de 7-9 cm. de long et 7-8 cm. de large, subscabre sur la face supérieure, courtement mais assez densément velu sur la face inférieure, entier, légèrement ondulé sur les bords, à 5-7 nervures basilaires, à env. 4 nervures latérales principales de chaque côté de le nervure médiane, nervures en relief sur les deux faces, nervures secondaires formant une réticulation plus proéminente en dessous qu'au-dessus ; stipules...; inflorescences axillaires sur des rameaux non feuillés, au nombre de 2 à 4 par aisselles, pédonculées, pédicelle commun de 3-4 cm. de long, densément velu, d'un gris-brunâtre, à poils simples et étoilés mélangés, bractéolé à la base, à bractéoles densément velues, caduques, ramifié dichotomiquement, fleurs blanches, odorantes, denses, formant un bouquet atteignant 8 cm. de diamètre, pédicellées à pédicelle velu comme les pédoncules d'environ 1 cm. de long, calice à sépales réfléchis pendant l'anthèse, de 7 mm. env. de long, lancéolés-aigus et de un peu moins de 2 mm. de large, densément velus extérieurement, ciliés sur les bords, glabres intérieurement, pétales obovales-triangulaires, glabres, de 10-11 mm. de long et de 6-7 mm. de large, étamines par 2 ou 3 séparées par un staminode, filets et staminodes glabres, anthères de 1,5 env. de long, ovaire densément velu, globuleux, à 3 loges, 2-ovulées, style à sommet divisé en 2-3 stigmates.

Nieuwdorp, 3 septembre 1912 (Ringoet, s. n. II).

Obs. — Cette espèce se classe près du *D. reticulata* Mast. (Cf. *K. Schum.* Sterc. afric. n. 36 et)

GUTTIFERACEAE

HYPERICUM *L.*

Hypericum Quartinianum *A. Rich.*
Bords de la Katentania, octobre 1911 (Ad. Hock).

VISMIA *Vand.*

Vismia corymbosa *A. Chev.*
Élisabethville (Rogers, n. 10291).

PSOROSPERMUM *Spach.*

Psorospermum febrifugum *Spach.*
Élisabethville (Rogers, n. 10186).

DIPTEROCARPACEAE

MONOTES *A. DC.*

Monotes Homblei *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUX. V (1915), p. 55.

Arbre à rameaux courtement tomenteux d'un brun-grisâtre à l'état jeune, devenant glabres, à écorce grisâtre, lenticellée ; feuilles orbiculaires-ovales ou obovales-orbiculaires, pétiolées à pétiole de 1,8-3 cm. de long, cylindrique velu-grisâtre, limbe arrondi ou émarginé au sommet, arrondi-tronqué ou subcordé à la base, coriace, de 7,5-16 cm. de long et 5,5-13 cm. de large, densément velu sur la face supérieure, d'un vert brunâtre à l'état sec, velu-grisâtre sur la face inférieure, sur le limbe et les nervures, nervures latérales principales au nombre de 10-12 de chaque côté de la nervure médiane, en creux sur la face supérieure, nettement en relief sur la face inférieure, anastomosées en arc vers le bord de la feuille avec les nervures secondaires, formant une réticulation bien visible, en creux sur la face supérieure, en relief sur la face inférieure ; nervure médiane munie à la base du limbe d'une glande noirâtre à l'état sec ; inflorescences axillaires atteignant env. 3 cm. de long, à pédoncule commun de 1 cm. env. de long, velu, bractéolé au sommet, bractéoles caduques, lancéolées, atteignant 5 mm. env. de long, velues extérieurement, glabres intérieurement, fleurs pédicellées à pédicelle atteignant env. 2 mm. de long, bractéolé, densément velu-grisâtre, calice de 3 mm. env. de long, à lobes subcirculaires, densément velus-grisâtres extérieurement, arrondis au sommet, atteignant 3,5 mm. de large, pétales lancéolés, subaigus, de 11 mm. env. de long et 3-3,5 mm. de large, glabres intérieurement, velus extérieurement, subséricés-grisâtres, sauf sur le bord plus ou moins scarieux couvert dans le bouton, étamines indéfinies de 7-8 mm. de long, ovaire densément velu à style glabre de 3 mm. env. de long, légèrement capité au sommet.

Vallée de Kapiri, février 1913 (Homblé, n. 1177 et 1249. — Nom ind. : Mupanpa, Mupanga [Kis.]).

TURNERACEAE

WORMSKIOLDIA *Thonn.*

Wormskioldia longepedunculata. *Mast.*
Élisabethville (Rogers, n. 10271).

BEGONIACEAE

BEGONIA *L.*

Begonia Homblei *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUX. V (1915), p. 51.

Plante herbacée de 6-17 cm. de haut, à tige simple, glabre, grêle ; feuilles au nombre de 4-6 par plante, entre-nœuds pouvant atteindre 6 cm. de long, stipulées, stipules ovales-lancéolées, aiguës, glabres, atteignant environ 4 mm. de long, pétiole grêle de 4 mm.-3,5 cm. de long, glabre, limbe rhomboïdal-subréniforme de 9-12 mm. de large et 6-30 mm. de haut, plus ou moins cordé à la base, inégalement denté, à dents arrondies, très éparsement cilié, glabre sur les deux faces, palmatinervié à 5-7 nervures ; inflorescences axillaires à 1 ou 2 fleurs roses de sexe différent, atteignant 5 cm. de long, pédoncule commun grêle, filiforme, glabre, atteignant 4 cm. de long, pédicelles des fleurs mâles et femelles subégaux, atteignant 13 mm. de long grêles et glabres ; fleurs mâles à 4 enveloppes florales, les deux externes atteignant 7 mm. de long et 8 mm. de large, obovales, arrondies au sommet, glabres, les internes d'env. 5 mm. de long et 2 mm. de large, étamines nombreuses à filet d'env. 1 mm. de long et anthère jaune ; fleurs femelles à 4 enveloppes florales, obovales, arrondies au sommet, les deux externes d'env. 6 mm. de long et 5 mm. de large, les internes plus petites ; ovaire à 3 ailes, glabre, style d'env. 2 mm. de long, divisé presque jusqu'à la base en 3 lobes terminés par un stigmate glanduleux subréniforme d'un peu plus de 1 mm. de large ; fruit à 3 ailes de 7 mm. env. de haut sur 7-11 mm. de large, glabre, à ailes inégales, la plus large semi-elliptique, arrondie au sommet, mesurant depuis le centre environ 4 mm. de long.

Élisabethville, mars 1912 (Homblé, n. 239. — Begonia très abondant sur les termitières. — Nom ind. : Kilanga) ; Shinsenda, février 1912 (Ringoet, coll. Homblé, n. 400).

Obs. — Ce « Rostrobegonia » paraît aussi avoir un certain nombre de caractères communs avec le *B. Princeae* Gilg (in *Engler* Bot. Jahrb., XXX, p. 361), mais il s'en différencie aisément par les dimensions des diverses parties de la plante, par les feuilles moins lobées.

Begonia Princeae *Gilg.*

Vallée de la petite Luembe, sur termitières, 1910 (Ad. Hock).

Begonia subacuto-alata *De Wild.* in Bull. Jard. Bot. Brux. V (1915), p. 52.

Plante herbacée, atteignant de 15-55 cm. de haut, à tige dressée plus ou moins épaissie, peu ramifiée ; stipules ovales ou ovales-lancéolées, entières arrondies ou lobulées au sommet, de 7-10 mm. de long et 2,5-9 mm. de large ; feuilles alternes, pétiolées à pétiole de 0,5-7 cm. de long, glabre, limbe rhomboïdal-subréniforme de 4,5-8,3 cm. de large, glabre sur les deux faces, plus ou moins cordé à la base, ondulé sur les bords, à dents arrondies, très éparsement cilié entre les dents, palmatinervié à 7-10 nervures, papyracé-membraneux ; inflorescences axillaires atteignant 8 cm. de long, ramifiées légèrement, pauciflores, bractéolées, bractéoles glabres semblables aux stipules mais plus petites qu'elles, fleurs pédicellées à pédicelle glabre, grêle, atteignant 4 cm. de long ; fleurs roses, fleurs mâles à 4 enveloppes florales, les externes atteignant env. 1 cm. de long et 9 mm. de large, les internes plus petites également obovales d'env. 7-8 mm. de long sur 4 mm. de large, étamines en nombre indéfini, à filaments plus longs que les anthères mesurant environ 1 mm. de long ; fleurs femelles à 4 enveloppes florales semblables à celles des fleurs mâles, ovaire glabre à 3 ailes inégales, styles au nombre de 3 à stigmates plus ou moins papilleux, en bandes plus ou moins contournées ; fruits à 3 ailes, de 14 mm. env. de haut et 3 cm. de large, les deux ailes antérieures de 11 cm. env. de long à partir du centre du fruit à extrémité subaiguë, la postérieure de 17-18 mm. de long également subaiguë.

Région du Lualaba, environ de Lualaba-Kraal, bord du ruisseau, décembre 1912 (Homblé, n. 956).

THYMELEACEAE

GNIDIA *L.*

Gnidia katangensis *Gilg.*
Lukafu, octobre et novembre 1899 (Ed. Verdick, n. 206 et 173. — Nom. ind. : Kilenge-Lenge).

LASIOSIPHON *Fresen.*

Lasiosiphon Kraussii *Meisn.*
Sakania (Rogers, n. 10027).

LYTHRACEAE

NESAEA *Comm.*

Nesaea Bequaerti *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plante dressée à tiges herbacées, plus ou moins densément velues, sublignеuses à la base, quadrangulaires, atteignant plus de 40 cm. de haut. Feuilles opposées, rarement alternes, ovales, courtement pétiolées ou subsessiles, de 1,8-5,5 cm. de long et 5-20 mm. de large, velues sur les deux faces, à une nervure médiane bien marquée, plus courtes que les entre-nœuds qui mesurent jusque 6 cm. de long ; pédoncule atteignant 20 30 mm. de long, muni au sommet d'une paire de bractéoles ovales, de la forme des feuilles, persistantes, atteignant env. 5 mm. de long ; fleurs rouges en capitule subglobuleux atteignant 10-12 mm. de diam., calice bibractéolé à la base, à bractéoles d'env. 3 mm. de long, campanulé-urcéolé, de env. 2,5-3 mm. de long après l'anthèse, à 6 lobes deltoïdes alternant avec des cornes ciliées aussi longues ou un peu plus longues que les lobes du calice. Pétales 6 obovales, glabres ; étamines au nombre de 12 en deux rangs, les oppositipétales les plus courtes; ovaire glabre à style allongé exsert, irrégulièrement recourbé, stigmate capité.

(¹) *Nesaea Bequaerti* : Ramis erectis herbaceis, plus minus dense velutinis, basi sublignosis, quadrangularibus, usque 40 cm. altis ; foliis oppositis vel raro alternis, ovatis, breviter petiolatis vel subsessilibus 1,8-5,5 cm. longis et 5-20 mm. latis velutinis ; pedunculo 20-30 mm. longo apice bibracteolato ; floribus rubris capitulatis, calice basi bibracteolato 2,5-3 mm. longo, 6-lobato et 6-cornuto, petalis 6, obovatis, glabris ; staminibus 12, ovario glabro, stylo recurvato exserto, stigmate capitato.

Shinsenda, 9 mai 1912 (J. Bequaert, n. 432. — Dembo humide).

Obs. — Cette plante voisine du *N. floribunda* Sond. nous paraît devoir en être séparée par ses inflorescences longuement pédonculées, à pédoncule généralement plus long que la feuille à l'aisselle de laquelle il est développé.

Nesaea Hocki *De Wild.* nov. spec. (¹).

Plante à tiges herbacées, subligneuses à la base, quadrangulaires, atteignant 30 cm. de haut, à souche tubéreuse paraissant ligneuse. Feuilles lancéolées opposées, sessiles, glabres, subembrassantes, de 1-3,5 cm de long et 2,5 6,5 mm. de large, glabres sur les deux faces, à une nervure médiane bien marquée, plus longues que les entre-nœuds qui atteignent 15 mm. de long. Pédoncules 1-3-flores, plus longs que les fleurs atteignant 9-12 mm. de long, munis au sommet d'une paire de bractéoles linéaires, caduques, env. aussi longues que le pédicelle et atteignant 2 mm. de long, pédicelle glabre, articulé de env. 2 mm. de long. Calice glabre, campanulé-urcéolé, de env. 4 mm. de long après l'anthèse, à 6 lobes deltoïdes, à côte intermédiaire terminée par une très courte corne. Pétales 6 obovales, glabres ; étamines en deux rangs de 6, les oppositipétales les plus courtes ; ovaire glabre globuleux, à style allongé exsert, plus ou moins recourbé, stigmate capité.

Bois des contre-forts de la Manika, octobre 1911 (Ad. Hock).

Obs. — Cette espèce à cornes calicinales remplacées par un épaississement relativement peu marqué, se range dans le voisinage des *N. icosandra* Kotschy et Peyr. et *linifolia* Welw. dont elle se différencie par le nombre de lobes du calice : 6 et par celui des étamines : 12.

COMBRETACEAE

COMBRETUM *L.*

Combretum Oatesii *Rolfe.*
Élisabethville (Rogers, n. 10141).

(¹) *Nesaea Hocki :* Herbacea usque 30 cm. alta, basi tuberoso-sublignosa ; foliis lanceolatis, oppositis, sessilibus, glabris, subamplexicaulibus, 1-3,5 cm. longis et 2,5-6,5 mm. latis, glabris, internodiis usque 15 mm. longis ; pedunculo 1-3-floro, 9-12 mm. longo, apice bibracteolato, bracteolis linearibus caducis usque 2 mm. longis, pedicello glabro articulato, circ. 2 mm. longo, calice glabro, campanulato-urceolato circ. 4 mm. longo, 6-lobato et 6-cornuto, cornis brevibus ; petalis 6 obovatis, glabris ; staminibus 12 ; ovario glabro, globuloso, stylo elongato exserto recurvato, stigmate capitato.

MYRTACEAE

EUGENIA *L.*

Eugenia cordata *Laws.*
Élisabethville (Rogers, n. 10014).
Eugenia coronata *Vahl.*
Élisabethville (Rogers, n. 10172).

MELASTOMACEAE

ANTHEROTOMA *Hook. f.*

Antherotoma Naudini *Hook. f.*
Kudelungu, 14 mai 1908 (Kassner, n. 2731) ; Vallée de Kapiri, février 1913 (Homblé, n. 1237. — Rare).

OSBECKIA *L.*

Osbeckia Homblei *De Wild.* in Bull. Jard. Bot. Bruxelles V (1915), p. 77.

Plante à tiges dressées de plus de 80 cm. de haut, paraissant non ramifiées, tétragones, à angles peu marqués, velues mais à poils courts, sauf aux nœuds où ils atteignent 4 mm. de long ; feuilles courtement pétiolées, à pétiole de 2-3 mm. de long, velu, limbe lancéolé, arrondi-subcordé à la base, longuement aigu au sommet, 7-nervié à la base, nervures transversales nombreuses obliques mieux visibles en dessous qu'au-dessus, de 6-9,5 cm. de long et de 8-23 mm. de large, courtement poilu sur la face inférieure, à poils sétuleux-apprimés sur la face supérieure, ondulé-denticulé sur les bords ; fleurs par 3 terminales, courtement pédicellées, pentamères, calice à tube de 11 mm. env. de long, ovale-cylindrique, glabre intérieurement, densément velu extérieurement, à poils de la base subsquameux multifides passant aux poils dressés atteignant 4 mm. de long et étoilés au sommet, à rayons atteignant 7 mm. de long ; sépales ovales-triangulaires, de 9 mm. env. de long et 3 mm. de large, velus sur le dos, ciliés sur les bords, à touffe de poils longs au sommet, glabres sur la face interne ; pétales obovales, légèrement obliques, atteignant 28 mm. de long et 19 mm. de large, glabres sur les deux faces, ciliés sur les bords à cils plus longs au sommet de la nervure médiane ; étamines au nombre de 10 subégales, anthère de 9 mm. env. de long à connectif peu développé sous les loges, muni antérieurement de 2 petits tubercules, mesurant, tubercules compris, 1 mm. env., style glabre de 23 mm. env. de long, ovaire courtement velu vers le sommet, terminé par une touffe de poils raides de 2 mm. env. de long.

DISSOTIS *Benth.*

Dissotis debilis *(Sond.) Triana.*

Élisabethville, 1912 (Homblé, n. 335. — Nom ind. : Kalamata et 240. — Nom ind. : Kinwa. — Sur termitière) ; Shinsenda, 1912 (leg. Ringoet, coll. Homblé, n. 526. — Brousse).

Dissotis Gilgiana *De Wild.*

Environs de Katentania (Plateau), novembre 1912 (Homblé, n. 770, 772).

— — var. **petiolata** *De Wild.*

Environs de Katentania, novembre 1912 (Homblé, n. 778).

Dissotis Hocki *De Wild.*

Environs de Katentania, novembre 1912 (Homblé, n. 795).

Dissotis incana *Triana.*

Élisabethville (Rogers, n. 10180).

Dissotis paludosa *Gilg.*

Tsisinka (Plateau), février 1913 (Homblé, n. 1266).

Dissotis Verdickii *De Wild.*

Esschen (Plateau de Biano), novembre 1912 (Homblé, n. 854. — Fleurs violettes) ; Nieuwdorp, novembre 1912 (Ringoet, n. 1).

Dissotis verticillata *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUXELLES, V (1915), p. 178.

Plante de 1,50 m. à 2 m. de hauteur, plus ou moins ligneuse, à rameaux plus ou moins nettement polygonaux, densément velus, à poils courts, raides, scabres, plus ou moins brunâtres, entrenœuds de 1,3-4 cm. de long ; feuilles verticillées par 3, pétiolées à pétiole de 1-1,5 cm. de long, velues comme les tiges, limbe ovale-oblong de 5,5-9 cm. de long et 18-27 mm. de large, aigu au sommet, subcordé à la base, 7-nervé à la base, nervures en creux sur la face supérieure, nettement en relief sur la face inférieure, densément velu sur la face supérieure, à poils allongés-séricés, densément mais courtement velu sur la face inférieure plus pâle. Inflorescences axillaires formant, à l'extrémité des rameaux, une panicule de 10 cm. env. de long ; inflorescences partielles pédonculées, à pédoncule atteignant 7 mm. de long, velu-scabre, bractées caduques, ovales-subaiguës, les extérieures plus velues extérieurement que les intérieures, à poils squameux, pectinés-multifides, de 10 mm. env. de long sur 7 mm. de large, ciliés sur les bords ; fleurs pentamères sessiles ou subsessiles, calice à tube de 8-9 mm. de long, densément velu à poils squameux courts multifides, à lobes de 7-8 mm. env. de long, triangulaires subobtus, ciliés sur les bords, glabres intérieurement, éparsement poilus extérieurement, de 2,5-3,5 mm. de large, rapidement caduques ; entre les lobes du calice, des prolongements de 4 mm. env. de long terminés par une touffe de poils ; pétales obovales de 3 cm. de long et 2,2 cm. de large, ciliés sur les bords, anthères les plus longues de

10-12 mm. de long, à connectif allongé à la base de 2 cm. au moins de long, terminé par un double éperon filiforme de 2 mm. env. de long, les plus courtes de 9-10 mm. de long à connectif allongé à la base de 3 mm. env. de long, terminé par un double tubercule ; ovaire terminé par des poils allongés de 3 mm. env. de long, style glabre de 3 cm. env. de long, légèrement renflé vers le sommet.

Tshisinka, février 1913 (Homblé, n. 1265. — Voisinage des sources et étangs. — Commun mais localisé).

ONAGRACEAE

LUDWIGIA *L.*

Ludwigia prostrata *Roxb.*
Élisabethville, mars 1912 (Homblé, n. 260. — Voisinage des cours d'eau. — Nom ind. : Kassoukoti).

UMBELLIFERACEAE

HYDROCOTYLE *L.*

Hydrocotyle sibthorpioides *Lam.*
Shinsenda, mai 1912 (J. Bequaert, n. 434 et coll. Homblé, n. 575).

SANICULA *L.*

Sanicula europaea *L.*
Élisabethville (Rogers, n. 10196, 10882).

ALEPIDEA *De la Roche.*

Alepidea longifolia *E. Meyer.*
Vallée de Kapiri, 1913 (Homblé, n. 1230).
Alepidea ciliaris *de la Roche.*
Élisabethville (Rogers, n. 10077).

PHYSOTRICHIA *Hiern.*

Physotrichia Helenae *Buscal.* et *Muschler.*
Welgelegen, 3 mai 1912 (J. Bequaert, n. 419).

Physotrichia Kassneri *Wolf.*
Vallée de Kapiri, 1913 (Homblé, n. 1226).

PECEUDANUM *L.*

Peceudanum fraxinifolium *Hiern.*
Lukafu, 1899 (Éd. Verdick, n. 176).

ERICACEAE

TRICINELLA *Kl.*

Tricinella Mannii *Hook. f.*
Kapanda (Kundelungu), décembre 1911 (J. Bequaert, n. 505).

EBENACEAE

ROYENA *L.*

Royena pallens *Thunb.*
Katentania (Biano), novembre 1913 (Homblé, n. 721. — Vallée boisée, sur termitière) ; Sakania (Rogers, n. 10286).

OLEACEAE

JASMINUM *L.*

Jasminum ternifolium *Baker.*
Riv. Lufira (Rogers, n. 10311).

LOGANIACEAE

STRYCHNOS

Strychnos Bequaerti *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUX. V (1915), p. 42.

Rameaux subcylindriques, courtement et densément tomenteux-brunâtres ; entre-nœuds de 1,5-4 cm. ; cirrhes simples, courtement tomenteuses comme les tiges, en crochets, atteignant env. 4 cm. de long et 8 mm. d'épaisseur, munies en-dessous du milieu ou privées de courtes bractées velues ; feuilles pétiolées à pétiole velu, de 3-6 mm. de long, limbe coriace largement ovale ou plus ou moins longuement elliptique, de 15-55 mm. de long et 14-34 mm. de large, subcordé, arrondi ou plus ou moins longuement cunéiforme à la base, obtus au sommet, arrondi ou émarginé, courtement apiculé, glabre et luisant sur la face supérieure, mat en dessous, et à poils épars sur les nervures basilaires. Celles-ci en 2 paires plus ou moins distantes l'une de l'autre, parfois de 3 mm. ; paire inférieure à nervures relativement assez distantes du bord foliaire recourbé, irrégulièrement ondulées par anastomose avec des nervures tertiaires ; paire interne à nervures droites environ dans la moitié inférieure, puis arquées par anastomose avec 3-4 nervures latérales principales ; réticulation et nervures plus proéminentes en-dessous qu'au-dessus ; inflorescences axillaires ou terminales, courtes, courtement ramifiées, n'atteignant guère plus de 7 mm. de long ; rachis et ramifications velues-ciliées, fleurs jaunes sessiles ou subsessiles, bractéolées à la base, bractéoles velues ciliées, calice à 4 lobes ovales-elliptiques, ciliés d'environ 1 mm. de long, corolle de 1,5 mm. env. de long à 4 lobes, ovaire velu, style glabre court, non exsert.

Près de la Lumbumbashi, 12 mai 1912 (J. Bequaert, n. 44).

Strychnos cocculoides *Baker*.

Shisangwe, 1912 (Homblé, n. 93. — Arbuste, à fruits comestibles, des terres sèches partiellement boisées, assez rare. — Nom ind. : Kassonguli).

Strychnos kasengaensis in BULL. JARD. BOT. BRUX. V (1915), p. 46.

Liane à tiges courtement mais assez densément velues, ramifiées, entrenœuds de 2-4 cm. env. de long, à cirrhes bifurquées peu nombreuses, à pédoncule commun de 17 mm. env. de long, courtement tomenteux, à crochet courtement tomenteux de 15 mm. env. de long ; feuilles des rameaux principaux réduites, pétiolées à pétiole élargi subengainant à la base, de 3 mm. env. de long, à limbe ovale-lancéolé subaigu, arrondi à la base, éparsement velu sur les deux faces, 5-nervié à la base, à nervures peu proéminentes sur les deux faces, de 15 mm. env. de long et 6 mm. de large ; feuilles des rameaux, ovales ou elliptiques, arrondies ou obscurément subcordées à la base, apiculées ou plus ou moins longuement acuminées au sommet, pétiolées à pétiole de 3 mm. env. de long, courtement tomenteux-brunâtre, limbe de 1,1-5 cm. de long et 9-25 mm. de large, éparsement poilu sur les deux faces, au moins sur les nervures, nervures basilaires ou subbasilaires en 2 paires, l'externe grêle ondulée submarginale, l'interne aussi forte que la côte médiane ondulée seulement dans son tiers supérieur par anastomose avec 2-3 nervures latérales principales, nervures primaires et réticulation à peu près aussi proéminentes au-dessus qu'en dessous ; inflorescences axillaires et terminales atteignant au maximum 15 mm. de long, à rachis court, ramifié, courtement velu, à ramifications bractéolées, bractéoles velues, ciliées, d'env. 1 mm. de long, fleurs courtement pédicellées, à pédicelle atteignant un peu plus de 1 mm. de long. velu, calice à 5 lobes ovales, ciliés, arrondis au sommet de 1 mm. env. de long, corolle à limbe plus ou moins glabre extérieurement, d'env. 3 mm. de long, à 5 lobes glabres intérieurement et extérieurement, lancéolés, de 3 mm. env. de long et de moins de 1 mm. de large, tube densément velu intérieurement, étamines plus courtes que les lobes de la corolle à anthères de 1 mm. env. de long, ovaire ovoïde velu à style glabre très légèrement capité, plus court que les étamines.

Kasenga, 5 février 1912 (J. Bequaert, n. 237. — Arbuste à rameaux grimpants).

Strychnos spinosa *Lam.*

Kongolo, 1911 (J. Bequaert, n. 88) ; Vallée de Kapiri, 1913 (Homblé, n. 1165. — Arbre peu élevé, fruits comestibles. — Nom ind. : Mukulwa).

Strychnos Unguacha var. **polyantha** *Gilg.*

Vallée de Kapiri, 1913 (Homblé, n. 1147.— Arbre, terre sèche. — Nom ind. : Mukolonkolo. — Assez commun).

— — var. **microcarpa** *Gilg.*

Sankisia, 1910 (J. Bequaert, n. 208. — Petite savane boisée).

CHIRONIA *L.*

Chironia katangensis *De Wild.* in *Fedde* Repert. XII (1913). p. 292 ; Notes Fl. Katanga III (1914), p. 21.

Plante herbacée à tige dressée atteignant 50 cm. de haut, cylindrique, peu ramifiée, à feuilles linéaires-lancéolées de 15 à 27 mm. de long et de 1,5 à 3 mm. de large. au nombre de plus de 10 paires par tige, à entre-nœuds atteignant jusque 4,5 cm de long. Fleurs au nombre de 1 à 6 par tige, à pédicelle ascendant atteignant, au-dessus de la dernière paire de feuilles, jusque 2,8 cm. de long. calice à 5 sépales linéaires de 13 mm. de long et d'un peu plus de 2 mm. de large à la base, très aigus, plus ou moins carénés sur le dos. Corolle rougeâtre à tube de 5-6 mm de long à lobes atteignant 19 mm. de long, lancéolés-aigus et d'environ 5 mm. de large. Étamines exsertes, à filet court, dépassant la gorge de la corolle, à anthères de 6 à 6,5 mm. de long cordées à la base, style dépassant les anthères presque aussi long que les lobes de la corolle, glabre, légèrement renflé au sommet.

Élisabethville, mars 1912 (Homblé. n. 280. — Nom indigène : Kunsi), et 4 avril 1912 (J. Bequaert, n. 319 — Plante de la brousse).

Obs. — Cette plante est voisine du *C. transvalensis* Gilg (cf. Flora of Trop. Afr. IV, 1 p. 555) dont elle diffère par le port beaucoup plus élancé.

APOGYNACEAE

PLEIOCARPA *Benth.*

Pleiocarpa Hocki *De Wild.* in *Fedde* Repert. XIII (1914), p. 109 ; Notes Fl. Katanga III (1914), p. 21.

Plante à tige ligneuse dressée, plus ou moins ramifiée, aplatie aux nœuds, striée longitudinalement à l'état sec, sans lenticelles. Feuilles ovales-elliptiques, pétiolées à pétiole glabre atteignant 7 mm. de long, limbe glabre et luisant sur les deux faces, plus pâle en dessous qu'au-dessus, de 3 à 12 cm. de long et de 17 à 60 mm. de large, à nervures principales assez nombreuses de chaque côté de la nervure médiane, un peu plus proéminentes en dessous qu'au-dessus, nervure médiane en creux sur la face supérieure, fortement en relief sur la face inférieure, limbe cunéiforme à la base, arrondi ou cunéiforme au sommet apiculé. Fleurs en fascicules pluriflores, axillaires, à calice éparsement velu, à lobes de 2,5 mm. environ de long, ciliés sur les bords, aigus au sommet. Corolle à tube de 10-13 mm. de long à lobes étalés ou réfléchis, triangulaires, d'environ 2 mm. de long, velus sur le dos et ciliés comme le tube. Fruits vénéneux, passant du rouge au noir, globuleux, d'environ 2 cm. de diamètre.

Katanga, 1911 (A. Hock) ; Élisabethville, février 1912 (Homblé, n. 204. — Dans la brousse. — Nom ind. : Nisongwa).

Obs. — Cette espèce se rapproche des *P. pycnantha* Stapf et *bicarpellata* Stapf ; c'est surtout, semble-t-il, de cette dernière espèce qu'il faudrait la rapprocher par la disposition de ses fleurs en fascicules assez compacts, mais les dimensions des lobes de la corolle différencient aisément la plante du Katanga de celle de la Guinée supérieure qui avait d'abord été décrite sous le nom de *Hunteria ambiens* Schumann.

LANDOLPHIA *Pal. Beauv.*

Landolphia Kirkii *This.-Dyer.*

Katanga, 1911 (Ad. Hock. — Dans la brousse. — Caoutchouc des herbes) ; Élisabethville, 1912 (J. Bequaert, n. 369, 402, 440 et Homblé, n. 344. — Arbuste-liane, donnant un caoutchouc paraissant de bonne qualité. — Nom ind. : Muwungo, Mupira).

Landolphia Rogersii *Stapf.*

Élisabethville (Rogers, n. 10068, 10078, 10293).

DIPLORHYNCHUS *Welw.*

Diplorhynchus mossambicensis *Benth.*
Vallée de Kapiri, 1913 (Homblé, n. 1128. — Nom ind. : Nibudi); Chisangwe, 1912 (Homblé, n. 99. — Nom ind. : Modange); Élisabethville, 1912 (Homblé, n. 657. — Base des termitières. — Nom ind. : Mwange).

STROPHANTUS *DC.*

Strophantus caudatus *Rolfe.*
Élisabethville (Rogers, n. 10066, 10288).

ASCLEPIADACEAE

SCHIZOGLOSSUM *E. Meyer.*

Schizoglossum Carsoni *N. E. Br.*
Élisabethville, novembre 1911 (Ad. Hock).

CRYPTOLEPIS *R. Br.*

Cryptolepis Welwitschii *N. E. Br.*
Nieuwdorp (Rogers, n. 10409).

MARGARETTA *Oliv.*

Margaretta Verdickii *De Wild.*
Vallée de Kapiri, 1913 (Homblé, n. 1283. — Assez commun en terre boisée).

Margaretta orbicularis *N. E. Br.*
Sakania (Rogers, n. 10022).

CEROPEGIA *L*

Ceropegia Ringoeti *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUXELLES, IV (1914), p. 394.

Petite plante à tige grimpante pubescente à entre-nœuds atteignant 7 cm. de long. Feuilles plus ou moins étalées, pétiolées à pétiole de 2-3 mm. de long, velu, à limbe ovale-linéaire atteignant 2,5 cm. de long et environ 3 mm. de large vers la base, arrondi vers la base, longuement cunéiforme au sommet, densément velu sur les deux faces, cimes latérales aux nœuds très courtement pédonculées, pluriflores, naissant fréquemment en même temps qu'un rameau latéral, bractées subulées de 3-4 mm. de long. ciliées, pédicelle grêle de 6 à 8 mm. de long, densément pubescent à poils étalés ; calice de 5 mm. environ de long à sépales linéaires, subulés-aigus, densément ciliés ; corolle verdâtre à l'état sec, à tube d'environ 5 mm. de long, élargi vers le sommet, pubescent, à lobes étalés, velus sur le dos, ciliés sur les bords, triangulaires, non soudés au sommet, terminés en filament grêle atteignant en totalité 1 cm. de long.

Shinsenda, mars 1912 (Ringoet, coll. Homblé, n. 153. — Dans la brousse).

CONVOLVULACEAE

JACQUEMONTIA *Choisy.*

Jacquemontia capitata *G. Don.*
Tschinsenda (Rogers, n, 10793).

HEWITTIA *Wight* et *Arn.*

Hewittia bicolor *(Vahl) Walk. Arn.*
Vallée de Kapiri, février 1913 (Homblé, n. 1205).

IPOMOEA *L.*

Ipomoea Barteri *Baker.*
Shinsenda, 1912 (Ringoet, coll. Homblé, n. 480. — Petit tubercule) ; Shiwele, 1902 (Kassner, n. 2475).

Ipomoea hispida *Roem.* et *Schult.*
Shinsenda, mars 1912 (Ringoet, n. 515).

Ipomoea Homblei *De Wild.* in BULL. JARD. BOT. BRUXELLES, V (1915), p. 38.

Rameaux grêles, volubiles, plus ou moins densément hirsutes, surtout aux nœuds, devenant glabres, à écorce grisâtre ; entre-nœuds de 18 cm. au moins de long, feuilles pétiolées à pétiole grêle, de 3 5 cm. de long, glabre ou muni de quelques poils épars très courts, limbe ovale-triangulaire, profondément cordé à la base, à lobes divergents, arrondis, à sinus très arrondi, acuminé-aigu au sommet, glabre sur les faces, nervures latérales principales au nombre de 6-7 de chaque côté de la nervure médiane, peu en relief sur les deux faces, anastomosées entre elles ou avec leurs ramifications en arcs bien marqués avant d'atteindre le bord de la feuille. Inflorescences axillaires, solitaires, longuement pédonculées, à pédoncule glabre ou muni vers la base seulement de quelques poils épars, de 16-20 cm. de long, bractéolé au sommet, à bractéoles glabres lancéolées de 4 cm. environ de long, à 5-7 fleurs pédicellées, pédicelle glabre de 8-10 mm. de long, calice à sépales de 7 cm. environ de long et d'environ 4 mm. de large, cunéiformes-aigus au sommet ou mucronulés, l'extérieur un peu plus court généralement que les autres ; corolle blanche de 4,5 cm. environ de long, glabre, le tube mesurant environ 2 cm. de long.

Élisabethville, mars 1912 (Homblé, n. 226. — Sur termitières. — Nom ind. : Kalembula).

Ipomoea involucrata *Pal. Beauv.*

Shinsenda, 1912 (Ringoet, n. 514) ; Élisabethville, 1912 (J. Bequaert, n. 291. — Les fleurs s'ouvrent à 8 h. du matin et se referment à midi).

Ipomoea reptans *(L.) Poir.*

Shinsenda, 1912 (Ringoet, n. 514. — Dans la brousse).

Ipomoea shirambensis *Baker.*

Sakania (Rogers, n. 10045).

BORRAGINACEAE

CORDIA *L.*

Cordia abyssinica *R. Br.*

Vallée de Kapiri, 1913 (Homblé, n. 1151. — Nom ind. : Muvumangana. — Rare).

TRICHODESMA *A. DC.*

Trichodesma physaloides *A. DC.*

Sakania (Rogers, n. 10029).

SESSION DU 27 JANVIER 1921

A BRUXELLES

SÉANCES DES SECTIONS

Première Section

M. Goedseels, président de la Section, et qui a présenté à la dernière session une *Étude sur les coordonnées polaires*, donne lecture du rapport de M. d'Ocagne sur ce travail. M. d'Ocagne estime que le mémoire, abrégé dans certaines de ses parties, sera digne d'être inséré dans les Annales. Après une discussion à laquelle prennent part M. Pasquier, le R. P. Bosmans, MM. de la Vallée Poussin et Dutordoir, M. Goedseels fait connaître son intention de reprendre son mémoire en vue de donner, dans la mesure du possible, satisfaction aux observations présentées.

Le R. P. Bosmans fait la communication suivante : *Sur une lettre inédite de Fermat, publiée par M. Giovannozzi* (¹).

M. de Waard nous a donné récemment des lettres inédites de Fermat que j'ai signalées dans mon dernier *Bulletin d'Histoire des Mathématiques* de la Revue des Questions scientifiques (²). Je disais alors que le savant hollandais avait découvert encore

---

(¹) Pierre de Fermat, *Una lettera inedita*. Archivio di storia della scienza, t. I, Rome, 1919, pp. 137-140. Cette pièce est celle qui est signalée par Charles Henry et Paul Tannery comme perdue : Note 2 du bas de la page 253 du tome II de leur édition des *œuvres de Fermat*, Paris, Gauthier-Villars, 1894.

(²) Juillet 1920, t. LXXVIII, pp. 291-292.

d'autres lettres de Fermat et qu'il se proposait de les mettre au jour dès que les circonstances le permettraient. Mais les circonstances sont difficiles, peu favorables à la publication de documents inédits, et rien ne faisant luire l'espoir de voir les temps bientôt s'améliorer, M. Giovannozzi, qui a trouvé la lettre actuelle sur les indications de M. de Waard, s'est décidé à l'éditer isolément, en attendant qu'elle fasse partie d'une collection plus complète.

Cette pièce n'est pas un autographe, mais une copie contemporaine conservée à la Bibliothèque Nationale de Florence. Écrite en avril 1643, elle est adressée à Mersenne pour être transmise à Brulart de Saint-Martin, conseiller d'État, à Paris. Dans le billet séparé d'envoi, daté du 7 avril 1643, qui accompagne la pièce, Fermat dit au Minime [1] : Je vous écris cette lettre « à la hâte, comme vous verrez. Qu'il n'en soit pas fait de copie et qu'elle ne sorte pas d'entre les mains de M. de Brulart ». Elle est, en effet, écrite dans ce style de premier jet, propre à Fermat, qui le rendait parfois si dur à comprendre par ses contemporains.

La lettre publiée par M. Giovannozzi est un document intéressant relatif aux discussions soulevées par la méthode *De Maximis et Minimis* de Fermat. Du vivant de l'auteur, cette méthode circulait en manuscrit, sous la forme d'un petit traité fort court, qui tient tout entier en quatre pages, dans l'édition des *Œuvres de Fermat,* par Charles Henry et Paul Tannery [2]. Le Toulousain y énonce d'abord sa règle. Pour l'intelligence de ce qui suit, il importe d'en rappeler les termes, et de noter les obscurités qu'ils renferment. Voici donc les propres paroles de Fermat, non pas, il est vrai, dans le texte original latin, mais dans la version française très littérale, que Paul Tannery a jointe à ce texte au tome III des *Œuvres de Fermat* [3].

« Soit a une inconnue quelconque de la question (qu'elle ait une, deux ou trois dimensions, suivant qu'il convient d'après l'énoncé). On exprimera la quantité maxima ou minima en a, au moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques. On substituera ensuite $a + e$ à l'inconnue primitive a, et on exprimera ainsi la quantité maxima ou minima en termes où entreront a et e à des degrés quelconques. On *adégalera*, pour parler comme Diophante, les deux expressions de la quantité maxima ou minima, et on retranchera les termes communs de part et d'autre. Cela fait, il se trouvera que de part et d'autre tous les termes seront affectés de e ou d'une de ses puissances. On divisera tous les termes par e ou par une puissance de e d'un degré plus élevé, de façon que dans l'un au moins des termes de l'un quelconque des membres e disparaisse entièrement. On supprimera ensuite tous les termes où entrera encore e ou l'une de ses puissances et l'on égalera les autres, ou bien, si dans l'un des membres il ne reste rien, on égalera, ce qui revient au même, les termes en plus aux termes en moins. La résolution de cette dernière équation donnera la valeur de a, qui conduira au maximum ou au minimum, en reprenant sa première expression ».

---

[1] Œuvres de Fermat, t. II, p. 253.

[2] T. I, Paris, Gauthier Villars, 1891, pp. 133-136.

[3] Paris, Gauthier-Villars, 1896, p. 121.

Fermat ne dit pas comment un maximum se distingue d'un minimum. Mais, à part ce détail, c'est bien, en style du XVII^e siècle, la règle telle que nous l'appliquons aujourd'hui.

Tenons-nous-en à l'énoncé original. Il renferme deux points principaux, dont à première vue les contemporains n'apercevaient guère la raison. De quel droit peut-on *adégaler*, comme Fermat dit qu'il faut le faire, c'est-à-dire, poser

$$f(a) = f(a + e)\,?$$

Ensuite, après avoir réduit les termes semblables et divisé tous les termes restants par la plus haute puissance de e commune à tous les termes, de quel droit peut-on négliger ceux qui contiennent encore e ?

On sait que, dans le traité *De Maximis et Minimis*, l'énoncé de la règle n'est accompagné d'aucune preuve ni explication quelconque. Pour tout éclaircissement, le Toulousain applique sa méthode à deux exemples. Le premier, quoique énoncé en termes différents, revient à la recherche de l'aire maxima d'un rectangle dont le périmètre est constant. Le second est le célèbre emploi de la règle *De Maximis et Minimis* imaginé par Fermat pour la détermination des tangentes. Cette application donna lieu à la retentissante querelle de Fermat et de Descartes, sur laquelle je n'ai pas à m'arrêter ici (¹).

Ces deux exemples, il faut le reconnaître, répandent sur le sujet une lumière fort insuffisante. A preuve, nous venons de le dire, Descartes lui-même qui n'y vit pas clair et s'irrita.

Mais tous les savants n'avaient pas l'humeur batailleuse du philosophe. Tous ne partaient pas immédiatement en guerre contre l'auteur d'un théorème qu'ils ne comprenaient pas. Brulart de Saint-Martin n'avait pas mieux vu que Descartes la raison de la règle de Fermat. Loin de se fâcher, cependant, il fit ingénument à Mersenne l'aveu de son ignorance, et le pria de demander des éclaircissements à l'auteur (²). C'est la réponse de Fermat que M. Giovannozzi vient de publier.

« Mon invention *De Maximis et Minimis,* dit Fermat, n'a que deux ou trois fondements. Je suppose premièrement que cette recherche aboutit à un point ou à un terme unique. »

L'idée est correcte, fort claire grâce à l'exemple qui y est ajouté. Mais l'expression n'a pas encore la précision ni l'élégance que nous lui donnons aujourd'hui. Fermat veut dire, que le point $a + e$ doit être pris dans le voisinage *immédiat* du point a.

« Il faut donc, continue-t-il, chercher un point unique au delà et au deçà duquel tous les termes de la question soient, ou toujours plus grands, ou toujours plus petits, que celuy qui sera produit par le terme cherché. »

Pour résoudre ce problème, Fermat commence par expliquer pourquoi il pose (³)

$$f(a) = f(a + e).$$

(¹) Récemment encore, la question a été bien traitée par M. G. Milhaud, dans un article intitulé : *La querelle de Descartes et de Fermat au sujet des tangentes*, publié dans la REVUE GÉNÉRALE DES SCIENCES PURES ET APPLIQUÉES ; t. XXVIII, Paris, Doin, 1917, pp. 332-337. J'ai rendu compte du travail de M. G. Milhaud dans mon *Bulletin d'Histoire des Mathématiques* cité ci-dessus, pp 289-291.

(²) Pour plus de détails sur les obscurités de la règle de Fermat, voir l'excellente note publiée par M. A. Aubry dans le tome IV des *œuvres de Fermat*, Paris, Gauthier-Villars, 1912, pp 222-227. Note XXV, intitulée : Sur l'histoire du calcul infinitésimal pendant les années 1638-1639.

(³) Il est clair que les notations modernes $f(a)$, $f(a + e$, dont je me sers, pour la clarté, ne se trouvent pas dans le texte de Fermat.

Il faut écrire cette égalité, d'après lui, parce que si $f(a)$ a un maximum ou un minimum pour une valeur donnée de a, il s'ensuit que $f(a)$ doit être supérieur, ou inférieur, *à la fois* à $f(a+e)$ et à $f(a-e)$. Or, cela n'est possible que pour autant que l'on puisse écrire

$$f(a+e) = f(a-e).$$

Dans cette égalité tous les termes indépendants de e, donc tous les termes de $f(a)$ (¹), se détruisent, ainsi que tous les termes de degrés pairs en e. Fermat l'explique en traitant en détail l'exemple suivant : Trouver le maximum de

$$f(a) = ba^2 - a^3,$$

où b est une constante.

Fermat élucide ensuite le second point obscur que nous avons signalé ci-dessus. Après avoir divisé tous les termes par la plus haute puissance de e commune à tous les termes, de quel droit néglige-t-on ceux qui contiennent encore e ?

C'est, répond Fermat, que ces termes négligés « ne peuvent changer l'ordre de l'équation de quelque signe qu'elle soit ».

Nous exprimerions aujourd'hui cette idée sous la forme suivante : C'est que, pour des valeurs suffisamment petites de e, un polynome rationnel et entier en e finit par prendre le signe du terme indépendant de e. Fermat est le premier, je crois, à en faire la remarque.

Si je voulais m'en tenir strictement au texte du Toulousain, — et peut-être ne serait-ce pas inutile pour se rendre compte de certaines difficultés qu'on y rencontre, — je devrais observer que dans sa lettre à Brulart de Saint-Martin, Fermat, qui travaille vite, a quelque peu perdu de vue les termes de l'énoncé de sa règle. Il y disait, qu'après la réduction des termes semblables, il fallait diviser les termes restants par la plus haute puissance de e commune à tous les termes. Il oublie cette division. En conséquence, au lieu de dire que les termes indépendants de e donnent leur

---

(¹) Suivant son habitude, Fermat ne tire pas *explicitement* de son raisonnement une conclusion aussi simple.

signe au polynome, il explique pourquoi il suffit, pour connaître ce signe, de tenir compte des termes du degré en *e* le moins élevé, ce qui revient évidemment au même.

L'application que Fermat fait de ce principe à l'exemple déjà cité

$$f(a) = ba^2 - a^3$$

revient à dire, mais en style du XVII^e siècle et avec les ellipses coutumières à l'auteur quand il est pressé : Deux polynomes rationnels et entiers en *e* ne peuvent être égaux pour des valeurs arbitrairement petites de *e* que s'ils sont composés identiquement des mêmes termes.

Fermat annonce, enfin, « qu'il va donner une clef pour déterminer le plus grand et le plus petit », autrement dit, pour savoir si on a affaire à un maximum ou à un minimum. En effet, si la différence $f(a \pm e) - f(a)$ est dans les deux cas négative, il y a d'après lui maximum ; si elle est positive, il y a minimum (¹). Cette remarque est neuve, car, nous en avons fait plus haut l'observation, Fermat, dans l'énoncé de sa règle, ne donne pas le critérium par lequel un maximum se distingue d'un minimum. A son ordinaire, il regarde cette indication comme superflue et croit son lecteur trop perspicace pour en avoir besoin. C'est qu'ici, comme toujours, Fermat est un pur amateur, qui n'écrit pas pour le grand public, ne rédige pas en vue de l'impression, mais s'adresse exclusivement à trois ou quatre des savants les plus distingués de l'Europe.

Résumons. La lettre publiée par M. Giovannozzi nous donne sous une forme encore assez diffuse, il est vrai, l'énoncé, probablement le plus ancien, d'un théorème important de la théorie

---

(¹) C'est évidemment ainsi qu'il faut comprendre Fermat. Le texte conservé dans la copie manuscrite de Florence, est ici visiblement défectueux et offre des lacunes. Mais si les fragments perdus de ce texte nous obligent à y suppléer pas des conjectures, la conclusion finale du raisonnement de Fermat, qui nous a été conservée, ne laisse guère de doutes sur le sens des passages qui doivent être reconstitués. « Car, dit le Toulousain, si le terme marqué + est moindre que le terme marqué —, en ce cas la proposition aboutit à la recherche de la plus grande (c. à d. d'un maximum). Que si le terme marqué + est plus grand que le terme marqué —, en ce cas la question sera de la plus petite (c. à d. d'un minimum.)

des polynomes. Elle ajoute à la règle de Fermat le moyen de distinguer un maximum d'un minimum. Enfin et surtout, elle contient une démonstration rigoureuse du théorème de Fermat, par Fermat lui-même. Dans cette démonstration il convient, semble-t-il, de remarquer d'une manière spéciale, qu'en remplaçant l'égalité approchée

$$f(a) = f(a + e)$$

par l'égalité rigoureuse

$$f(a + e) = f(a - e),$$

Fermat introduit lui-même, dans sa méthode, la correction que nous y apportons pour la rendre irréprochable. En *pratique* les deux égalités précédentes conduisent au même résultat.

On le voit, la lettre à Brulart de Saint-Martin est tout à fait digne du grand Toulousain qui l'écrivit.

Le P. Bosmans fait ensuite les observations suivantes sur *La nouvelle édition des œuvres de Torricelli.*

La nouvelle édition des *Œuvres d'Evangéliste Torricelli* (1) se compose en réalité de quatre volumes à peu près de la même épaisseur, mais qui sont numérotés respectivement : volume I, 1^e partie ; volume I, 2^e partie ; volume II et volume III. Cette singularité s'explique. Les deux derniers volumes signés par M. Vassura, ont été imprimés les premiers. Mais l'éditeur a mal calculé le nombre de pages que rempliraient les documents réservés au volume I. Il a fallu par suite scinder ce volume pour ne pas lui donner des dimensions exagérées.

---

(1) Opere di Evangelista Torricelli edite in occasione del III centenario della nascita col concorso del comune di Faenza da Gino Loria e Giuseppe Vassura. Volume I : Geometria, pubblicato per cura di Gino Loria. Parte I. Con il ritratto di E. Torricelli e 373 figure. Faenza, Stabilimento tipo-litografico G. Montanari, 1919. Un volume in-8° de XXXVIII, 407 pages et un portrait de Torricelli hors texte.

Opere di Evangelista Torricelli.... Volume I : Geometria, pubblicato per cura di Gino Loria. Parte II. Con 567 figure e 2 tavole litograficate. Faenza... 1919. Un vol. de (IV) 482 pages et 2 fac-similés des manuscrits de Torricelli hors texte.

Opere di Evangelista Torricelli... Volume II : Lezioni academiche. Mecanica. Scritti varii. Con 250 figure e 4 tavole litograficate, pubblicato per cura di Giuseppe Vassura. Faenza .. 1919. Un vol. de (IV) 320 pages et 4 planches hors texte.

Opere di Evangelista Torricelli... Volume III : Racconto d'alcuni problemi. Carteggio scientifico, con 260 figure ed alcuni facsimile di autografi, pubblicato per cura di Giuseppe Vassura. Faenza... 1919. Un vol. de (IV) et 521 pages.

Les communications étaient récemment encore si difficiles entre Faenza et la Belgique, que je désespérais d'entrer en possession des Œuvres de Torricelli. Je dois les plus vifs remerciements à Monseigneur Ogno Serra, Auditeur de la Nonciature Apostolique à Bruxelles, dont l'aimable intervention auprès des autorités italiennes est parvenue à aplanir toutes les difficultés du transport.

M. Vassura ayant dû se retirer après la publication des deux derniers volumes, le soin de faire paraître le premier a été confié à M. Loria. « Terrible honneur », dit-il dans l'Introduction (¹). Félicitons-nous qu'il l'ait accepté. Son travail l'emporte sur celui de son collègue.

Cette réflexion un peu maussade fait prévoir qu'il n'est guère possible de louer sans réserves la nouvelle édition. Mais, n'exagérons pas. Telles qu'on nous les donne, les *Œuvres de Torricelli* seront utiles, très utiles même. Aucun de nos grands dépôts publics ne peut hésiter à en faire l'acquisition. Ils sont tous plus pauvres les uns que les autres en éditions anciennes du grand Italien. C'est le moment de combler cette lacune. En outre, la nouvelle édition contient de multiples documents très intéressants, édités pour la première fois. Mais, je le répète, faite un peu vite, elle n'a pas le fini des éditions modèles des *Œuvres* de Fermat, de Descartes, de Huygens et de Galilée. N'incriminons pas trop les éditeurs. Il y avait voilà bientôt trois siècles, que Torricelli mourant avait prié les héritiers de ses papiers, Cavalieri, Serenai, Viviani, de publier ses œuvres complètes. La bonne volonté ne leur manqua pas, mais toutes leurs tentatives restèrent infructueuses. Plus tard elles furent reprises par d'autres, sans plus de succès. M. Vassura a craint de courir à un échec nouveau. Il a pensé qu'ici, comme souvent, le mieux était l'ennemi du bien, et que pour atteindre le but il fallait se presser. Nous lui en donnons acte. Quant à M. Loria, il a travaillé pendant les angoisses de la guerre. Excellente excuse, s'il en fut, pour se faire pardonner ! Belges, ce n'est pas nous qui lui reprocherons beaucoup quelques défaillances, notamment dans la correction des épreuves !

(¹) Vol. I, 1^e part., p. XXXI.

Parcourons sommairement les Tables de Matières des divers volumes.

La première partie du volume I débute par une Introduction de M. Loria qui a été tirée à part, et dont j'ai entretenu la Section au mois d'avril de l'année dernière. Puis, vient la réédition de la partie des *Opera Geometrica* de Florence 1644 consacrée aux mathématiques pures. Ce sont les traités : *De Sphaera et Solidis sphaeralibus Libri duo. De dimensione parabolae*, avec son appendice et son scolie relatifs à la cycloïde, plus un appendice nouveau. *De solido hyperbolico acuto. De dimensione cochleae.* Suit une série d'opuscules édités en entier pour la première fois : *De tactionibus*, collection de jolis problèmes relatifs au contact des circonférences données dans des conditions très variées de position et de rayon. *De proportionibus Liber*, essai d'explication et de simplification du 5e livre des *Eléments* d'Euclide ; intéressant surtout par le grand nom de Torricelli qui l'écrivit. Cet essai prouve, une fois de plus, combien, au XVIIe siècle, ce 5e livre d'Euclide paraissait obscur aux savants même les plus illustres. C'est de nos jours seulement que, grâce surtout aux travaux de Zeuthen, il est devenu clair pour tout le monde. *De planis varia. De solidis varia. De circulo et adscriptis. De comparatione perimetrorum cylindri, coni ac sphaerae. De aequalitate perimetrorum cylindri, coni ac sphaerae varia.* Ce dernier traité est composé de divers fragments réunis et mis en ordre par Viviani en vue de l'édition des *Œuvres complètes* de Torricelli qu'il projetait.

Contenu de la 2e partie du volume I. *Campo di Tartufi.* Torricelli s'excuse d'employer cette expression baroque. Il eût été plus simple de dire *Miscellanea. Contro gl'infiniti.* Courte note de deux pages relative à un emploi incorrect de la méthode des indivisibles. Dans un autre traité, Torricelli s'étend longuement sur les paradoxes auxquels conduit l'emploi abusif de cette méthode. M. Loria le donne plus loin sous le titre de *De indivisibilium doctrina perperam usurpata* (1). *Sugli isoperimetri. De*

---

(1) Je n'ai pu étudier cette partie des *œuvres de Torricelli* comme je l'eusse voulu. La première édition des *Indivisibles* de Cavalieri et les *Centrobaryca* de Guldin dont je me servais habituellement et qui m'eussent été indispensables ont péri dans l'incendie de la Bibliothèque de l'Université de Louvain. Je n'ai pas jusqu'ici trouvé d'exemplaire de ces ouvrages dans d'autres dépôts belges.

centro gravitatis sectoris circuli more veterum. De centro gravitatis sectoris circuli per geometriam indivisibilium. Dans le premier de ces deux derniers traités, Torricelli recherche le centre de gravité du secteur circulaire à la manière de della Faille, par les méthodes d'Archimède ; dans le second, il se sert des indivisibles de Cavalieri. Ces traités ont été publiés une première fois à Florence, en 1898, par Caverni, dans sa *Storia del metodo sperimentale in Italia,* t. V, pp. 274-281 et 286-291. *De Maximis et Minimis.* On y trouve, notamment, la solution connue, due à Torricelli, d'un problème fameux de Fermat : « Trouver le point du plan d'un triangle, dont la somme des distances aux trois sommets soit minima ». *Nova per armillas stereometria.* Il s'agit du jaugeage de vases et de solides de formes diverses. Cet opuscule est le complément important d'un autre que nous avons rencontré ci-dessus : *De sphaera et solidis sphaeralibus. De centro gravitatis planorum ac solidorum. De infinitis hyperbolis. De infinitis parabolis.* Il y est question d'hyperboles et de paraboles d'un degré supérieur au second. *De cycloïde. De hemihyperbola logarithmica.* C'est le petit traité connu, publié en 1900, par M. Loria, dans le tome I de la 3^e^ série de la BIBLIOTHECA MATHEMATICA (¹). *De infinitis spiralibus. Sezioni coniche. De indivisibilium doctrina perperam usurpata.* Nous venons d'en parler il y a un instant. *Miscellanea.* Le volume se termine par la réédition d'une pièce de la plus haute importance, mais jusqu'ici extrêmement rare, pour ne pas dire à peu près introuvable. Sans être de la plume de Torricelli, elle le concerne directement. C'est la *Lettera a Filaleti di Timauro Antiate.* Timauro Antiate est le pseudonyme du célèbre humaniste Carlo Dati. Il intitule sa lettre : *Della vera istoria della cicloide e della famosissima esperienza dell'argento vivo.* Dati y défend la cause de Torricelli contre Roberval et Pascal. Son plaidoyer doit être lu avec attention par tous les historiens des mathématiques ; seul moyen pour eux de ne pas se laisser éblouir par le style prestigieux de l'auteur de l'*Histoire de la Roulette* et de *La Grande expérience de l'équilibre des liqueurs.* Placée en regard des écrits de Pascal, la lettre à

(¹) Leipzig, Teubner, pp. 75-89.

Filaleti permet aux juges impartiaux de prononcer une sentence équitable dans la querelle de Torricelli avec les savants français.

Le volume II est consacré aux travaux de physique, de technique et de mécanique, ou plus généralement à tous les écrits de Torricelli étrangers à la Correspondance et aux mathématiques pures. Nous y rencontrons d'abord les *Leçons académiques*, au nombre de douze, qui parurent une première fois à Florence en 1715. M. Vassura nous en donne le texte, dit-il, d'après les autographes de Torricelli ; mais, il est d'une sobriété vraiment excessive relativement à ces autographes, leur état de conservation, les remaniements que leur ont peut-être fait subir les premiers éditeurs. Je n'ai pas l'édition de Florence sous la main et ne saurais dire par quoi l'édition actuelle en diffère. Vient après les *Leçons*, l'opuscule *De motu gravium naturaliter descendentium*, publié jadis par Torricelli lui-même dans ses *Opera Geometrica*. Suivent deux petits traités de mécanique jusqu'ici inédits : *De motu ac momentis varia. Soluzione di un problema intorno alle cose che stanno nell'umido*. Enfin, le volume se clôt par les études de Torricelli entreprises en vue d'améliorer la vallée de la Chiana, et par un court traité de perspective pratique.

Le volume III et dernier débute par une pièce intitulée : *Raconto d'alcuni problemi proposti e passati scambievolmente tra gli matematici di Francia, e il Torricelli nè i quattro anni prossimamente passati*, c'est-à-dire à partir de la seconde moitié de 1642 ; car le *Raconto* fut, on le sait, écrit dans la seconde moitié de 1646. Le reste du volume contient la *Correspondance*. C'est le plus intéressant, mais aussi, le plus défectueux des volumes de l'édition. Un certain nombre de lettres n'ont pas de date dans les manuscrits, et, à plusieurs reprises, M. Vassura leur en a attribuées qui sont visiblement erronées. Dans un long et excellent compte rendu, d'ailleurs très bienveillant, publié en octobre 1920 au BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (¹), M. de Waard a signalé, avec preuves à l'appui, quelques-unes de ces inexactitudes. M. Vassura les eût, semble-t-il, parfois évitées sans trop de peine, s'il s'était demandé pour chaque pièce, à quelle

---

(¹) T. XLIV. Paris, Gauthier-Villars ; pp. 225-248.

lettre elle servait de réponse, et par quelle lettre le destinataire y répondait à son tour.

Autre négligence. Quand on possède l'autographe d'une lettre, il fait loi. Sauf les fautes de plume, on doit le publier tel quel. Il en va différemment quand on n'a que des copies, comme c'est le cas pour la plupart des lettres de la Correspondance de Torricelli. Tout d'abord, il peut arriver que la copie existe en plusieurs exemplaires. Il faut alors choisir le meilleur, ou parfois encore les corriger les uns par les autres. Pressé par le temps, il est arrivé à M. Vassura de s'arrêter au premier exemplaire venu. Pour juger des inconvénients qui en peuvent résulter, le lecteur n'a qu'à comparer le texte de la lettre écrite, de Florence, vers la fin de mars 1645, par Torricelli à Mersenne, tel que M. de Waard l'a publié en annexe de son compte rendu précité, avec le texte de la même lettre tel que M. Vassura nous le donne sous le N° 152 de la Correspondance (pp. 326-328).

Enfin, en constatant l'une ou l'autre distraction de l'éditeur, même en matière importante, on se demande malgré soi avec quelle fidélité la transcription des documents a été faite ? Voici en particulier une inadvertance plus forte que les autres. Déjà signalée par M. de Waard, elle est d'ailleurs aisée à découvrir. La dernière pièce du III^e volume est la réédition d'une longue lettre de Roberval à Torricelli, reproduite d'après le texte imprimé dans les *Ouvrages de Mathématiques de M. de Roberval. A Amsterdam, Chez Pierre Mortier. M D CC XXX VI.* Or, dans l'édition de M. Vassura, — page 490, ligne 17 en remontant, — on rencontre le mot inintelligible « sufficuborum », dont le barbarisme aurait dû éveiller l'attention du correcteur des épreuves, et l'avertir qu'il y avait là une faute. En consultant l'édition d'Amsterdam, on s'aperçoit que le copiste, tournant deux feuillets à la fois, a oublié de transcrire les pages 370 et 371 ! Il faut lire : « suffi*cere* » — puis tout le texte des deux pages omises, importantes d'ailleurs pour l'histoire de la cycloïde, — puis, enfin, « *cubo*cuborum » (¹).

(¹) Pour être exact j'observerai que M. Vassura dit que son texte est reproduit d'après l'édition de La Haye, 1731. Elle présente évidemment la même particularité que celle d'Amsterdam dont je me sers.

Je m'arrête. Si j'ai cru ne pouvoir taire les critiques précédentes, je crains un peu maintenant qu'elles n'impressionnent trop défavorablement le lecteur. Nous avons eu de si parfaits modèles dans les Correspondances de Huygens, de Descartes, de Fermat, de Galilée ! Torricelli est un si beau nom, si sympathique ! Il est naturel d'éprouver quelque déception en constatant que sa Correspondance n'est pas publiée avec la même perfection, le même souci de l'exactitude, que celle de ses émules. Mais, la conclusion ne saurait être que M. Vassura a fait œuvre de peu d'utilité en nous la donnant, même telle qu'elle est. Il faut le répéter, malgré ses imperfections, ses lacunes, voire ses défauts, la Correspondance de Torricelli est très intéressante, très importante ; aucun historien des mathématiques ne peut la négliger.

Je n'ai guère fait jusqu'ici que la bibliographie de la nouvelle édition des *Œuvres de Torricelli* ; il resterait à dire un mot du fond lui-même de l'ouvrage. Et d'abord, j'en ai déjà fait l'observation dans ma communication du mois d'avril 1919, l'intérêt de la nouvelle publication est purement historique, mais à ce point de vue il est très grand. Pour en apprécier le détail, nous devons en avoir des analyses analogues à celles que Brassine a faites des *œuvres de Fermat* (¹) ; Bopp, des livres de l'*Opus Austriacum* de Grégoire de Saint-Vincent consacrés aux coniques (²) ; — et s'il est permis de parler de soi — il faut attendre des résumés semblables à celui que moi-même, dans ces ANNALES, j'ai donné du traité *De Centro Gravitatis* de Jean Charles della Faille (³).

En l'absence de travaux de ce genre, contentons-nous de dire, après M. Loria, que les écrits de Torricelli peuvent se grouper sous trois chefs principaux : recherches relatives au baromètre et à la pesanteur de l'air ; recherches relatives au télescope, au microscope et au polissage des lentilles ; mémoires de mécanique et de

---

(¹) *Précis des œuvres mathématiques de P. Fermat et de l'Arithmétique de Diophante*. Paris, Mallet-Bachelier, 1853. Extrait des MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE TOULOUSE.

(²) *Die Kegelschnitte des Gregorius a St. Vincentio*. Leipzig, Teubner, 1907. ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN, MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN, t. XX.

(³) T. XXXVIII, Louvain, 1913-1914 ; 2ᵉ partie, pp. 255-317.

mathématiques pures. Parmi ces derniers, M. Loria signale à l'attention ceux qui concernent la cycloïde. A mon sens, il faut plus particulièrement encore y noter une lettre du 27 février 1643 (¹) à Michel Ange Ricci. Torricelli y donne à son ami, de la manière la plus lumineuse et la plus élégante, le moyen de mener une tangente à la cycloïde par la composition de deux mouvements ; en d'autres termes, par la méthode dite de Roberval. S'ils eussent connu cette lettre, la date qu'elle porte eût fourni un nouvel argument à Jacoli (²) et à Cantor (³), quand ils cherchèrent à démontrer que Torricelli avait de son côté imaginé cette méthode des tangentes indépendamment du savant français.

M. Lecat fait la communication suivante : *Sur les permanents d'éléments 1 et x.*

Si les éléments d'une matrice de classe n et d'ordre p ont pour valeurs 1 et x, ce qui est possible de

$$\sum_{i=0}^{p^n} \binom{p^n}{i} = 2^{p^n}$$

manières (en considérant comme distinctes toutes les positions

---

(¹) On doit remarquer, cependant, que suivant notre manière de compter la lettre est du 27 février 1644 ; car elle est datée de Florence, où on se servait du style de l'Annonciation dans lequel l'année commence le 25 mars. L'argument conserve néanmoins toute sa valeur, car les *Cogitata physico-mathematica* de Mersenne, où la méthode des tangentes de Roberval fut publiée pour la première fois, ont à la suite du privilège l'achevé d'imprimer suivant : « Peracta est haec impressio, die 15 septembris 1644. »

M. de Waard a observé que dans le classement chronologique des lettres, M. Vassura a commis des erreurs, en ne tenant pas compte du style de l'Annonciation dans lequel plusieurs d'entre elles étaient datées. Les corrections à faire sont très importantes, mais trop longues pour être reproduites ici. Le lecteur en trouvera le détail dans le compte rendu du savant hollandais.

(²) *Evangelista Torricelli ed il metodo delle tangenti detto « Metodo del Roberval »*. BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, pubblicato da B. Boncompagni. T. VIII, Rome, 1875 ; pp. 265-304.

(³) VORLESUNGEN UEBER GESCHICHTE DER MATHEMATIK t. II, Leipzig, Teubner, 1900, pp. 880 sq.

absolues des x), les permanents, polynomes de degré inférieur à $p+1$, satisferont à ces deux conditions : *a)* la somme des coefficients est $(p\,!)^{n-1}$; *b)* la somme des produits des exposants des diverses puissances de x par les coefficients correspondants égale $X.\,(p-1)\,!^{n-1}$, si X désigne le nombre des éléments x.

Le nombre N des polynomes qui satisfont à la première condition est facile à trouver. En effet, de ce que le nombre des arrangements avec répétition, de classe k, de somme s, des nombres 1, 2, ... est :

$$\Phi\,[k\,;\,s\,;\,1,\,2,\,\ldots] = \binom{s-1}{k-1},$$

on déduit aisément que

$$\Phi\,[k\,;\,s\,;\,0,\,1,\,2,\,\ldots] = \sum_{\gamma=1}^{k} \binom{k}{\gamma}\,\Phi\,(\gamma\,;\,s\,;\,1,\,2,\,\ldots),$$

ce qui donne

$$\text{(I)}\quad N = \Phi\,[p+1\,;\,(p\,!)^{n-1};\,0,1,2,\ldots] = \sum_{\gamma=1}^{p+1} \binom{p+1}{\gamma}\binom{p\,!^{n-1}-1}{\gamma-1}$$

La détermination du nombre des polynomes qui satisfont à la fois aux deux conditions revient à résoudre ce problème d'analyse combinatoire : *Trouver le nombre des arrangements avec répétition, de classe k, de somme s, des nombres 0, 1, 2, ..., la somme des produits d'un nombre par son rang dans l'arrangement devant être constant et valoir S.* Cette question n'a pas encore été résolue d'une manière générale.

Il est évident qu'en général le polynome représentant un permanent $(1,\,x)$ se déduit du polynome correspondant à la matrice $(x,\,1)$ par simple renversement de l'ordre des coefficients.

Si $p=2$, il devient très aisé de résoudre le problème. En effet, la seconde condition est alors identiquement satisfaite et les permanents, trinomes (¹) à coefficients positifs, entiers ou nuls, et de somme 2^{n-1}, sont, d'après la formule (I), en nombre (²) :

(¹) Ce mot étant pris dans un sens large.

(²) Le nombre (II) peut s'obtenir directement avec grande facilité. Car si *d*

$$\text{(II)} \qquad \Phi\,[3\,;\,2^{n-1}\,;\,0,\,1,\,2,\,\ldots] = (2^{n-2}+1)\,(2^{n-1}-1),$$

les trois termes de la somme correspondant à $\gamma = 1, 2, 3$, donnant respectivement les nombres :

$$3, \qquad 3\,(2^{n-1}-1), \qquad (2^{n-1}-1)\,(2^{n-2}-1)$$

des monomes, binomes et trinomes (au sens strict).

Pour $n = 2$ (cas des matrices planes), voici quelques solutions particulières. Si $p = 1$, les nombres des polynomes distincts pour $X = 0$ et 1 sont 1 et 1 ; pour $p = 2$ et $X = 0, 1, 2, 3, 4$, ce sont respectivement $1, 1, 2, 1, 1$; pour $p = 3$ et $X = 0, 1, 2, 3, 4$, ce sont : $1, 1, 2, 4, 4$ (pour $X = 5, 6, 7, 8, 9$, on retrouverait les mêmes valeurs, mais dans l'ordre inverse) ; pour $p = 4$ et $X = 0, \ldots, 8$, on a respectivement : $1, 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 22$ (pour $X = 8, \ldots, 16$, on obtiendrait encore les mêmes valeurs, dans l'ordre inverse) (¹).

Voici, par exemple, pour $n = 2$, $p = 4$ et $X = 5$, les 11 matrices

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & x & x & . \\ x & x & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & x & x & . \\ x & . & . & x \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} . & x & x & x \\ x & . & . & . \\ x & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix},$$

$$(0, 0, 6, 18, 0)\,,\ (0, 0, 8, 14, 2)\,,\ (0, 0, 10, 10, 4)\,,\ (0, 0, 12, 6, 6)\,,$$

---

couples d'éléments x sont deux à deux en diagonales, le permanent s'exprime par

$$dx^2 + (X - 2d)x + 2^{n-1} - X + d,$$

d pouvant prendre les valeurs $0, 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ (si le domaine des x n'a pas n dimensions, d est nul). Le nombre des polynomes distincts correspondant à l'étendue X est donc $E[X : 2] + 1$, ce qui conduit au nombre total :

$$2.2\,(1 + 2 + \ldots + 2^{n-2}) + 2^{n-2} + 1,$$

qui n'est autre que (II).

(¹) Il est manifeste que, quelle que soit la classe n et pour toute valeur de $X \leqslant \pi$, on doit trouver le même nombre de polynomes distincts pour l'ordre $\pi + 1$ que pour l'ordre π.

$$\begin{vmatrix} x & x & x & \cdot \\ \cdot & x & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & x & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cdot & x & x & \cdot \\ x & x & \cdot & \cdot \\ x & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x & \cdot & \cdot \\ x & x & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & x & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & \cdot & x & \cdot \\ \cdot & x & \cdot & x \\ x & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

(0, 1, 7, 13, 3) , (0, 1, 9, 9, 5) , (0, 2, 6, 12, 4) , (0, 2, 8, 8, 6) ,

$$\begin{vmatrix} x & x & \cdot & \cdot \\ \cdot & x & x & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & x & \cdot \\ \cdot & \cdot & x & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x & \cdot & \cdot \\ \cdot & x & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & x & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & x \end{vmatrix}. \left\{\begin{matrix} (0, 0, 6, 18, 0) \\ \equiv 6x^2 + 18x. \end{matrix}\right\}$$

(0, 3, 5, 11, 5) , (0, 4, 4, 10, 6) , (1, 1, 7, 9, 6),

qui donnent les polynomes distincts. Les points sont mis pour des 1 et les polynomes sont représentés, au-dessous des matrices correspondantes, par la suite des coefficients des puissances décroissantes.

Pour les déterminants et pénédéterminants, la question se complique encore singulièrement, à cause des réductions de termes produites par les signes négatifs.

Au lieu de ne considérer que deux sortes d'éléments, 1 et x, on pourrait en prendre 3, par exemple 1, — 1, x, ou mieux 1, x et 0, ce qui donnerait

$$2^{p^n} \sum_{k=0}^{p^n} \binom{p^n}{k} : 2^k$$

matrices. Il y aurait lieu de se poser, entre autres, les deux problèmes suivants :

a) Le premier est la question de savoir s'il ne serait pas possible de représenter, soit par les permanents, soit par les déterminants, de classe n et d'ordre p, d'éléments 1, — 1, x ou 1, x et 0, *tous* les polynomes de degré inférieur à $p + 1$ et dont la somme des valeurs absolues des coefficients ne dépasse pas $(p\,!)^{n-1}$. Le nombre de ces polynomes n'est autre que celui des arrangements avec répétition de classe $p + 1$ et de somme inférieure à $(p\,!)^{n-1} + 1$, des nombres 0, 1, 2,...

En cas de négative, on considérerait 4 sortes d'éléments : 1, — 1, x et 0.

b) Dans une matrice à n dimensions et d'ordre p, déterminer les régions R, d'étendue donnée X, qui extrêment le moindre vide réduisant à un binome de degré le plus élevé le développement :

α) du permanent,

β) du déterminant,

γ) d'un pénédéterminant d'espèce donnée,

les éléments étant x à l'intérieur et 1 à l'extérieur de la région R.

On peut imposer comme condition auxiliaire que le vide soit tout entier extérieur ou bien intérieur à la région.

M. Neuberg présente la note suivante de M. V. Thébault *Sur certains groupes de figures semblables.*

Considérons, *dans un même plan*, deux figures semblables F_1 et F_2, leur angle de similitude étant θ, puis deux autres figures F_3 et F_4, semblables, d'angle $(\pi - \theta)$, le sens de rotation étant le même pour ces deux groupes de figures. Si l'on fait tourner F_1 et F_4, par exemple, de l'angle θ, dans le sens donné de rotation, autour d'un point du plan F_1 et F_2, F_3 et F_4 deviennent homothétiques.

Cette remarque nous a conduit à plusieurs théorèmes, peut-être nouveaux, qui généralisent la propriété fondamentale des triangles isologiques et un théorème classique dû à Gergonne (1).

1. THÉORÈME. — *Si par les sommets* A, B, C *d'un triangle on mène des droites* $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ *rencontrant les côtés* B'C', C'A', A'B' *d'un triangle* A'B'C' *sous l'angle* θ, *dans le même sens de rotation, et que par* A', B', C', *on mène les droites* $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha'$, $\alpha'\beta'$ *rencontrant* BC, CA, AB *sous l'angle* $(\pi - \theta)$, *dans le même sens de rotation que précédemment, les aires* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ *des triangles* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, *déterminés, satisfont à la relation*

$$\overline{ABC} \times \overline{\alpha'\beta'\gamma'} = \overline{A'B'C'} \times \overline{\alpha\beta\gamma}.$$

Les triangles ABC et $\alpha'\beta'\gamma'$ sont semblables ainsi que A'B'C' et

---

(1) Nous avons énoncé l'un de ces théorèmes dans le JOURNAL DE VUIBERT, 1918-1919, p. 88, question 8920.

$\alpha\beta\gamma$. Désignons par k^2 et k'^2 les rapports de similitude des aires et par α_1 et β_2 les angles

$$(\beta\gamma,\ CA)=(\gamma'\alpha',\ B'C') \quad \text{et} \quad (\gamma\alpha,\ BC)=(\beta'\gamma',\ C'A') :$$

$$k=\overline{\alpha'\beta'} : \overline{AB} \quad \text{et} \qquad k'=\overline{\alpha\beta} : \overline{A'B'}.$$

Mais

$$\overline{\alpha'\beta'}=\frac{a'\sin\alpha_1}{\sin A}+\frac{b'\sin\beta_2}{\sin B};\ \overline{\alpha\beta}=\frac{a\sin\beta_2}{\sin A'}+\frac{b\sin\alpha_1}{\sin B'};$$

$$k=\frac{\overline{\alpha'\beta'}}{\overline{AB}}=\frac{1}{c}\left[\frac{a'\sin\alpha_1}{\sin A}+\frac{b'\sin\beta_2}{\sin B}\right],$$

$$k'=\frac{\overline{\alpha\beta}}{\overline{A'B'}}=\frac{1}{c'}\left[\frac{a\sin\beta_2}{\sin A'}+\frac{b\sin\alpha_1}{\sin B'}\right],$$

a, b, c et a' b' c' étant les côtés des triangles ABC et A'B'C' ; d'où, après quelques réductions,

$$\sqrt{\frac{\overline{A'B'C'}\times\overline{\alpha'\beta'\gamma'}}{\overline{ABC}\times\overline{\alpha\beta\gamma}}}=\frac{k}{k'}=\frac{\overline{A'B'C'}}{\overline{ABC}};$$

soit

$$\overline{ABC}\times\overline{\alpha'\beta'\gamma'}=\overline{A'B'C'}\times\overline{\alpha\beta\gamma}. \tag{1}$$

2. Faisons tourner le système des deux triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$ d'un angle θ dans le sens donné de rotation, autour d'un point du plan ; ces triangles prennent des positions nouvelles $A_1B_1C_1$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, telles que $A_1B_1C_1$ et $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ et A'B'C' deviennent homothétiques.

La relation (1) *subsiste et généralise la propriété fondamentale des triangles métaparallèles. Une seconde rotation de la figure, de l'angle* $\frac{\pi}{2}$, *généralise celle des triangles orthologiques.*

Si $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ concourent en un point P, $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha'$, $\alpha'\beta'$ se rencontrent également en un point P'. *Les triangles* ABC *et* A'B'C' *sont alors isologiques ; les centres d'isologie sont* P *et* P'.

Enfin si A'B'C' est inscrit au triangle ABC, A', B', C', étant respectivement sur BA, CA, AB et que $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ soient parallèles à

B'C', C'A', A'B', les parallèles, $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha'$, $\alpha'\beta'$ à BC, CA, AB se confondent avec ces droites, et

$$\overline{ABC}^2 = \overline{A'B'C'} \times \overline{\alpha\beta\gamma}.$$

Nous retrouvons ce théorème déjà ancien de Gergonne (ANNALES DE GERGONNE, 1811, p. 93 et NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, 1844, p. 27) :

On considère un triangle A'B'C' *inscrit à un triangle* ABC. *Par les sommets de* ABC *on mène les parallèles aux côtés du triangle* A'B'C' *qui déterminent un triangle* $\alpha\beta\gamma$. *L'aire de l'angle* ABC est *moyenne proportionnelle entre celles des triangles* A'B'C' et $\alpha\beta\gamma$.

3. Le cas où le triangle A'B'C', par exemple, est *aplati*, mérite un examen particulier.

Les droits $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ sont alors parallèles, sans que, en général, $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha'$, $\alpha'\beta'$ se coupent en un même point.

Ces dernières déterminent un triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ semblable à ABC, et si l'on désigne par λ et μ les angles de la droite A'B'C' avec BC et CA,

$$\overline{\alpha'\beta'}^2 : \overline{AB}^2 = \overline{\alpha'\beta'\gamma'} : \overline{ABC} = (ab' \sin\lambda + a'b \sin\mu)^2 : 4ABC^2.$$

Trois points A', B', C' étant donnés en ligne droite, la condition nécessaire et suffisante pour que trois droites $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha'$, $\alpha'\beta'$, issues de A', B', C' et coupant les côtés BC, CA, AB d'un triangle sous le même angle θ, soient concourantes, est que les segments $\overline{B'C'}$, $\overline{C'A'}$, $\overline{A'B'}$, soient proportionnels aux projections (d'angle $(\pi - \theta)$ dans le même sens que θ) des côtés BC, CA, AB sur la droite A'B'C'. Dans ce cas d'ailleurs, si l'on trace les parallèles à BC, CA, AB de A', B', C', le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ ainsi déterminé est tel que

$$ab' \sin\lambda + a'b \sin\mu = 2ABC\,; \text{ soit } \alpha'\beta'\gamma' = ABC.$$

On obtient donc la propriété fondamentale de l'*isopôle* d'une droite par rapport à un triangle et ce théorème de M. Neuberg (WISKUNDIG TIJDSCHRIFT, 10^e^ année, p. 80) :

Par les sommets d'un triangle ABC, *on mène trois parallèles* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *qui rencontrent une transversale quelconque* Δ *en* α, β, γ. *Les parallèles aux côtés* BC, CA, AB, *menées par* α, β, γ, *forment un triangle* $A_1B_1C_1$ *égal à* ABC.

4. On peut partir du théorème de Gergonne pour arriver à notre théorème général du paragraphe 1.

Inscrivons dans ABC un triangle $A''B''C''$ homothétique à $\alpha\beta\gamma$. Les figures (ABC, $A''B''C''$) et ($\alpha'\beta'\gamma'$, $A'B'C'$) sont semblables et

$$\overline{ABC} : \overline{\alpha\beta\gamma} = \overline{A''B''C''} : \overline{ABC} = \overline{A'B'C'} : \overline{\alpha'\beta'\gamma'} ;$$

d'où la relation (1).

5. Le théorème de Gergonne a été étendu, dans le plan, aux polygones quelconques (NOUVELLES ANNALES, 1844, p. 27) :

Etant donnés deux polygones (P) *et* (P') *homothétiques, on désigne par* (π) *un troisième polygone circonscrit au premier et inscrit au second. Sa surface est moyenne proportionnelle entre celles des deux proposés.*

Voici un énoncé plus général :

Etant donnés un polygone (P) *semblable à un polygone* (P'), *l'angle de similitude étant* θ, *un polygone* (π), *inscrit à* (P), *semblable à un polygone* (π') *circonscrit à* (P'), *l'angle de similitude étant* ($\pi - \theta$) *dans le même sens de rotation que* θ, *on a la relation d'aires :*

$$(P) \times (P') = (\pi) \times (\pi').$$

La démonstration est analogue à celle du paragraphe 4, en considérant un polygone (π_1) inscrit à (π) et homothétique à (P). Or, on peut toujours construire (π_1). Soient, en effet, $A_1\ A_2 \ldots A_n$ le polygone (π) ; $A'_1\ A'_2 \ldots A'_n$ le polygone (P). Si 0 est le centre d'homothétie, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, les sommets de ($\pi_1$) ; S, S', S_1 les aires de (π), (P) et (π_1),

$$\overline{0\alpha_1} : \overline{0A'_1} = \overline{\alpha_1\alpha_2} : \overline{A'_1A'_2} = \sqrt{S_1} : \sqrt{S'}.$$

Mais $$S_1 . S' = S^2 ;$$

d'où $$\overline{0\alpha_1} : \overline{0A'_1} = S : S'.$$

0 est donc sur une droite Δ_1 homothétique de $A_1\ A_n$ par rapport à A'_1 ; il est de même sur une droite Δ_2 homothétique de A_2A_3 par rapport à A'_2. L'intersection de Δ_1 et Δ_2 détermine le point 0 et par suite (π_1).

6. Nous désignons par M, N, P et M', N', P' les points où BC, CA, AB et B'C', C'A', A'B' sont respectivement rencontrés par $\beta\gamma$,

$\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ et $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha'$, $\alpha'\beta'$; par λ, μ, ν et λ', μ', ν' les angles sous lesquels ces droites coupent les côtés correspondants des triangles ABC et A'B'C' ; enfin par δ_1 et δ_2, ϵ_1 et ϵ_2, φ_1 et φ_2, les angles suivants : $(\beta\gamma, AB)$ et $(\beta\gamma, CA)$; $(\gamma\alpha, AB)$ et $(\gamma\alpha, BC)$; $(\alpha\beta, BC)$ et $(\alpha\beta, CA)$, en remarquant que ces angles sont aussi ceux que déterminent, dans un certain ordre, les droites $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha'$, $\alpha'\beta'$ avec les côtés de A'B'C'.

La suite d'égalités

$$\overline{BM} = c \sin \delta_1 : \sin \lambda \quad ; \quad \overline{MC} = b \sin \delta_2 : \sin \lambda,$$
$$\overline{CN} = a \sin \epsilon_2 : \sin \mu \quad ; \quad \overline{NA} = c \sin \epsilon_1 : \sin \mu,$$
$$\overline{AP} = b \sin \varphi_2 : \sin \nu \quad ; \quad \overline{PB} = a \sin \varphi_1 : \sin \nu,$$

et

$$\overline{B'M'} = c' \sin \varphi_1 : \sin \lambda \quad ; \quad \overline{M'C'} = b' \sin \epsilon_2 : \sin \lambda,$$
$$\overline{C'N'} = a' \sin \delta_2 : \sin \mu \quad ; \quad \overline{N'A'} = c' \sin \varphi_2 : \sin \mu,$$
$$\overline{A'P'} = b' \sin \epsilon_1 : \sin \nu \quad ; \quad \overline{P'B'} = a' \sin \delta_1 : \sin \nu,$$

donne, si l'on utilise l'expression connue,

$$MNP = \frac{ABC}{abc} \left(\overline{BM} \cdot \overline{CM} \cdot \overline{AP} + \overline{CM} \cdot \overline{AN} \cdot \overline{BP} \right),$$

de l'aire d'un triangle MNP inscrit à un triangle ABC :

$$\overline{ABC} \times \overline{M'N'P'} = \overline{A'B'C'} \times \overline{MNP} \text{ (}^1\text{)}.$$

En particulier, si M, N, P sont en ligne droite, M', N', P' le sont aussi. Les triangles ABC et A'B'C' peuvent être dits *isologiques de seconde espèce*, pour adopter une expression dont s'est servi M. Neuberg pour les triangles *métaparallèles* ou *orthologiques de seconde espèce* (MATHESIS, 1913, p. 69).

La figure considérée dans ce paragraphe nous a donné d'autres propriétés que nous nous contenterons d'énoncer :

Si φ *et* φ' *sont les points communs aux cercles* ANP, BMP *et* CMN, A'N'P', B'M'P' *et* C'M'N', *les triangles podaires* mnp *et* m'n'p'

---

(1) Cette relation est due à M. H. Mennessier, JOURNAL DE VUIBERT, question 9079.

de φ *et* φ', *par rapport aux triangles* ABC *et* A'B'C', *sont tels que*

$$\overline{ABC} \times \overline{m'n'p'} = \overline{A'B'C'} \times \overline{mnp}.$$

Si O *et* O', R *et* R' *sont les centres et les rayons des cercles* ABC *et* A'B'C',

$$\varphi O \times R' = \varphi' O' \times R.$$

7. Pour terminer, voici un énoncé, qui, avec d'autres analogues faciles à formuler, ne sont pas essentiellement différents de ceux qui précèdent :

On donne dans un même plan deux triangles ABC *et* A'B'C'. *Au triangle* ABC *on inscrit un triangle* $\alpha\beta\gamma$ *tel que* $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ *fassent l'angle* θ *avec* B'C', C'A', A'B', *dans le même sens de rotation. Au triangle* A'B'C' *on inscrit un triangle* $\alpha'\beta'\gamma'$ *tel que* $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha'$, $\alpha'\beta'$ *fassent l'angle* $(\pi - \theta)$ *avec* BC, CA, AB, *dans le même sens de rotation précédent. On a la relation :*

$$\overline{ABC} \times \overline{\alpha'\beta'\gamma'} = \overline{A'B'C'} \times \overline{\alpha\beta\gamma}.$$

M. Neuberg présente ensuite des *Notes de Géométrie.*

I. *Sur un cas particulier de trois figures semblables.*

Sur les côtés du *triangle fondamental* ABC construisons les triangles BCA', CAB', ABC' directement semblables à un triangle donné LMN. Nous appelons ces nouveaux triangles des *affixes* de ABC, pour les distinguer des triangles directement semblables A'BC, AB'C, ABC' qui sont dits des *annexes* de ABC.

Il y a lieu de considérer trois cas : 1° les triangles ABC, LMN sont de sens différent ; 2° ils sont de même sens ; 3° LMN est un *triangle aplati*. Dans le premier cas, nous désignons par L, M, N les angles des affixes considérés comme positifs, par λ, μ, ν leurs cotangentes et par θ l'angle de Brocard des affixes. Pour passer alors au deuxième cas, il suffit de changer les signes de L, M, N, θ. Dans le troisième cas, les points A', B', C' divisent BC, CA, AB dans le rapport LN : NM $= m : n$; deux des angles L, M, N étant nuls, on a $\cot \theta = \infty$.

On verra que les droites AA', BB', CC' sont équipollentes aux côtés d'un triangle $A_1B_1C_1$.

Pour abréger, posons :

$$a^2 + b^2 + c^2 = q^2, \quad a^2_1 + b^2_1 + c^2_1 = q^2_1, \quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = q'^2,$$

et soient ω, ω_1, ω', S, S_1, S′ les angles de Brocard et les aires des triangles ABC, $A_1B_1C_1$, A′B′C′, de sorte que

$$\cot \omega = \frac{q^2}{4S}, \quad \cot \omega_1 = \frac{q^2_1}{4S_1}, \quad \cot \omega' = \frac{q'^2}{4S'}.$$

La présente note traite des triangles $A_1B_1C_1$ et A′B′C′ ; elle renferme des résultats inédits et des démonstrations assez simples de quelques propositions déjà connues (¹).

1. Les droites AA′, BB′, CC′ sont les résultantes des lignes brisées ABA′, BCB′, CAC′. Or les composantes AB, BC, CA ont une résultante nulle, et il en est de même des composantes BA′, CB′, AC′ qui sont proportionnelles à BC, CA, AB et également inclinées sur ces côtés. On en conclut que les droites AA′, BB′, CC′ sont équipollentes aux côtés d'un triangle $A_1B_1C_1$. On peut prendre pour $A_1B_1C_1$ le triangle AA′P que l'on obtient en menant la droite A′P équipollente à BB′.

2. *Le triangle* $A_1B_1C_1$.

Premier cas. — Le triangle ABA′ donne :

$$a^2_1 = c^2 + \frac{a^2 \sin^2 M}{\sin^2 N} - \frac{2ac \sin M \cos (B + L)}{\sin N}.$$

Développons cos (B + L) et remarquons que

$$2ac \cos B = a^2 + c^2 - b^2, \quad 2ac \sin B = 4S ;$$

il vient :

$$a^2_1 \sin N \sin (L + M) = c^2 \sin N \cos M \sin L + \ldots + 4 S \sin L \sin M \sin N.$$

D'où en divisant par sin L sin M sin N, et par analogie :

$$\left.\begin{aligned} (\lambda + \mu)\, a^2_1 &= \mu\, c^2 + \nu\, a^2 + \lambda\, b^2 + 4S, \\ (\lambda + \mu)\, b^2_1 &= \mu\, a^2 + \nu\, b^2 + \lambda\, c^2 + 4S, \\ (\lambda + \mu)\, c^2_1 &= \mu\, b^2 + \nu\, c^2 + \lambda\, a^2 + 4S. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

(¹) *Bibliographie.* — WISKUNDIGE OPGAVEN, nieuwe reeks, tome VI, p. 202. ANNALES DE L'ASSOCIATION FRANÇAISE POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES, 1881, p. 153 et 1893, pp. 34-42. MATHESIS, 1904, p. 98 ; 1882, p. 76 ; 1889, p. 191 ; 1882, p. 116.

De ces relations on déduit :

$$(\lambda + \mu)\, q^2_1 = q^2 \cot \theta + 12\mathrm{S} = (\cot \theta + 3\, tg\, \omega)\, q^2. \qquad (2)$$

La valeur de S_1 résulte des égalités :

$$S_1 = AA'P = CAA' + CPA + CA'P,$$

$$CAA' = \frac{ab \sin L \sin (C + M)}{2 \sin N},$$

$$CPA = CAC' = \frac{bc \sin M \sin (A + L)}{2 \sin N},$$

$$CA'P = \frac{ac \sin L \sin M \sin (B + N)}{2 \sin^2 N};$$

on trouve d'abord :

$$2S_1 \sin N \sin (L + M) = \Sigma\, ab \sin L \sin N \sin (C + M)$$

$$= 2S.\ \Sigma \sin L \sin N \cos M + \frac{1}{2} \sin L \sin M \sin N.\ \Sigma\, (a^2 + b^2 - c^2),$$

et finalement :

$$(\lambda + \mu)\, S_1 = (\cot \theta + \cot \omega)\, S. \qquad (3)$$

Des formules (2) et (3) on conclut :

$$\cot \omega_1 = \frac{\cot \omega \cot \theta + 3}{\cot \omega + \cot \theta}. \qquad (4)$$

Deuxième cas. — On a maintenant :

$$(\lambda + \mu)\, q^2_1 = (\cot \theta - 3\, tg\, \omega)\, q^2, \qquad (2')$$

$$(\lambda + \mu)\, S_1 = (\cot \theta - \cot \omega)\, S, \qquad (3')$$

$$\cot \omega_1 = \frac{\cot \omega \cot \theta - 3}{\cot \theta - \cot \omega}. \qquad (4')$$

D'après la formule (3′), *si les affixes tournés vers l'intérieur de* ABC *sont équibrocardiens avec* ABC, *les droites* AA′, BB′, CC′ *sont parallèles entre elles et l'une d'elles est égale à la somme des deux autres.*

Comme une permutation circulaire de λ, μ, ν change les seconds membres des égalités (1) les uns dans les autres, on a le théorème suivant : *Si l'on construit extérieurement* (ou intérieurement) *sur les côtés d'un triangle* ABC *les triangles* BCA″, CAB″, ABC″ *semblables à un même triangle* LMN, *les droites* CC″, AA″, BB″ *sont proportionnelles aux droites* BB′, CC′, AA′ *et font avec celles-ci un même angle.*

On voit aussi que *l'échange des angles* L *et* M *ne change pas les valeurs de* q^2_1 *et* S_1.

L'égalité (2′) revient à :

$$(\lambda + \mu)\, q^2_1 = (\lambda + \mu + \cot N - 3\, tg\ \omega)\, q^2\ ;$$

on en conclut que $q^2_1 = q^2$, si $\cot N = 3\, tg\ \omega$.

Troisième cas. — Le théorème de Stewart donne :

$$\left.\begin{aligned}(m+n)^2 a^2_1 &= m\,(m+n)\, b^2 + n\,(m+n)\, c^2 - mna^2,\\ (m+n)^2 b^2_1 &= m\,(m+n)\, c^2 + n\,(m+n)\, a^2 - mnb^2,\\ (m+n)^2 c^2_1 &= m\,(m+n)\, a^2 + n\,(m+n)\, b^2 - mnc^2\ ;\end{aligned}\right\} \quad (1'')$$

d'où
$$(m+n)^2 q^2_1 = (m^2 + mn + n^2)\, q^2. \qquad (2'')$$

La valeur de S_1 se déduit des égalités

$$S_1 = AA'P = CAA' + CPA + CA'P,$$

$$CAA' = \frac{n}{m+n} S,\ CPA = \frac{m}{m+n} S,$$

$$CA'P = -\frac{1}{2} CA'.\, AC' \sin B = -\frac{1}{2} \frac{acmn \sin B}{(m+n)^2} S\ ;$$

on trouve :

$$(m+n)^2 S_1 = (m^2 + mn + n^2)\, S. \qquad (3'')$$

Les relations (2″) et (3″) entraînent $\omega_1 = \omega$, résultat que l'on conclut également de (4) et (4′) en faisant $\cot \theta = \infty$.

Minimum de q^2_1. Écrivons l'égalité (2′) ainsi :

$$\frac{q^2_1}{q^2} = \frac{\lambda + \mu + \nu - 3\, tg\ \omega}{\lambda + \mu} = 1 - \frac{\sin L \sin M\, (3\, tg\ \omega - \cot N)}{\sin N}.$$

Le minimum de q^2_1 exige d'abord $\cot N < 3\, tg\ \omega$. Comme pour une même valeur de N le maximum du produit sin L sin M correspond à $L = M$, on est amené à faire $M = L$, $N = \pi - 2L$ et à chercher le maximum de $(3\, tg\ \omega + \cot 2L)\, tg\ M$. Or la dérivée de cette quantité par rapport à L s'annule pour $tg\ L = 3\, tg\ \omega$.

Par suite, *un minimum de* q_1^2, *égal à* $\frac{1}{4}$ $(1 - 3\,tg^2\omega)\,q^2$, *correspond au cas où les sommets du premier triangle de Brocard sont les centres de gravité des affixes.*

Dans le troisième cas, on a :

$$\frac{q_1^2}{q^2} = \frac{S_1}{S} = 1 - \frac{mn}{(m+n)^2} = 1 = \frac{BA'.A'C}{a^2}.$$

Il en résulte que, *parmi les triples de points qui divisent dans un même rapport les côtés* BC, CA, AB *d'un triangle* ABC, *les milieux de ces côtés correspondent au minimum de* q_1^2 *et à celui de* S_1.

Minimum de S_1. L'égalité (3') peut prendre la forme

$$\frac{S_1}{S} = 1 - \frac{\sin L \sin M\,(\cot\omega - \cot N)}{\sin N}.$$

Le minimum de S_1 exige d'abord $\cot N < \cot\omega$. En raisonnant comme ci-dessus pour q_1^2 on est conduit à chercher le maximum de $(\cot\omega + \cot 2L)\,tg\,L$. La dérivée de cette quantité par rapport à L s'annule pour $tg\,L = \cot\omega$, ou $N = 2\omega$. On en conclut que S_1 *admet un minimum négatif* $\left(1 - \frac{1}{4\sin^2\omega}\right)S$ *qui correspond à des affixes isocèles dont les angles à la base sont égaux à* $\frac{1}{2}\pi - \omega$.

Remarquons aussi que $S_1 = S$, si $N = \omega$.

3. *Le triangle* A'B'C'.

Premier cas. Le triangle B' AC' donne :

$$a'^2 \sin^2 N = b^2 \sin^2 L + c^2 \sin^2 M + 2\,bc \sin L \sin M \cos(A - N)\,;$$

le dernier terme de cette égalité revient à :

$$(b^2 + c^2 - a^2)\sin L \sin M \cos N + 4S \sin L \sin M \sin N\,;$$

on en conclut :

$$a'^2 \sin N \sin(L + M) = b^2 \sin L\,[\sin(M + N) + \sin M \cos N] + \cdots$$
$$- a^2 \sin L \sin M \cos N + 4S \sin L \sin M \sin N.$$

D'où en divisant par sin L sin M sin N, et par analogie :

$$\left.\begin{aligned}(\lambda + \mu)\,a'^2 &= (\mu + 2\nu)\,b^2 + (\lambda + 2\nu)\,c^2 - \nu a^2 + 4S,\\ (\lambda + \mu)\,b'^2 &= (\mu + 2\nu)\,c^2 + (\lambda + 2\nu)\,a^2 - \nu b^2 + 4S,\\ (\lambda + \mu)\,c'^2 &= (\mu + 2\nu)\,a^2 + (\lambda + 2\nu)\,b^2 - \nu c^2 + 4S.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

En additionnant les équations (5) on obtient :

$$(\lambda + \mu)\, q'^2 = (\lambda + \mu + 3\nu + 3 \operatorname{tg} \omega)\, q^2. \qquad (6)$$

La comparaison des formules (5) et (1) suggère des conséquences intéressantes. En effet, posons :

$$\lambda' = \mu + 2\nu, \qquad \mu' = \lambda + 2\nu, \qquad \nu' = -\nu,$$

et remarquons que $\lambda'\mu' + \mu'\nu' + \nu'\lambda' = 1$; il en résulte que λ', μ', ν' sont les cotangentes des angles d'un triangle L′M′N′. Construisons maintenant extérieurement sur les côtés du triangle ABC les triangles BCX, CAY, ABZ semblables à L′M′N′ ; les droites AX, BY, CZ seront équipollentes aux côtés a'', b'', c'' d'un triangle A″B″C″ et nous pourrons écrire :

$$(\lambda' + \mu')\, a''^2 = \mu' c^2 + \nu' a^2 + \lambda' b^2 + 4S, \ldots$$

D'autre part, les égalités (5) prennent la forme

$$(\lambda + \mu)\, a'^2 = \lambda' b^2 + \mu' c^2 + \nu' a^2 + 4S, \ldots$$

Par conséquent,

$$\frac{a'^2}{a''^2} = \frac{b'^2}{b''^2} = \frac{c'^2}{c''^2} = \frac{\lambda' + \mu'}{\lambda + \mu}. \qquad (7)$$

Ainsi, *les côtés du triangle* A′B′C′ *sont proportionnels aux droites* AX, BY, CZ *et ce triangle est semblable à* A″B″C″.

Soient S″ la surface du triangle A″B″C″ et θ' l'angle de Brocard du triangle L′M′N′, en sorte que

$$\cot \theta' = \lambda' + \mu' + \nu' = \lambda + \mu + 3\nu, \quad (\lambda + \mu)\, q'^2 = (\cot \theta' + 3 \operatorname{tg} \omega)\, q^2.$$

Des relations (7) et (3) on conclut :

$$(\lambda + \mu)\, S' = (\lambda' + \mu') S'' = (\cot \theta' + \cot \omega) S, \qquad (8)$$

d'où l'on déduit :

$$\cot \omega' = \frac{\cot \omega \cot \theta' + 3}{\cot \omega + \cot \theta'}. \qquad (9)$$

Deuxième cas. Les formules correspondantes sont :

$$(\lambda + \mu)\, q'^2 = (\cot \theta' - 3 \operatorname{tg} \omega)\, q^2, \qquad (6')$$

$$(\lambda + \mu)\, S' = (\cot \theta' - \cot \omega)\, S, \qquad (7')$$

$$\cot \omega' = \frac{\cot \omega \cot \theta' - 3}{\cot \theta' - \cot \omega}. \qquad (8')$$

L'égalité (6') peut s'écrire ainsi :

$$\frac{q'^2}{q^2} = \frac{\lambda + \mu + 3\nu - 3\,\mathrm{tg}\,\omega}{\lambda + \mu}$$

$$= 1 - 3\,\frac{\sin L \sin M\,(\mathrm{tg}\,\omega - \cot N)}{\sin N}\ ;$$

en raisonnant comme ci-dessus pour q^2_1 on trouve que *le minimum de* q'^2, *égal à* $\frac{1}{4}(1 - 3\,\mathrm{tg}^2\,\omega)\,q^2$, *correspond à* $L = M = \omega$; A', B', C' *sont alors les sommets du premier triangle de Brocard de* ABC.

On a $q'^2 = q^2$, si $N = \frac{1}{2}\pi - \omega$.

D'après la relation (8') on a $S' = S'' = 0$, si

$$\lambda + \mu + 3\nu = \cot \omega\ ; \tag{10}$$

les points A', B', C' sont alors sur une même droite passant par le centre de gravité G de ABC et ont pour lieux géométriques trois circonférences passant par G.

L'hypothèse $L = M$ transforme la condition (10) successivement en

$$2(\cot L + \cot \omega) = 3(\cot 2L + \cot \omega),$$

$$\sin(2L + \omega) = 2 \sin \omega, \quad \cot^2 L - 2 \cot \omega \cot L + 3 = 0.$$

Les deux valeurs de L déterminées par la dernière équation ont été appelées *angles de Steiner* du triangle ABC ; les droites correspondantes A'B'C' sont les axes des deux ellipses de Steiner ABC.

4. Supposons le triangle ABC *automédian*, c'est-à-dire $2a^2 = b^2 + c^2$. Si les affixes construits extérieurement ou intérieurement sur les côtés de ABC sont isocèles ($L = M$), on démontre facilement, au moyen des égalités (1) et (5), que les triangles $A_1B_1C_1$ et A'B'C' sont également automédians.

5. Si le triangle ABC est équilatéral, les triangles $A_1B_1C_1$ et A'B'C' le sont également ; ils sont même égaux lorsque $N = 90°$, c'est ce qui résulte des égalités (1) et (5).

Dans le cas d'un triangle quelconque ABC, l'égalité (7) indique que les triangles A'B'C' et A''B''C'' sont égaux lorsque

$$\lambda + \mu = \lambda' + \mu' = \lambda + \mu - 4\nu, \quad \text{d'où} \quad \nu = 0,\ \lambda' = \mu,\ \mu' = \lambda.$$

Les points X, Y, Z sont alors les symétriques des points A', B', C' respectivement par rapport aux médiatrices des droites BC, CA, AB. Pour démontrer géométriquement ce résultat, soient P_a, P_b, P_c les milieux de BC, CA, AB ; les droites AX et B'C', par exemple, sont les résultantes des lignes brisées AP_cP_aX et $B'P_bP_cC'$ dont les composantes AP_c et P_cC', P_cP_a et $B'P_b$, P_aX et P_bP_c sont égales et font entre elles le même angle.

Si L = M, les points A', B', C' sont les centres des carrés construits sur BC, CA, AB et se confondent avec les points X, Y, Z ; les droites AA', BB', CC' sont alors égales et perpendiculaires aux droites B'C', C'A', A'B'. Ce cas particulier est connu depuis longtemps.

6. Pour terminer cette note il resterait à déterminer le triangle ABC, lorsqu'on donne le triangle LMN et l'un des triangles $A_1B_1C_1$, A'B'C'.

II. *Sur un système focal dans le plan.*

Soient C le centre et *p* une asymptote d'une hyperbole équilatère U passant par deux points fixes A et B. L'examen du système focal (C, *p*) présente quelque intérêt.

a. Faisons parcourir au centre C une droite quelconque *c*. Si la circonférence décrite du milieu M de la droite AB comme centre avec le rayon MC rencontre cette droite aux points N et N', les droites CN et CN' sont les asymptotes d'une hyperbole U. Soient Q le point de rencontre des droites *c* et AB, et Q' le symétrique de Q par rapport à M ; la projection C_1 de Q' sur *c* est le centre d'une hyperbole U dont C_1Q et C_1Q' sont les asymptotes. On en conclut qu'il passe par tout point de *c* trois droites *p* ; par suite, l'enveloppe de *p* est de la troisième classe.

b. Supposons maintenant que l'asymptote *p* tourne autour d'un point fixe P. Si elle coupe AB en Q et que Q' désigne le symétrique de Q par rapport à M, la projection C_1 de Q' sur la droite PQ est le centre d'une hyperbole U. Le point P lui-même est le centre d'une hyperbole U qui a pour asymptotes les droites joignant P aux points de rencontre S et S' de AB avec la circonférence de centre M et de rayon MP. Donc toute droite passant par P contient les centres de deux hyperboles U ; mais comme le point P est un point C pour chacune des droites PS et PS', le lieu de B est une cubique dont P est un point double.

c. Le système des coniques U comprend des couples de droites.

Tout point de la circonférence de diamètre AB est le centre d'une hyperbole U constituée par les droites joignant ce point à A et B.

Une hyperbole dégénérée se compose de la droite (indéfinie) AB et d'une perpendiculaire quelconque à cette droite.

III. *Sur les cercles tritangents à un triangle* ABC.

Notations. — (O, R), (I, r), (I_a, r_a), (I_b, r_b), (I_c, r_c), les centres et les rayons des cercles circonscrit, inscrit et exinscrits.

(D, E, F), (D_a, E_a, F_a), (D_b, E_b, F_b), (D_c, E_c, F_c), les points de contact des côtés BC, CA, AB avec les cercles I, I_a, I_b, I_c.

P_a, Q_a, les points où les bissectrices AII_a, I_bAI_c recoupent la circonférence O, ces points sont les extrémités du diamètre perpendiculaire au milieu M_a de BC. P_a étant le milieu de la distance II_a, et Q_a celui de la distance I_bI_c, les perpendiculaires P_aP', Q_aQ' abaissées de ces points sur le côté AB sont respectivement égales à $\frac{1}{2}(r + r_a)$, $\frac{1}{2}(r_b - r_c)$.

P_b, Q_b, P_c, Q_c, signification analogue à celle de P_a, Q_a.

ID′, IE′, IF′, les prolongements, égaux à 2R, des droites DI, EI, FI.

Bibliographie. — MITTEILUNGEN DER NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT IN BERN :

1907. O. Schenker, *Neun Kreisscharen im Dreieck* ;

1919. J. Neuberg, *Ueber die einem Dreieck eingeschriebene Dreiecke.*

Les propositions démontrées dans ces deux articles peuvent être énoncées ainsi :

Se coupent sur la circonférence ABC :

A. *La circonférence de centre* Q_a *et passant par les points* D, D_a, *et la circonférence de centre* P_a *et passant par les points* E, F, E_a, F_a.

B. *La circonférence de centre* P_a *et passant par les points* D_b, D_c, *et la circonférence de centre* Q_a *et passant par les points* E_b, E_c, F_b, F_c ;

C. *La circonférence de centre* Q_a *et passant par le point* D′, *et la circonférence de centre* P_a *et passant par les points* E′, F′.

Il est clair que ces théorèmes sont encore applicables aux couples de circonférences analogues décrites de Q_b et P_b ou de Q_c et P_c comme centres.

La présente note a pour but d'attirer l'attention des géomètres sur ces propositions peu connues et d'établir une généralisation du théorème C déjà signalée par M. Schenker.

D. Soient D″, E″, F″ trois points qui divisent dans un même rapport les rayons ID, IE, IF du cercle inscrit I. La circonférence V_a de centre Q_a et passant par le point D″, et la circonférence U_a de centre P_a et passant par les points E″, F″ se coupent sur une circonférence W de centre O ; les circonférences analogues décrites des centres Q_b et P_b ou des centres Q_c et P_c se coupent sur la même circonférence W.

En effet, désignons les longueurs égales DD″, EE″, FF″ par t en les considérant comme positives si elles sont dirigées à partir de D, E, F vers le centre I. On trouve facilement pour les rayons δ, δ' des cercles V_a, U_a :

$$\delta^2 = (Q_aM_a - t)^2 + \overline{MD}^2, \quad \delta'^2 = (P_aP' - t)^2 + \overline{PE}^2;$$

l'hypothèse $t = 0$, d'après la proposition A, donne $\delta^2 + \delta'^2 = R^2$. Par suite, dans le cas général,

$$\begin{aligned} \delta^2 + \delta'^2 &= 4R^2 + 2t\,(Q_aM_a + P_aP') \\ &= 4R^2 + 2t\,(r_b + r_c + r + r_a) \\ &= 4R^2 + 2t\,(2R + r). \end{aligned}$$

Soit L l'un des points d'intersection des circonférences U_a et V_a et désignons par ρ la médiane OL du triangle SP_aQ_a. On a :

$$2\rho^2 = \delta^2 + \delta'^2 - 2R^2;$$

d'où en substituant la valeur de $\delta^2 + \delta'^2$,

$$\rho = \sqrt{R^2 + t^2 - t\,(2R + r)}.$$

Ce résultat démontre la proposition D.

Si les longueurs DD″, EE″, FF″ sont dirigées vers l'extérieur de ABC, le rayon du cercle W a pour expression $\sqrt{R^2 + t^2 + t(2R + r)}$.

Cercles exinscrits. Soient maintenant D‴, E‴, F‴ trois points qui divisent dans un même rapport les rayons I_aD_a, I_aE_a, I_aF_a du cercle exinscrit I_a. La circonférence V'_a de centre Q_a et passant par le point D‴, et la circonférence U'_a de centre P_a et passant par les points E‴ et F‴ se coupent en deux points N, N′ qui sont symétriques par rapport à la ligne des centres P_aQ_a. Cherchons la distance $ON = \rho_a$. Si l'on désigne les longueurs égales D_aD''', E_aE''', F_aF''' par t et qu'on les suppose dirigées à partir de D_a, E_a, F_a vers le centre I_a, les rayons ϵ, ϵ' des cercles V_a, U_a satisfont aux égalités

$$\epsilon^2 = (Q_aM_a + t)^2 + \overline{MD}_a^2, \quad \epsilon'^2 = (P_aP' - t)^2 + \overline{P'E}_a^2.$$

D'après la proposition A, l'hypothèse $t = 0$ donne $\epsilon^2 + \epsilon'^2 = 4R$; donc, pour une valeur quelconque de t,

$$\begin{aligned}\epsilon^2 + \epsilon'^2 &= 4R^2 + 2t^2 + 2t\,(Q_aM_a - P_aP') \\ &= 4R^2 + 2t^2 + t\,(r_b + r_c - r - r_a) \\ &= 4R^2 + 2t^2 + 2t\,(2R - r_a).\end{aligned}$$

On en déduit aisément :

$$\rho_a = \sqrt{R^2 + t^2 + t\,(2R - r_a)}.$$

Pour avoir $\rho_a = R$, ce qui fait tomber les points D''', E''', E''' sur la circonférence ABC, il faut porter sur les rayons I_aD_a, I_aE_a, I_aF_a, à partir de I_aF''' des longueurs égales à $2R$. En effet, si $r_a > 2R$, les longueurs D_aD''', E_aE''', F_aF_a sont dirigées vers le centre I_a, tandis que dans le cas de $r_a < 2R$ ces longueurs ont la direction inverse et l'on a $\rho_a = \sqrt{R^2 + t^2 - t\,(2R - r_a)}$.

Ces conclusions peuvent se rattacher à la proposition C. Car, les droites IE' et I_aE''' étant égales et parallèles, la droite $E'E'''$ passe par le milieu P_a de la distance II_a ; il en résulte $P_aE''' = P_aE'$ et par analogie $P^aF''' = P_aF'$. De même les droites ID', I_aD''', P_aQ_a étant égales et parallèles, on voit que $Q_aD'' = Q_bD$. Donc la circonférence de centre P_a et passant par E' et F' passe aussi par E'' et F''', et la circonférence de centre Q_a et passant par D' passe par D'''.

Les circonférences exinscrites I_b et I_c jouissent de propriétés semblables : il suffit de considérer les circonférences de centres P_b et Q_b ou de centres P_c et Q_c.

Deuxième Section

—

Réunion sous la présidence de M. de Hemptinne.

M. Alliaume fait la communication suivante :

Schéma d'une étude générale de l'aberration chromatique.

1. Un système optique établit une correspondance point par point entre le milieu-objet et le milieu-image, de façon que les

rayons lumineux émanés de tout point du milieu-objet et traversant le système optique concourent en un point du milieu-image. Cette correspondance théorique est troublée par l'aberration géométrique, l'aberration chromatique et les phénomènes de diffraction. Ces perturbations sont petites et, en vertu même de la définition d'une quantité petite, on peut montrer la légitimité de leur étude séparée et de l'association linéaire de leurs influences. Ici, je ferai abstraction de l'aberration géométrique et des phénomènes de diffraction pour ne m'occuper que de l'aberration chromatique.

L'espace est rapporté à un système d'axes rectangulaires dans lequel (X, Y, Z) sont les coordonnées d'un point du milieu-objet, et (x, y, z) les coordonnées d'un point du milieu-image. Si le point (X, Y, Z) est une source monochromatique, le système optique lui fait correspondre un point (x, y, z) bien déterminé : ces dernières coordonnées sont des fonctions de (X, Y, Z) dont les coefficients s'écrivent au moyen des constantes du système optique, et elles vérifient les conditions nécessaires et suffisantes à ce que, inversement, on puisse en tirer (X, Y, Z) comme fonctions uniques et bien déterminées de (x, y, z). Parmi les constantes du système optique se trouvent les indices de réfraction des divers milieux traversés par les rayons monochromatiques, et ces indices sont des fonctions de la longueur d'onde de ces rayons : soit que l'on utilise, pour ces fonctions, les formules qu'établit la théorie électromagnétique de la lumière : soit que, se limitant aux dispersions normales, on écrive ces fonctions, avec Cauchy, sous forme de séries procédant suivant les puissances paires de l'inverse de la longueur d'onde et limitées au terme du quatrième ou du sixième degré. Ainsi, si la longueur d'onde de la source immobile (X, Y, Z) varie d'une manière continue, les coordonnées (x, y, z) de l'image varient d'une manière continue ; cette image décrit une ligne et ses coordonnées sont à la fois des fonctions de (X, Y, Z) et de la longueur d'onde λ :

$$x = \varphi\,(X, Y, Z, \lambda),$$
$$y = \psi\,(X, Y, Z, \lambda),$$
$$z = \theta\,(X, Y, Z, \lambda).$$

Que maintenant du point-objet émane de la lumière blanche : y a lieu de considérer à la fois toutes les longueurs d'onde comprises entre une limite inférieure λ_a et une limite supérieure λ_b et à chaque point du milieu-objet correspond *une ligne* du milieu-image. Les équations ci-dessus sont les équations paramétriques, en λ, de cette ligne, pour

$$\lambda_a \leqslant \lambda \leqslant \lambda_b.$$

Ces limites, $(\lambda_a \lambda_b)$, sont les longueurs d'onde extrêmes du spectre lumineux ou du spectre actinique suivant que le système optique étudié est destiné à un appareil visuel ou à un appareil photographique, et la ligne-image de la source (X, Y, Z) s'appellera *ligne colorée* dans le premier cas, *ligne actinique* dans le deuxième.

Tous les points de cette ligne n'ont pas, physiquement, la même importance. Dans le spectre lumineux, il existe une radiation à laquelle l'œil présente une sensibilité maximum, et il existe, dans le spectre actinique, une radiation pour laquelle l'énergie chimique est maximum. A la longueur d'onde λ_0 de cette radiation principale correspond un point déterminé de la ligne colorée ou actinique, le *point principal* (x_0, y_0, z_0) de cette ligne. Les équations de correspondance donnent ses coordonnées en fonction de (X, Y, Z) au moyen de $\lambda = \lambda_0$, et, inversement, les mêmes équations fournissent (X, Y, Z) en fonction de (x_0, y_0, z_0). La définition physique de la radiation principale sera sans influence sur l'emploi mathématique de cette grandeur ; en principe, ce pourrait aussi bien être une longueur d'onde quelconque choisie une fois pour toutes. La détermination rigoureuse du point le plus brillant ou le plus actinique du spectre n'est donc pas du tout nécessaire à l'application de ce qui suit.

2. Pour *mesure de l'aberration chromatique* au point principal (x_0, y_0, z_0) de l'image colorée (ou actinique) du point (X, Y, Z), j'adopte la distance maximum entre deux points de cette image. Soient (λ', λ'') les longueurs d'onde définissant les points, (x', y', z') et (x'', y'', z''), de la courbe colorée dont la distance δ est maximum. La distance δ, telle que

$$\delta^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2,$$

est une fonction de (λ', λ''), et ces longueurs d'onde sont parmi celles qui satisfont aux équations

$$\frac{d\delta^2}{d\lambda'} = 0, \qquad \frac{d\delta^2}{d\lambda''} = 0.$$

ou

$$(x' - x'')\frac{dx'}{d\lambda'} + (y' - y'')\frac{dy'}{d\lambda'} + (z' - z'')\frac{dz'}{d\lambda'} = 0,$$

$$(x' - x'')\frac{dx''}{d\lambda''} + (y' - y'')\frac{dy''}{d\lambda''} + (z' - z'')\frac{dz''}{d\lambda''} = 0,$$

avec les conditions

$$\lambda_a \leqslant \lambda' \leqslant \lambda_b,$$
$$\lambda_a \leqslant \lambda'' \leqslant \lambda_b.$$

Par rapport à des axes $(\lambda', \lambda'', \delta^2)$ la fonction δ^2 de (λ', λ'') représente une surface symétrique par rapport au plan $\lambda' = \lambda''$, et tangente au plan $\delta^2 = 0$ tout le long de l'intersection de ce plan et du plan des (λ', λ''). Les solutions $\lambda' = \lambda''$ des équations ci-dessus définissent des minima. D'autre part, les inégalités auxquelles sont soumises les inconnues signifient que le maximum analytique obtenu doit, pour être acceptable, se projeter sur le plan des (λ', λ'') en un point du carré dont les sommets sont (λ_a, λ_a), (λ_b, λ_a), (λ_b, λ_b), (λ_a, λ_b), sous réserve que le maximum correspondant ne soit pas moindre que la plus grande valeur de δ^2 sur l'un des côtés de ce carré. S'il n'existe pas de pareil maximum, il faut chercher le point (λ', λ'') sur l'un des côtés du carré : ce sera le système (λ', λ_a) ou (λ_b, λ'') qui satisfera aux conditions

$$\lambda'' = \lambda_a, \quad \frac{d\delta^2}{d\lambda'} = 0, \quad \lambda_a \leqslant \lambda' \leqslant \lambda_b,$$

ou aux conditions

$$\lambda' = \lambda_b, \quad \frac{d\delta^2}{d\lambda''} = 0, \quad \lambda_a \leqslant \lambda'' \leqslant \lambda_b,$$

sous réserve que le maximum correspondant ne soit pas moindre que la plus grande valeur de δ^2 en chacun des sommets du carré. Enfin, si aucun de ces deux systèmes n'est compatible, le point demandé est l'un des sommets du carré.

3. Représentons par Δ^2 le maximum de δ^2 pour le point (X, Y, Z). Le point principal de l'image colorée de (X, Y, Z) étant (x_0, y_0, z_0), nous pouvons, pour abréger, appeler Δ^2 l'aberration

chromatique au point (x_0, y_0, z_0) du milieu-image. Δ^2 est une fonction de (X, Y, Z) ou, par conséquent, de (x_0, y_0, z_0) :

$$\Delta^2 = F(x_0, y_0, z_0).$$

Cette dernière fonction, égalée à une constante quelconque, donne l'équation d'une *surface du milieu-image, lieu des points principaux ayant la même aberration chromatique.*

On peut se donner un nombre ϵ^2 qui soit le carré d'une longueur, et chercher l'ensemble des points principaux du milieu-image *où l'aberration chromatique ne surpasse pas* ϵ^2. Ce sont les points (x_0, y_0, z_0) dont les coordonnées satisfont à l'inéquation

$$F(x_0, y_0, z_0) \leqslant \epsilon^2\,;$$

l'ensemble de ces points est limité à la surface

$$F(x_0, y_0, z_0) - \epsilon^2 = 0:$$

les points de ce domaine vérifient un *achromatisme approché* à l'approximation ϵ^2.

Les coefficients de la fonction F s'écrivent au moyen des divers paramètres du système optique. Cela étant, on peut, inversement, dans un projet de système optique, imposer aux paramètres de ce système que tous les points d'un domaine déterminé du milieu-image soient des points principaux où se vérifie un achromatisme approché, à l'approximation ϵ^2. Le domaine proposé étant défini par des inégalités de la forme

$$\begin{gathered}\alpha_1 \leqslant x_0 \leqslant \alpha_2,\\ f_1(x_0) \leqslant y_0 \leqslant f_2(x_0),\\ F_1(x_0, y_0) \leqslant z_0 \leqslant F_2(x_0, y_0);\end{gathered}$$

il suffit d'y ajouter

$$F(x_0, y_0, z_0) \leqslant \epsilon^2$$

pour avoir écrit toutes les conditions du problème. L'élimination de (x_0, y_0, z_0) entre ces inéquations laisse un certain nombre d'inégalités auxquelles devront satisfaire les paramètres demandés, et dont il y aura lieu de discuter la compatibilité.

4. L'*achromatisme du premier ordre* est, par définition, la qualité réalisée en un point principal (x_0, y_0, z_0) lorsque la ligne

colorée (ou actinique) correspondante présente *un point double* dans sa partie réelle. Construire le système optique de manière qu'il y ait un achromatisme du premier ordre au point principal (x_0, y_0, z_0), c'est donc disposer de ses paramètres de manière que le point (X, Y, Z), auquel correspond le point (x_0, y_0, z_0) pour la radiation principale λ_0, ait pour image un segment de ligne dont deux points soient confondus, à savoir les points (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) correspondant à deux longueurs d'onde (λ_1, λ_2) données à l'avance. Dans les appareils visuels on se donnera, pour λ_1 et λ_2, par exemple les longueurs d'onde de la raie jaune du sodium et de la raie verte de l'hydrogène, situées dans le voisinage, et de part et d'autre, de la radiation principale. Dans les appareils photographiques, et eu égard aux nécessités de la mise au point visuelle, on adoptera des longueurs d'onde voisines de la longueur d'onde principale du spectre lumineux, comme la raie jaune du sodium, et de la longueur d'onde principale du spectre actinique, comme la raie violette du cadmium.

Les conditions de l'achromatisme du premier ordre de l'image au point (X, Y, Z) sont :

$$\varphi\,(X, Y, Z, \lambda_1) = \varphi\,(X, Y, Z, \lambda_2),$$
$$\psi\,(X, Y, Z, \lambda_1) = \psi\,(X, Y, Z, \lambda_2),$$
$$\theta\,(X, Y, Z, \lambda_1) = \theta\,(X, Y, Z, \lambda_2).$$

Il suffit d'y considérer (X, Y, Z) comme des fonctions de (x_0, y_0, z_0) pour que ce soient les conditions d'achromatisme du premier ordre au point principal (x_0, y_0, z_0) du milieu-image. Ce sont trois équations entre les paramètres du système optique.

5. L'achromatisme au point principal (x_0, y_0, z_0) est *d'ordre n* lorsque la ligne colorée (ou actinique) correspondante présente un point multiple d'ordre $(n + 1)$. Cette ligne se replie alors en n boucles de façon que $(n + 1)$ de ses points soient confondus, à savoir les $(n + 1)$ points (x_i, y_i, z_i, $i = 1, 2,\ldots n + 1$) correspondant à $(n + 1)$ longueurs d'onde (λ_1, $\lambda_2 \ldots \lambda_{n+1}$) données à l'avance et convenablement choisies dans le spectre lumineux ou dans le spectre lumineux et actinique.

Les conditions de l'achromatisme d'ordre n de l'image au point (X, Y, Z) du milieu-objet sont :

$$\begin{aligned}
\varphi(X, Y, Z, \lambda_1) &= \varphi(X, Y, Z, \lambda_2) = \dots = \varphi(X, Y, Z, \lambda_{n+1}),\\
\psi(X, Y, Z, \lambda_1) &= \psi(X, Y, Z, \lambda_2) = \dots = \psi(X, Y, Z, \lambda_{n+1}),\\
\theta(X, Y, Z, \lambda_1) &= \theta(X, Y, Z, \lambda_2) = \dots = \theta(X, Y, Z, \lambda_{n+1}),
\end{aligned}$$

dans lesquelles on voit les conditions d'achromatisme d'ordre n au point principal (x_o, y_o, z_o) en y considérant (X, Y, Z) comme des fonctions de (x_o, y_o, z_o). Ce sont $3n$ équations entre les paramètres du système optique. Soit p le nombre de paramètres distincts dont on dispose. Si $p < 3n$, il n'est généralement pas possible de réaliser l'achromatisme d'ordre n, ne fût-ce qu'en un point (x_o, y_o, z_o). Si $p = 3n$, il se peut que les équations ci-dessus soient satisfaites par des valeurs réelles des paramètres, et il y a, dans ce cas, des valeurs déterminées des paramètres qui assurent l'achromatisme d'ordre n au seul point (x_o, y_o, z_o). Si $p > 3n$, cet achromatisme peut être assuré en plusieurs points, et il y a lieu de se poser les problèmes suivants.

a) Quelles valeurs faut-il donner aux paramètres pour qu'il y ait achromatisme d'ordre n en tous les points (considérés comme points principaux) *d'une ligne* du milieu-image définie en égalant (x_o, y_o, z_o) à des fonctions déterminées d'une seule variable indépendante t ?

Admettons que les $3n$ équations d'achromatisme sont des équations algébriques rendues entières et rationnelles en t. Soient m_1, m_2, $\cdots m_{3n}$ les degrés de ces équations. Ordonnée suivant les puissances de t, la i^{me} de ces équations renferme au plus $(m_i + 1)$ termes, et le coefficient de chacun de ceux-ci doit être nul. Le système de $3n$ équations se transforme donc dans un système d'au plus $(m_1 + 1) + (m_2 + 1) + \cdots$ équations, et le nombre de paramètres disponibles du système optique doit être au moins égal à

$$p = \Sigma\,(m_i + 1 - \mu_i) \;\dots\; (i = 1, 2, 3, \dots 3n),$$

où μ_i est le nombre de termes absents dans la i^{me} équation.

b) Quelles valeurs faut-il donner aux paramètres du système pour qu'il y ait achromatisme d'ordre n en tous les points (considérés comme points principaux) *d'une surface* du milieu-image définie en égalant $(x^o,\ y_o,\ z_o)$ à des fonctions déterminées de deux variables indépendantes $(u,\ v)$?

Si m_i est le degré de la i^{me} équation d'achromatisme par rapport aux variables $(u,\ v)$, cette i^{me} équation ordonnée par rapport à ces variables renferme au plus $\frac{(m_i+1)(m_i+2)}{2}$ termes, et le coefficient de chacun de ces termes doit être nul. Le système final renferme donc au plus $\frac{(m_1+1)(m_1+2)}{2}+\frac{(m_2+1)(m_2+2)}{2}+\cdots$ équations, et le nombre de paramètres disponibles du système optique doit être au moins égal à

$$p=\sum\left[\frac{(m_i+1)(m_i+2)}{2}-\mu_i\right] \ldots (i=1,\ 2,\ \ldots\ 3n),$$

où μ_i est le nombre de termes absents dans la i^{me} équation.

c) Enfin, pour qu'il y ait achromatisme d'ordre n dans le milieu-image tout entier, tous les termes en $(x_o,\ y_o,\ z_o)$ doivent, dans chacune des $3n$ équations d'achromatisme, avoir des coefficients nuls. Si m_i est le degré de la i^{me} de ces $3n$ équations par rapport à $(x_o,\ y_o,\ z_o)$, cette équation, ordonnée suivant les puissances de ces variables, renferme au plus $\frac{(m_i+1)(m_i+2)(m_i+3)}{6}$ termes. Le système final renferme donc au plus

$$\frac{(m_1+1)(m_1+2)(m_1+3)}{6}+\frac{(m_2+1)(m_2+2)(m_2+3)}{6}+\cdots$$

équations, et le nombre des paramètres du système optique doit être au moins égal à

$$p=\sum\left[\frac{(m_i+1)(m_i+2)(m_i+3)}{6}-\mu_i\right] \ldots (i=1,2,\ \ldots\ 3n),$$

avec la signification de μ_i définie ci-dessus.

Il est bien entendu que les solutions de ces problèmes ne sont pas applicables par le fait qu'elles sont déterminées : il faut encore, dans chaque cas particulier, examiner la réalité des racines. — De plus, tous les coefficients non identiquement nuls des variables ont été considérés comme des fonctions des paramètres : si certains de ces coefficients étaient indépendants des paramètres, leur nullité exprimerait des conditions auxquelles devraient satisfaire des données du problème, quantités dont, par hypothèse, on ne dispose pas.

Dans la pratique, on ne calculera pas tous les paramètres dont on dispose de manière à assurer un achromatisme d'un ordre aussi élevé que possible. Il sera préférable de se contenter d'un achromatisme du premier ou du deuxième ordre, et de faire usage des degrés de liberté encore disponibles de façon que l'aberration chromatique restante soit minimum dans un domaine déterminé du milieu-image.

6. L'*aberration chromatique apparente* suivant une direction donnée est ce que serait l'aberration de la ligne colorée (ou actinique) si celle-ci se réduisait à sa projection sur un plan perpendiculaire à cette direction. Nous pouvons toujours supposer que cette direction est celle de l'axe des z. Tous les problèmes abordés ci-dessus à propos de l'aberration vraie peuvent être repris à propos de l'aberration apparente, au moyen des équations paramétriques suivantes de la ligne colorée :

$$\begin{aligned} x &= \varphi(X, Y, Z, \lambda), \\ y &= \psi(X, Y, Z, \lambda), \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Les conditions de l'achromatisme apparent du premier ordre s'exprimeront au moyen de deux équations, et les conditions de l'achromatisme apparent d'ordre n au moyen de $2n$ équations entre les paramètres distincts du système optique. L'achromatisme apparent suivant une direction sera parfait (en tous les points d'une figure du milieu-image considérée comme un ensemble de points principaux) lorsque la ligne colorée se réduira à un segment rectiligne parallèle à cette direction (en chacun des points de l'ensemble proposé).

A l'occasion de cet exposé de M. Alliaume, M. Biot fait remarquer l'immense intérêt qu'il y aurait pour l'opticien-constructeur à avoir à sa disposition des formules lui permettant de calculer — approximativement au moins — les rayons de courbure des lentilles nécessaires pour exécuter un programme déterminé.

Il rappelle que le problème de la suppression des aberrations dans un instrument d'optique, c'est-à-dire le problème de la représentation point par point de l'espace-objet en l'espace-image (ou au moins de certaines portions, de certains plans de ces espaces) ne se pose pas au praticien de la façon la plus générale dont on peut l'envisager du point de vue théorique.

En fait, les systèmes dont on se sert sont presque toujours définis par des portions de sphères dont les centres sont sur une droite : l'axe du système.

On peut aller plus loin. Les instruments optiques peuvent se ranger en trois classes :

1° Les longues-vues (jumelles) et les lunettes astronomiques, où l'on emploie seulement une petite région d'un plan focal de l'objectif. Plus le grossissement fourni par l'appareil est considérable et mieux les corrections doivent être faites à autres conditions égales ; mais, en général, plus la puissance de l'instrument augmente et plus on diminue son champ. En fait on corrigera l'objectif des aberrations sphérique et chromatique au foyer et on assurera l'aplanétisme de la surface focale au voisinage du foyer.

2° Les miscroscopes, où l'on emploie, avec de forts grossissements, des faisceaux-objets très ouverts, mais une portion minime seulement d'un plan perpendiculaire à l'axe, autour de cet axe.

3° Les appareils photographiques, où le champ est souvent considérable, mais où l'image ne devant pas supporter — en général – de grossissement, peut être beaucoup moins finement corrigée que dans les autres cas. On s'efforce d'y corriger autant que possible, ou autant qu'il est nécessaire, les cinq aberrations de Seidel et l'aberration chromatique.

Sauf dans quelques cas simples (longues-vues, par exemple), les avant-projets de systèmes optiques s'établissent par tâtonnements. On calcule ensuite, par des formules trigonométriques élémentaires, la marche exacte à travers le système d'un certain nombre de rayons lumineux choisis, et l'on voit jusqu'à quel point ce système répond au programme proposé. On modifie — si c'est nécessaire — les caractéristiques portées à l'avant-projet, jusqu'à ce que l'on ait une solution acceptable.

Un des tests employés est la fameuse règle des sinus ou d'Abbe :

c'est la condition d'aplanétisme, d'importance capitale et d'application relativement facile.

En résumé, l'opticien-constructeur qui veut créer du neuf ou du meilleur doit se tenir à des tâtonnements fastidieux — sauf peut-être s'il a une longue pratique — et encore... Aussi toute formule qui permet d'éviter ou de diminuer ces tâtonnements est-elle la bienvenue. Évidemment, toute formule générale a son importance qu'il n'est pas question ici de méconnaître, mais toute formule dirigée par les considérations que nous indiquions plus haut peut prétendre à une importance beaucoup plus immédiate, en tout cas, plus rapidement efficace et aussi plus désirée et mieux accueillie par les praticiens.

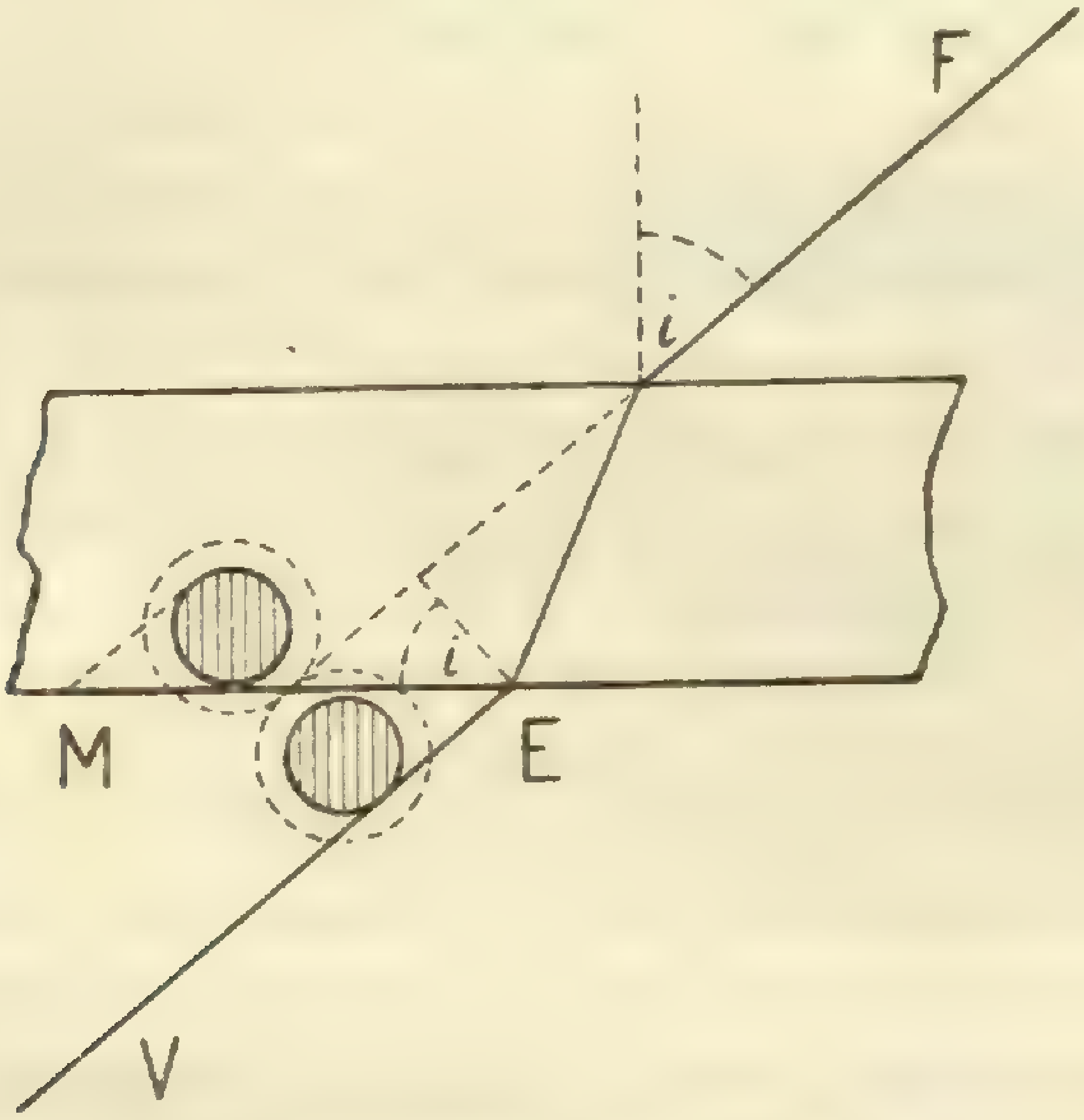
Le R. P. Dopp lit une note du R. P. Schaffers intitulée :

La mesure de l'épaisseur des lueurs sur les fils dans la décharge.

Dans mon Mémoire sur « La Conduction électrique de l'air » publié dans les ANNALES en 1914, j'ai cité les résultats que j'avais obtenus sur des fils de divers rayons à la pression atmosphérique. La méthode employée est basée sur la déviation de l'image du fil par une glace à faces parallèles. Le principe n'en est qu'indiqué dans le Mémoire. Comme les lueurs dont il s'agit n'ont jamais, à ma connaissance, été mesurées par d'autres moyens, il n'est peut-être pas sans intérêt de donner quelques précisions.

La difficulté à surmonter est dans l'extrême faiblesse de la lueur, d'où résulte l'impossibilité de constater sa coïncidence avec des graduations ou repères quelconques. Si ces repères sont éclairés, la lueur ne se distingue plus ; s'ils ne le sont pas, ils demeurent eux-mêmes totalement invisibles. C'est ce qui m'a fait penser à tenter la mesure en ne me servant dans l'obscurité que de la lueur elle-même. Pour cela, son image est déplacée latéralement, par une glace de 3 ou 4 cm. de hauteur, d'une quantité égale à sa largeur, de manière que le bord gauche, par exemple, de l'image déviée prolonge le bord droit de la lueur aperçue directement au-dessus et au-dessous de la glace. Cette coïncidence est obtenue en faisant varier l'inclinaison de la glace par rapport à la droite qui joint l'œil V au fil F.

Le réglage fait, on éclaire l'appareil, et on lit, sur la graduation tracée sur la face antérieure de la lame inclinée, la largeur totale ME couverte par l'image déviée du fil et le prolongement de l'image vue directement. ME est, évidemment, la valeur apparente du double du diamètre d du fil augmenté de deux fois l'épaisseur de la gaine lumineuse e. Le diamètre d étant exactement connu, cette dernière peut s'en déduire aisément, en remarquant que l'angle de ME avec le plan perpendiculaire aux rayons visuels utilisés, qui sont parallèles à très peu de chose près, n'est autre que l'angle d'incidence i. Enfin, il ne faut pas perdre de vue que la graduation doit être rapportée à la distance du fil. Elle est donc à multiplier par le rapport R des distances à l'œil du fil et de la graduation. Il vient finalement :



$$2e = \text{R. ME.} \cos i - 2d.$$

En pratique, il a paru préférable de laisser la glace immobile, et de faire glisser, parallèlement et à une distance connue, le support qui portait l'œilleton de visée. En combinant le glissement latéral avec la distance prise normalement aux faces, on obtenait la tangente de l'angle i. Remarquons que ni l'angle de réfraction, ni l'épaisseur de la lame n'ont besoin d'être connus.

Il va sans dire que les résultats ne peuvent être qu'approchés, les bords d'une lueur aussi faible étant mal définis, et l'irradiation jouant nécessairement son rôle dans l'appréciation du prolongement de ces bords. Ils sont néanmoins assez constants pour donner au moins l'ordre de grandeur de l'épaisseur cherchée, qui était totalement inconnue jusqu'alors. Les premières mesures, relatives à l'influence de rayon du fil sous la pression atmosphérique, ont paru dans le Mémoire rappelé au début de cette Note : elles donnent une épaisseur moyenne de 0.06 cm., indépendante du rayon pour les valeurs de celui-ci comprises entre 0.00127 cm. et 0.0521 cm. Dans la partie de mon travail qui n'a pas encore été publiée, j'ai examiné l'effet des changements de pression, sur un fil de 0.0099 cm., étudié dans un cylindre de verre couvert d'un réseau de bandes étroites d'étain. Là encore l'épaisseur a été trouvée constante depuis la pression atmosphérique jusqu'à 4 cm. de mercure environ. Pour des pressions plus basses encore, l'épaisseur de la lueur augmente lentement.

Troisième Section

Conformément aux rapports de M. De Wildeman, et de M. le chanoine Grégoire, le mémoire de M. l'abbé A. Carpentier : *Notes bryologiques et lichénologiques sur les environs d'Avesnes* (Nord) paraîtra dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE (2ᵉ partie) (¹).

M. le curé Claerhout présente des considérations sur les *Colonies frisonnes dans la plaine maritime belge.*

Le fait ethnographique de l'établissement des colonies frisonnes dans la plaine maritime belge est intimement lié à l'histoire de la formation de cette région côtière (²).

On sait qu'à la fin de l'époque romaine se produisit une grande

---

(¹) Cfr. pp. 129 et suiv.

(²) A. de Lapparent. *Traité de Géologie*, 5ᵉ édition, Paris, 1906. T. I, p. 576. L'auteur expose les diverses phases de l'histoire de la formation de la plaine maritime. A lire également : A. Rutot, *Sur les antiquités découvertes dans la partie belge de la plaine maritime*. Bruxelles, 1903. — Pour l'étude de la toponymie, voir les formes anciennes dans le supplément de BIEKORF. Bruges, 1903 et Johan Winkler, *Friesche Naamlijst*. Leeuwarden, 1898. On trouvera dans cette liste alphabétique tous les prénoms frisons que nous citons.

invasion marine que l'on peut attribuer à la violence des marées qui rompirent les dunes situées plus au large que le rivage actuel. Cet envahissement amena un dépôt d'alluvions au-dessus du sol habité par les Belgo-romains, et ce mouvement qui tendait à créer un nouveau sol au-dessus de l'ancien et à former un nouveau cordon littoral fut encore accéléré par l'érection de digues. Ces nouvelles terres conquises sur l'empiètement marin furent occupées par des colonies frisonnes : la toponymie et le cachet frison de certaines habitations rurales fournissent deux preuves indéniables de l'établissement de ces colonies.

Les vocables topographiques frisons que nous pouvons signaler sont les suivants : Snaeskerke, ancienne forme : *Snelgerskerke,* église bâtie sur le domaine du seigneur frison : Snelger ; — Stuyvekenskerke, forme ancienne : *Stuwekinskerke,* église du Frison Stuwekin. Stuwekin est le diminutif du prénom frison Stuwe ; — Zuyenkerke, ancienne forme : *Suwenkerke,* église du Frison Suwe. Il y a aussi des étymologies douteuses : Uytkerke peut être l'église du Frison Ute et Oostkerke, autrefois *Ooskerke*, sera peut-être l'église du Frison Ose, car Ute et Ose sont des prénoms frisons. Jabbeke, ancienne forme : *Jatbeke,* du verbe frison *iata*, désigne le ruisseau qui déverse ses eaux et nous fournit l'équivalent frison de l'allemand *Giessbach :* ce vocable intéressant nous rappelle la nappe des eaux souterraines dont on relève la présence entre Ostende et Bruges et qui alimente les sources et les étangs de la région. Ravensyde et Walravensyde est la rade du Frison appelé Raven ou Walraven, endroit situé sur la côte et encore dénommé ainsi entre Ostende et Middelkerke. Mannekensvere, traduit sous l'influence de l'étymologie populaire par *trajectum viruli,* ancienne forme *Mannekinswerva :* habitat rural du Frison Mannekin. Ce nom est un diminutif du prénom frison Manne. Il y avait des granges frisonnes dans cette commune avant la guerre. La guerre a également détruit à Leffinghe, la ferme appelée *Fleriskot* avec sa belle grange frisonne. Le vocable Fleriskot signifie la maison du Frison Flere.

Quelques granges frisonnes de la plaine maritime viennent d'être rangées parmi les monuments. C'est la Société scientifique qui les a tirées de l'oubli et sauvées de la destruction. Il y a quarante ans que nous avions attiré l'attention sur ces monuments si intéressants au point de vue ethnographique. On ferait bien de ranger également parmi les monuments les deux ou trois fermes, dont non seulement les granges mais tous les bâtiments relèvent du type frison et portent le cachet de leur origine frisonne.

Au cours de l'échange de vues auquel donne lieu la communication de M. le curé Claerhout, la Section demande que le Conseil de la Société scientifique, transmette à la Commission des sites un vœu tendant à ranger parmi les monuments historiques les fermes du type frison, qui existent encore dans la Flandre occidentale.

La *Description de quelques Chironomides exotiques* fait l'objet du travail ci-dessous de M. l'abbé J. J. Kieffer (Bitche).

I. — CERATOPOGONINAE

Culicoides polystictus n. sp. ♀. Brun noir. Tête à peine transversale. Yeux glabres, amincis en haut, séparés de leur demi-largeur terminale. Trompe roux brun, aussi longue que la hauteur de la tête, à pièces dentelées et chitineuses. Article 1^er^ du palpe subcylindrique, quatre fois aussi long que gros ; 2^e^ aussi long et un peu plus gros que le 1^er^, plus long que les deux suivants réunis. Antenne jaune brunâtre, articles 3-13 graduellement et très faiblement allongés, les premiers de moitié plus longs que gros, les derniers (8-13) deux fois, tous graduellement un peu amincis au tiers distal, 2-9 avec un verticille basal de 4 ou 5 poils, dont un hyalin, arqué au tiers distal et presque deux fois aussi long que les autres, ceux-ci dépassant le milieu de l'article suivant ; soies sensorielles petites ; articles 10-14 ensemble d'un quart plus courts que 2-9 réunis, à poils sans ordre et beaucoup plus courts que les verticilles des articles 2-9, leur tiers distal à quelques poils très courts et cylindriques ; 14^e^ article sans stylet, de moitié plus long que le 13^e^. Thorax mat. Balanciers blancs. Aile enfumée, faiblement lobée, à soies microscopiques et parsemée de soies plus longues et caduques, avec deux taches d'un brun noir sur son bord antérieur et trois rangées transversales de taches circulaires blanches ; la 1^e^ tache noire est transversale, proximale de la nervure transversale, joignant le bord antérieur à la tige de la posticale ; la 2ᵉ, longitudinale, distale de la nervure transversale, occupant la 2ᵉ cellule radiale et les deux derniers tiers de la 1ᵉ, linéaire et deux fois aussi longue que large ; la 1ᵉ rangée transversale formée de quatre taches blanches, dont la 1ᵉ sur le bord antérieur, la 2ᵉ couvrant la nervure transversale, la 3ᵉ dans la cellule médiane, la 4ᵉ dans la cellule anale ; la 2ᵉ rangée avec la 1ᵉ tache sur le bord antérieur, contre l'extrémité de la nervure cubitale, la 2ᵉ dans la cellule cubitale, la 3ᵉ dans la cellule discoïdale antérieure, la 4ᵉ au milieu de la cellule posticale ; la 3ᵉ rangée, située un peu distalement de l'extrémité du rameau antérieur de la posticale, formée de trois taches, dont la 1ᵉ dans la cellule cubitale, la 2ᵉ dans la cellule discoïdale antérieure, la 3ᵉ dans la cellule discoïdale inférieure sur le bord postérieur ; les taches de cette rangée sont éloignées du bord distal de l'aile du double de leur diamètre, ce qui distingue cette espèce de **C. alboguttatus** K. de Formose ; une autre petite tache est à la base alaire ; nervures brunes, la transversale blanche ; cubitale dépassant un peu le milieu, formant un huit avec la radiale, les deux cellules très étroites ; discoïdale brièvement pétiolée, sa bifurcation un peu proximale de celle de la posticale, celle-ci sous la base de la 2ᵉ cellule radiale, rameau antérieur fortement arqué. Pattes jaune brunâtre, grêles, sans longs poils, 4ᵉ article tarsal un peu plus court que le 5ᵉ, un peu obliquement tronqué, crochets à soies basales. Abdomen brun ou brunâtre, cerci blancs. — L. 1,5 mm.

Paraguay (14 ♀). Cette espèce, et les suivantes, m'ont été communiquées par M. Schenkling.

II. — TANYPODINAE

Procladius brevipalpis n. sp. ♂ Jaune brunâtre. Yeux très amincis en haut, où ils n'ont que le quart ou tiers de la largeur basale, séparés de deux fois leur largeur terminale. Bouche petite, ce qui est la règle générale pour les Chironomides à palpes courts. Palpe blanchâtre, court et mince, de 3 ou 4 articles, dont le 1ᵉʳ (ou le support du palpe ?) pas plus long que le gros, le 2ᵉ (ou 1ᵉʳ article du palpe ?) de moitié plus long que gros, le suivant 2 1/2 fois aussi long que gros, un peu plus court que le dernier. Antenne brune, scape noir, 15ᵉ article brun noir, aminci au bout, 2ᵉ deux fois le 3ᵉ, 3-13 transversaux, graduellement un peu plus longs, 14ᵉ deux fois un tiers plus long que 2-13 réunis, panache gris. Thorax pruineux de gris, trois bandes raccourcies, metanotum et mesosternum brun noir, la bande médiane divisée au tiers postérieur. Balanciers blancs. Aile atteignant le dernier tiers de l'abdomen, finement ponctuée, glabre, hyaline ou blanchâtre, à lobe ressortant proximalement en demi-cercle, tachetée de brun-noir et de gris ; les taches brun-noir sont : 1° sur la transversale antérieure et la base de la cubitale, en forme de V ; 2° une très petite sur la bifurcation de la radiale ; 3° une rangée longitudinale de quatre taches ellipsoïdales dans la cellule cubitale ; 4° une sur le milieu de la tige de la discoïdale ; les taches grises sont : 1° deux dans la cellule cubitale, sous les deux taches noires, la distale la plus grande de toutes ; 2° trois dans la cellule discoïdale, dont deux alignées dans la moitié distale et une peu dictincte, au tiers proximal ; 3° un trait sur la partie distale du rameau inférieur de la posticale, qui est très courbé au bout ; 4° un point dans la moitié distale de la cellule posticale ; 5° six dans la cellule anale ; cubitale assez longuement dépassée par la costale ; transversale antérieure oblique, plus courte que la postérieure et séparée d'elle par sa longueur, la postérieure perpendiculaire ; tige de la posticale presque deux fois aussi longue que la transversale postérieure, égalant le quart du rameau postérieur. Pattes jaunes, anneau avant l'extrémité des fémurs, un près de la base des tibias, extrémité des tibias et des articles tarsaux, bruns ; métatarse antérieur égalant le tibia, double du 2ᵉ article, 2-5 graduellement raccourcis, cylindriques ; tarse antérieur barbu, ses poils 5-6 fois aussi longs que sa grosseur ; empodium à peine visible, crochets noirs et assez grands. Abdomen deux fois aussi long que le reste du corps, dessus et dessous à larges bandes transversales brunes. Pince brunâtre, articles terminaux blancs. — L. 5 mm. Paraguay, 24 août.

III. — CHIRONOMINAE

Cryptochironomus lacteipennis n. sp. ♂ Jaune. Yeux amincis en haut et rapprochés. Palpes longs. Antenne et panache brunâtres ; 2ᵉ article deux fois aussi long que le 3ᵉ, 3-11 un peu transversaux, 12ᵉ deux fois aussi long que 2-11 réunis. Mesonotum blanchâtre, mat, trois bandes raccourcies, metanotum et mesosternum fauves. Balanciers blancs. Aile blanche, atteignant l'extrémité de l'abdomen, lobée, nervures pâles, cubitale presque double de la radiale, droite, plus éloignée de la pointe alaire que la discoïdale, transversale petite, bifurcation de la posticale distale. Pattes blanchâtres, tibia et tarse antérieurs obscurcis, sauf la base du métatarse, fémur antérieur de moitié plus long que le tibia, celui-ci à écaille transversale et arrondie, tarse non barbu, métatarse presque deux fois le tibia, 2e article égal au tibia, 2-5 graduellement raccourcis, 4e presque deux fois le 5e, pulvilles et crochets comme chez *Chironomus* ; peignes des 4 tibias postérieurs occupant les trois quarts du pourtour, les deux éperons courts. Abdomen vert, plus sombre en arrière, mince, tergites 2-5 allongés, 6e et 7e élargis. Pince jaunâtre, articles terminaux, pointe de la lamelle et appendices supérieurs blancs ; appendices inférieurs nuls ; les supérieurs sortant près de l'extrémité des articles basaux, glabres, arqués, très minces, presque filiformes et dépassant à peine le tiers des articles terminaux ; ceux-ci plus longs que les basaux et un peu plus minces, pubescents partout, tiers basal droit, les deux autres tiers arqués, munis au bord médial de cils alignés, fins, mais beaucoup plus courts que les longs poils épars sur le côté latéral de la moitié proximale de l'article ; extrémité subitement amincie en un petit crochet courbé en dedans ; lamelle triangulaire, terminée par une pointe linéaire et très longue. — L. 2.5 mm. — Formose : Taihoku, 7, XI.

Nilodorum heterochirus n. sp. ♂ Jaune. Yeux séparés de 1 1/2 fois leur largeur terminale, partie amincie deux fois aussi longue que large. Bouche petite, triangulaire, pas plus longue que large. Palpes courts, minces, de trois articles, sans compter le support ; 1-3 graduellement plus courts et plus minces, le premier presque trois fois aussi long que gros, le 3e un peu plus de trois fois, à deux poils distaux médiocres, les autres poils des tarses plus courts que la grosseur des articles. Antenne et panache fauves, articles 3-11 plus de quatre fois aussi gros que longs, 12e cinq fois aussi long que 2-11 réunis. Mesonotum pruineux de gris, comme le scutellum et les pleures, à trois bandes raccourcies jaune brun, la médiane d'un jaune plus clair, prolongé par une ligne jaune brun jusqu'au bord postérieur du mesonotum. Aile hyaline, atteignant le 6e tergite, transversale noire et petite, les autres nervures jaunes, cubitale aboutissant près de la pointe alaire, bifurcation de la posticale sous la transversale. Tibia antérieur à écaille obtuse, aussi longue que large ; métatarse d'un cinquième plus long que le tibia, deux fois le 2e article, son tiers distal et les deux articles suivants à poils longs, très denses, étalés à angle droit, 2e et 3e articles subégaux, 4e d'un tiers plus long que le 3e, plus de 2 fois le 5e ; pulvilles très larges, aussi longs que l'empodium, atteignant l'extrémité des crochets ; quatre tibias postérieurs à peignes occupant les trois quarts du pourtour, les deux éperons courts. Tergites 2-7 allongés, bord postérieur des tergites brun, le dernier rectangulaire. Pince jaune, appendices inférieurs brun noir, dépassant peu les articles basaux et n'ayant que le tiers de leur largeur, à deux poils distaux longs et gros, les autres poils dorsaux peu longs ; appendices supérieurs blanchâtres, un peu plus larges que les inférieurs, sortant près de la base de l'article et n'en atteignant pas l'extrémité, pubescents, en ellipse allongée ; articles terminaux plus courts que les basaux et un peu moins larges, graduellement un peu amincis distalement, où ils sont faiblement arqués, pubescents, tout le bord médial assez densément cilié, sauf l'extrême base ; lamelle à pointe courte et large. — L. 9-10 mm. — Ile de la Trinité (3♂).

Chironomus pilosidens n. sp. ♂. Jaunâtre. Yeux très amincis en haut, séparés de 1 1/2 fois leur largeur terminale. Lobes frontaux deux fois aussi longs que gros, à poils aussi longs que la grosseur des lobes. Palpes bruns, 1er article pas plus long que gros, 2e égal au 3e, quatre fois aussi long que gros, 4e égalant presque les deux précédents réunis. Antenne et panache fauves, articles 3-11 deux fois aussi gros que longs, 12e trois fois aussi long que 2-11 réunis. Thorax pruineux ; trois bandes raccourcies du mesonotum, dont la médiane est reliée au bord postérieur par une ligne, metanotum et mesosternum fauves. Aile hyaline, atteignant le milieu du 6e tergite, transversale et base de la cubitale noires, cubitale proche de la pointe alaire, bifurcation de la posticale sous la transversale. Patte antérieure non barbue, tibia à écaille obtuse, aussi longue que large ; métatarse presque deux fois aussi long que le tibia, 2-4 graduellement raccourcis, le 4e deux fois le 5e, qui est huit fois aussi long que gros, pulvilles larges et atteignant le milieu des crochets ; quatre tibias postérieurs à 2 éperons courts, peignes occupant les 3/4 ou les 4/5 du pourtour. Les six premiers tergites avec une bande longitudinale brune, les suivants un peu assombris comme la pince ; 2-7 allongés, 8e arrondi en avant. Articles terminaux de la pince au moins aussi longs et un peu moins larges que les basaux, leur moitié distale glabre, graduellement amincie, offrant au côté médial, avant l'extrémité, une rangée longitudinale de 5 ou 6 grosses soies rigides et aussi longues que l'épaisseur correspondante ; côté latéral de l'article arqué, côté médial presque droit ; appendice supérieur sortant près de la base de l'article basai, dont il atteint l'extrémité, presque droit, glabre, très mince, la moitié distale un peu plus large, arrondie à l'extrémité ; appendice inférieur dépassant le milieu de l'article terminal, conformé comme d'ordinaire ; lamelle graduellement amincie en une pointe courte. — L. 7.5 mm. — Paraguay, 24. VIII. 1915 (2 ♂).

Chironomus despectus Kieff var.

♂. Jaune brunâtre. Yeux très amincis en haut, séparés de 1 1/2 fois leur largeur terminale. Palpes longs ; 1er article court, 2e quatre fois aussi long que gros, 3e cinq fois, 4e le plus long. Antenne brunâtre, scape jaune, articles 3-11 un peu transversaux, pas deux fois aussi gros que longs, 12e deux fois et demie aussi long que 2-11 réunis, panache gris. Metanotum, trois bandes raccourcies du mesonotum, dont la médiane prolongée par une ligne jusqu'au bord postérieur, et mesosternum bruns. Balanciers blancs. Aile hyaline, atteignant le 6e tergite, transversale oblique, pas plus sombre que les autres nervures, cubitale atteignant presque la pointe alaire, bifurcation sous la transversale. Patte antérieure brisée ; les quatre tibias postérieurs à deux éperons courts, pulvilles atteignant le milieu des crochets. Tergites bruns, sauf le tiers postérieur, 2-7 allongés, 8e rectangulaire. Pince brune, conformée comme chez le type. — L. 4,5-5 mm. — Paraguay, 18. VII-1915 (5 ♂).

M. l'abbé J. J. Kieffer s'occupe aussi de Chironomides recueillis aux environs de Liban (Courlande), par M. le docteur Siebert. Cette étude prendra place parmi les mémoires de la Société scientifique.

Le Secrétaire de la Section fait part d'un vœu transmis par le Secrétariat général de la Société scientifique, au sujet de la publication des notices et mémoires présentés par les membres.

La situation de la Société est délicate ; ses ressources limitées ; il importe de les ménager. La IIIe Section a conscience des difficultés budgétaires actuelles, mais elle se dit aussi qu'il faut publier raisonnablement, si l'on ne veut pas déchoir. Restreindre davantage les publications, c'est inviter les membres à être parcimonieux de travaux originaux. Or ce sont ceux-ci, et ceux-ci seuls, qui font le renom de la Société scientifique, et lui vaudront de nouvelles et précieuses adhésions.

M. Renier présente une série d'observations sur la géothermie de la Belgique (1).

M. le Comte de Limburg-Stirum, et M. le curé Claerhout s'occupent de la question mise à l'ordre du jour de la Section, à la demande de M. G. Lemoine : *La baguette des sourciers.* Il ne semble guère que la science soit à la base de la recherche de ces derniers.

M. Proost rappelle la note qu'il a publiée l'an dernier dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES sur les *vitamines,* et le *pain complet.*

La *Libre Belgique* d'hier, dit-il, publie à son tour après d'autres journaux une consultation d'un docteur à ce sujet concluant à la suppression du pain *blanc,* soi-disant plus indigeste que le pain *gris.*

N'est-ce pas oublier quelque peu les expériences de feu Aimé Girard à ce sujet, prouvant que le pain gris contient des ferments nuisibles et des enveloppes indigestes pour tous les estomacs délicats ; ce qui domine dans nos villes ?

C'est pourquoi, à Paris, comme à Bruxelles, les boulangers se sont remis à vendre du pain *blanc* pour satisfaire leurs clients. A Paris, la grande usine allemande de la Villette a dû fermer avant la guerre, malgré sa coûteuse et belle installation pour fabriquer du pain complet *(secundum artem) (pain gris)*.

---

(1) Ce travail sera publié *in extenso* dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ GÉOLOGIQUE DE BELGIQUE, t. XXII.

Les médecins et les chimistes admettent trop facilement les théories modernes sur les *vitamines qui sont détruites par la chaleur, quand elles existent.* « *In medio virtus* ».

M. De Wildeman consacre la note préliminaire ci-dessous à *Deux Sterculiacées africaines nouvelles*, plantes intéressantes de la flore de notre Congo ; toutes deux de la zone forestière de l'Ituri, relativement peu connue encore, et des récoltes du Dr J. Bequaert, un des meilleurs herborisateurs africains.

La première des espèces que nous signalons est probablement plus répandue qu'on pourrait le croire, elle aura sans doute été confondue avec l'espèce voisine, le *S. Tragacantha* Lindl.

Quant au *Cola*, il serait très intéressant d'en posséder des échantillons fructifères ; peut-être pourrait-il donner, comme certains de ses congénères, des fruits utilisables.

Sterculia Bequaerti *De Wild.* n. sp. (1).

Arbre atteignant 30 m. de hauteur, ramuscules florifères atteignant env. 7-8 mm. d'épaisseur, écorce brunâtre à l'état sec, irrégulièrement fissurée, feuilles pétiolées à pétiole subcylindrique, à poils étoilés, épars, de 3.5 cm. de long, à limbe obovale ou ovale, très courtement, plus ou moins brusquement et obtusément acuminé, cordé à la base, à poils étoilés, épars sur le limbe et les nervures des deux faces, à 7 nervures basilaires et à 10-12 nervures latérales principales au-dessus des basilaires de chaque côté de la nervure médiane ; nervures plus fortement en relief sur la face inférieure que sur la face supérieure ; limbe de 11-16 cm. de long et 8-13 cm. de large, coriace, à stipules rapidement caduques ; inflorescences en panicules axillaires pédonculées, à pédoncule ou velu-brunâtre, à poils étoilés, pouvant atteindre 10 cm. de long ; fleurs à pédicelle velu, brunâtre, pouvant atteindre 5 mm. env. de long, calice des fleurs mâles campanulé, à lobes velus intérieurement et extérieurement de 4-5 mm. de long, fleurs mâles rapidement caduques, androcée d'environ 1,5 mm. de long ; fleurs femelles à calice velu extérieurement, à ovaire subglobuleux, velu à ovules peu nombreux, fleurs souvent transformées en galles, renfermant une larve, fruits en follicules courtement stipités, ellipsoïdes, légèrement cuspidés, courtement tomenteux extérieurement, au nombre de 2 à 4 ; graines noirâtres au nombre de 1-4 par fruit, celui-ci s'ouvrant à maturité et formant une coupe atteignant 7 cm. de large sur 4-7 cm. de long, courtement tomenteux-brunâtre à l'extérieur, densément pubescent intérieurement.

---

(1) *Sterculia Bequaerti ;* Arbor 30 m. alta, ramusculis floriferis 7-8 cm. longis, cortice brunneo et fissurato ; foliis petiolatis, lamina 11-16 cm. longa et 8-13 cm. lata, coricea, obovato vel ovato, abrupte, breviter et obtuse acuminata, nervis basilaribus 7 ; nervis lateralibus 1 utrinque 10-12 ; inflorescentiis paniculatis, axillaribus, pedunculatis ; floribus pedicellatis, pedicello velutino, masculis et femineis extus et intus velutinis ; folliculis stipitalis extus brunneis et breviter tomentosis, intus dense pubescentibus, seminibus 2-4, nigrescentibus.

Penghe, 9 février 1914 (J. Bequaert, n. 2384. — Forêt aux bords de l'Ituri ; arbre de 30 m.).

Obs. — Cet arbre dont nous ne connaissons pas la valeur économique, ni la distribution, est probablement utilisable comme la plupart des espèces du groupe du même genre.

La plante nouvelle, qui nous paraît devoir être assez répandue dans le Congo, est affine du *Sterculia Tragacantha* Lindl. qui a été considéré comme une essence à bois peu dur convenant pour la fabrication de la pâte à papier.

Le *St. Bequaerti* se distingue très aisément du *St. Tragacantha* par ses feuilles à limbe nettement cordé à la base et muni de 7 nervures basilaires ; le nombre de nervures latérales présentes de chaque côté de la nervure centrale est également plus considérable chez le *S. Bequaerti* que chez le *S. Tragacantha*.

Il ne nous a pas été possible d'examiner de nombreuses fleurs, la plupart étaient tombées et beaucoup, parmi les persistantes, étaient occupées par un insecte.

Cola Bequaerti. De Wild. n. sp. (¹).

Arbre de 30 m. de hauteur à rameaux subcylindrique, glabres, à écorce fissurée irrégulièrement à l'état sec ; feuilles petiolées réunies vers le sommet des branches à pétiole subcylindrique, velu à l'état jeune, de 0,7-16,5 cm. de

---

(¹) *Cola Bequaerti* ; Arbor elata usque 30 m. alta, ramis subcylindricis, glabris, cortice brunneo ; foliis petiolatis, petiolo 0,7-16,5 cm. longo, lamina oblonga vel obovata, 5-40 cm. longa et 1,8-17 cm. lata, supra et infra glabra, basi 3-nervia, nervis laleralibus I utrinque circ. 8 ; floribus in axillis foliorum delapsorum nascentibus, usque 7 cm. longis, 5-lobatis, lobis usque 35 mm. longis ; flore masculo androceo uniseriato, ope androgynophori 10-16 mm. longo sustento ; flore femineo ovario breviter stipitato, subglobuloso, pentamero, stigmatis 5 reflexis.

long ; limbe oblong ou obovale, de 5-40 cm. de long et 1,8-17 cm. de large, courtement acuminé au sommet, cunéiforme ou arrondi à la base, glabre sur les deux faces, à 3 nervures basilaires ; nervures latérales principales au nombre de env. 8 de chaque côté de la nervure médiane, anastomosées en arc vers le bord avec des nervures secondaires. Stipules rapidement caduques ; fleurs vertes, généralement sous les feuilles actuelles, périanthe à 5 lobes recourbés extérieurement, d'un rouge pourpre ou brunâtre vernissé intérieurement, les mâles à pédicelle atteignant 30 mm. de long et de 3 mm. de diamètre, à calice campanulé atteignant 7 cm. de long, divisé en 5 lobes atteignant 35 mm. de profondeur, glabres extérieurement et intérieurement velus sur les bords et sur les parties recouvertes dans le bouton, à androcée à loges polliniques unisériées, formant des thèques au nombre de plus de 15 portées au sommet d'un androgynophore grêle, glabre, atteignant 10-15 mm. de long, thèques de 4-5 mm. laissant au centre une plage velue plus ou moins proéminente, reste de l'ovaire ; fleurs femelles généralement un peu plus petites, à ovaire sub-globuleux, tomenteux, très courtement stipité, pentamère, à 5 stigmates cornus, réfléchis, entouré à la base par une rangée de loges polliniques.

Penghe, 30 janvier 1914 (J. Bequaert, n. 2197. — Forêt aux bords de l'Ituri ; arbre de 30 m., à fleurs vertes, à 5 dents recourbées vers l'extérieur d'un brun rougeâtre foncé, vernissé); Penghe, 6 février 1914 (J. Bequaert, n. 2343. — Forêt aux bords de l'Ituri. Arbre à fleurs vertes, les dents pourpre-brunâtre).

Obs. — Cette espèce très développée se caractérise par ses grandes fleurs naissant sous les feuilles présentes, à l'aisselle de feuilles tombées ; elle appartient, comme le montre la description ci-dessus, au sous-genre *Haplocola* K. Schum. et se range dans le voisinage des *C. clavata* Mast., *micrantha* K. Schum., *flavovelutina* K. Schum. dont elle se différencie par les dimensions de ses fleurs, la grandeur et le nombre des thèques.

Au sujet des Forêts tropicales de l'Afrique et de leur exploitation, M. De Wildeman fait ressortir, en s'appuyant sur des cartes et sur divers travaux de forestiers belges et étrangers, l'état défectueux de nos connaissances relatives à la constitution des forêts africaines et à leur dispersion. Il estime que la forêt africaine tropicale est moins étendue qu'on le suppose généralement, qu'elle est de nos jours vigoureusement entamée par le noir, et pas assez conservée par le blanc, qu'il serait grand temps pour l'avenir de notre colonie elle-même, que son exploitation fût sérieusement réglementée.

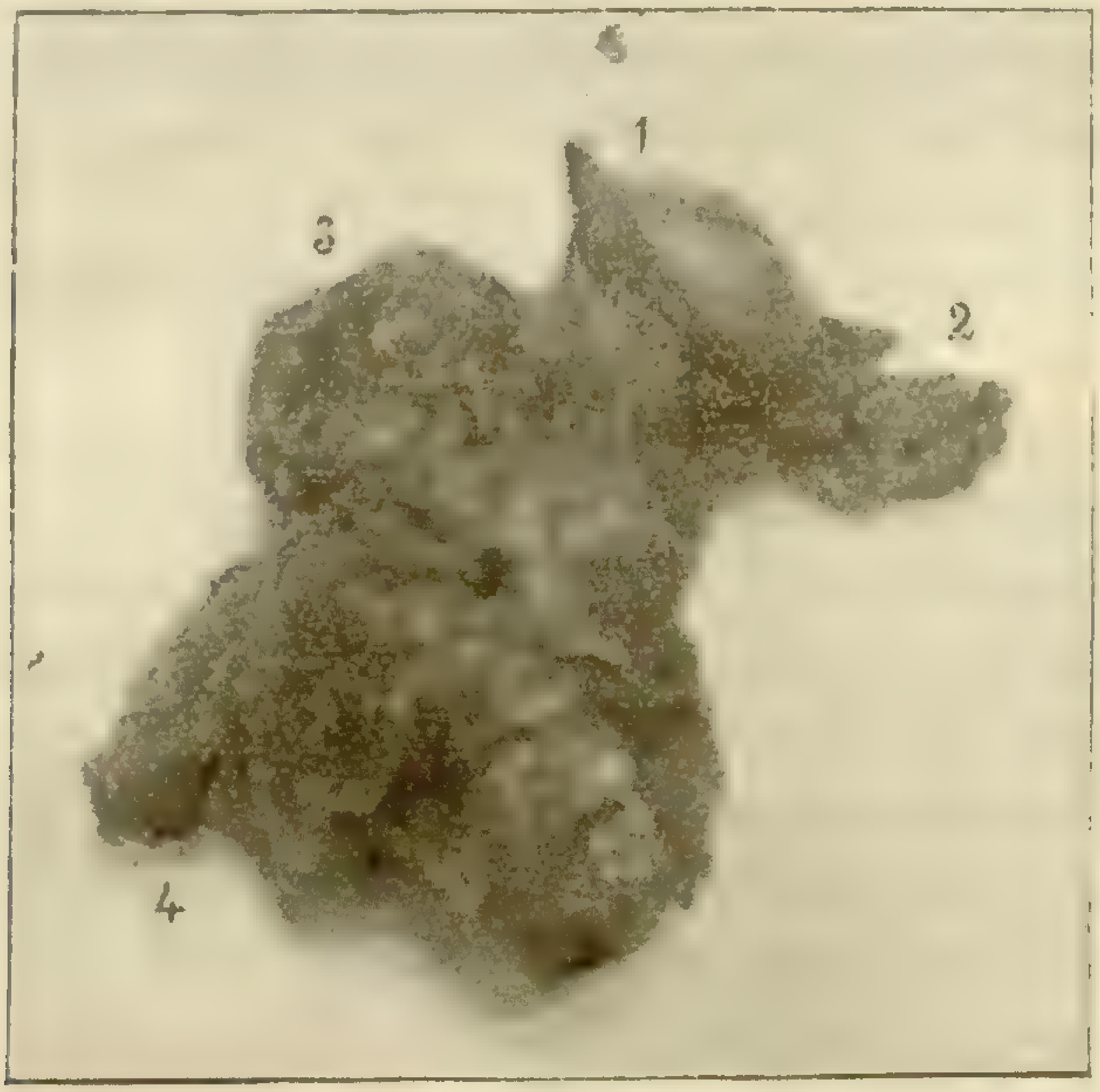
Quatrième Section

La quatrième Section s'est réunie à 4 heures, sous la présidence de M. le Dr Goris. Monsieur Goris fait la communication suivante :

Un cas de myxo-lipome pharyngo-épiglottique opéré par un procédé spécial de pharyngotomie thyro-hyoïdienne.

Messieurs,

J'ai l'honneur de vous présenter une tumeur assez volumineuse de l'hypopharynx que j'ai pu enlever par un procédé de pharyngotomie antéro-latérale, et dont le temps essentiel est la résection sous-périostée de la moitié de l'os hyoïde. Il s'agit d'une tumeur qui gênait considérablement la respiration et la déglutition, et qui s'était développée si insidieusement, que le patient ne faisait remonter l'origine de ses désagréments qu'à quatre mois. Elle se présentait à l'examen laryngoscopique comme une masse arrondie occupant le bord droit de l'épiglotte.



Le toucher nous renseignait plus complètement : la tumeur visible se trouvait dans l'épaisseur du ligament glosso-épiglottique qui la reliait d'un côté à l'épiglotte, d'autre part à une seconde masse beaucoup plus volumineuse, ovoïde, assez mobile, occupant la partie latérale du pharynx, suivant les mouvements de la déglutition et ayant fini par rendre impossible le passage du bol alimentaire.

L'âge du patient, 58 ans, me portait à faire des réserves sur la bénignité de l'affection que je considérais, à cause de sa position latéro-pharyngée, de sa résistance, de sa mobilité, non comme un carcinome, mais comme un sarcome d'origine lymphatique.

L'opération s'imposait à cause des menaces de suffocation, et de l'inanition vers laquelle le malade marchait à grands pas.

La mobilité et l'accessibilité de la tumeur me firent écarter d'emblée comme procédé opératoire la pharyngotomie verticale, dont l'incision part de l'angle de la mâchoire, et descend le long du sterno-mastoïdien. Cette incision ouvre la loge profonde du cou, et doit être réservée aux tumeurs faisant réellement corps avec le pharynx et les amygdales, et où la pharyngectomie fait suite à la pharyngotomie (1).

Restait le choix entre les diverses pharyngotomies médianes et latéro-médianes.

La pharyngotomie sous-hyoïdienne de Langenbeck et Malgaigne, aborde l'épiglotte sur la ligne médiane à travers la membrane hyoïdienne. Elle a l'avantage de ne léser aucun vaisseau ni aucun nerf ; elle peut même être prolongée latéralement, à condition de ménager autant que possible le laryngé supérieur. Mais si l'incision de la membrane se fait trop bas, l'on risque de diviser l'épiglotte, dont la partie supérieure restera adhérente à la base de la langue, et de faire échapper à la vue une partie considérable du champ opératoire.

Il faut donc qu'en l'espèce le chirurgien soit préalablement bien fixé sur la partie de l'hypo-pharynx où doit porter son opération. La pharyngotomie latérale de Krönlein comporte une incision qui longe l'os hyoïde, exige le relèvement ou l'extirpation de la glande sous-maxillaire et l'ouverture du pharynx au-dessus de l'os hyoïde. Elle est plutôt indiquée pour les pharyngotomies relativement étendues où l'on fait précéder l'opération proprement de l'évidement du cou.

---

(1) J'ai décrit en 1919 dans le *Scalpel*, page 37, la technique spéciale de cette opération.

La pharyngotomie médio-latérale de Kocher combine l'incision latérale avec une ou deux incisions longitudinales ; dans la pharyngotomie sus-hyoïdienne le chirurgien se ménage du jour en détachant les muscles de la langue de l'os hyoïde.

Il est bien entendu que dans la courte critique de ces procédés, je n'ai en vue que l'ablation de tumeur qui sont diagnostiquées abordables par la voie soit sus-, soit sous-hyoïdienne : quel que soit celui de ces procédés auquel l'on a recours, la pénétration entre l'os hyoïde et le cartilage thyroïde ne donne pas un jour suffisant pour l'extirpation de tumeurs du volume de celle que je vous présente aujourd'hui. Il ne faut pas perdre de vue non plus qu'il s'agit de rétablir par des sutures et du pharynx et de la brèche opératoire, la restitution *ad integrum* aussi rapide que possible de la déglutition : et à cet égard, il faut éviter de pénétrer au-dessus de l'os hyoïde en détachant les muscles de la langue de leurs insertions, car il sera impossible de rétablir immédiatement par la suture le *status quo ante*.

C'est en vue de répondre à la double indication : élargissement de la brèche opératoire sans délabrements importants, et reconstitution immédiate, que j'ai eu recours à une technique opératoire qui m'a donné le meilleur résultat.

Ayant fait préalablement la trachéotomie pour narcose, j'ai fait l'incision antéro-latérale, comme pour la pharyngotomie sous-hyoïdienne. J'ai ensuite détaché de leurs insertions les muscles thyro- et otherno-hyoïdiens, et fait la résection sous-périostée de l'os hyoïde (grande corne et portion du corps), de façon à conserver l'intégrité des attaches musculaires de la langue.

La résection ainsi faite donne un jour énorme et m'a permis d'enlever dans son entièreté la tumeur. J'ai même enlevé la portion de pharynx à laquelle elle était adhérente ; et les pinces repères mises au fur et à mesure du détachement aux ciseaux m'ont permis de suturer immédiatement en partant du bord de l'épiglotte le ligament glosso-épiglottique et les lèvres de l'excision pratiquée dans le pharynx.

L'opération se termina par la suture sous-dermique de la muqueuse pharyngée rétro-hyoïdienne, la suture des deux lèvres périostiques : un petit drain entre la peau et la membrane thyro-hyoïdienne assura le drainage. Quatre jours après, le malade, que l'on avait nourri au début à la sonde pour éviter les mouvements de la déglutition, mangeait parfaitement.

L'examen microscopique fait à l'institut de MM. Dustin, Ruelens et Renau, a démontré qu'il s'agissait d'une tumeur très rare : un myxo-lipome.

Quelques questions sont posées à M. Goris. Il entre dans quelques développements sur ce procédé nouveau, et en dessine un schéma très suggestif. M. le Professeur Guermonprez fait ressortir ce que cette méthode opératoire a à la fois de hardi et de hautement rationnel ; parmi ses avantages, il faut noter une ablation sans morcellement, garantie précieuse contre la récidive ; aussi faut-il souhaiter qu'elle entre bientôt dans la pratique de la chirurgie du pharynx.

L'ordre du jour appelle ensuite deux communications de M. le Docteur Boine : *Quelques nouveaux cas de maladie de Morton.*

La maladie, ou mieux, la Métatarsalgie de Morton, est une entité peu connue et que bien peu d'auteurs mentionnent.

La rencontre de plusieurs de ces cas rares, en même temps que l'intérêt qu'il y a à pouvoir soulager les malades de leurs souffrances, nous incitent à parler de cette maladie, et à rappeler, en peu de mots, sa nature.

Elle fut décrite, pour la première fois, en 1876, par le Docteur Th. Morton, de Boston, comme « une affection douloureuse du pied, siégeant au niveau de l'articulation métatarso-phalangienne du 4^{me} orteil ». Pour Morton cette affection se développerait, « soit à la suite d'un traumatisme, soit par le port d'une chaussure trop étroite, soit sans cause appréciable. La douleur survient par accès, souvent d'une grande violence ; elle rend la marche impossible et le malade doit, coûte que coûte, enlever sa chaussure. Au bout de quelque temps les douleurs cessent. L'accès est parfois si pénible qu'il peut aller jusqu'à la syncope ».

Il n'y a rien à ajouter à cette définition donnée par Morton et reprise en 1911 par Bolten (de la Haye).

Longtemps cette affection resta ignorée, et la plupart des auteurs décrivirent et décrivent encore sous le nom de maladie de Morton ou de métatarsalgie, des affections douloureuses diverses du pied, ne ressemblant que de loin à la vraie maladie, telles que des anomalies de la voûte plantaire, des pieds plats, des subluxations des articulations métatarso-phalangiennes, des ostéites chroniques ou des manifestations goutteuses ou rhumatismales. Ce sont surtout les auteurs français qui semblent le plus méconnaître la nature de cette affection.

La vraie « maladie de Morton » est une névralgie due à la compression, par le rapprochement des têtes métatarsiennes, des filets collatéraux des nerfs plantaires qui passent entre elles. « Nous savons, par l'anatomie, que c'est particulièrement entre les troisième et quatrième métatarsiens que les anastomoses existent entre les nerfs plantaires externes et internes. (Bosc et Lamarq.)

On s'explique donc que, dès qu'une cause mécanique quelconque vient, en cet endroit, comprimer le nerf, elle provoque une crise douloureuse névralgique, qui ne cesse que par la suppression de la cause : l'enlèvement de la chaussure et, souvent même, le repos couché. On comprend aussi pourquoi les radiographies, même les meilleures, ne révèlent, dans ces cas, rien d'anormal. Elle a été faite dans le cas de Bolten. Je vous montre ici celles qui nous intéressent ; toutes sont entièrement négatives.

On rencontrerait parfois de légers troubles d'hypo-esthésie ou d'hypo-analgésie au niveau du quatrième ou du troisième orteil, ainsi que le rapporte Bolten. Chez nos malades nous n'avons rien constaté de ce genre.

Dans tous nos cas la compression des têtes métatarsiennes, par la main, était très douloureuse et pouvait arracher des cris aux malades.

Tous les traitements permettant de supprimer la compression du nerf sont bons. Parfois, mais rarement (nous ne l'avons pas rencontré) le simple port de chaussures larges suffirait.

Le *traitement* habituellement employé est celui en usage pour les fausses maladies de Morton : la résection de la tête du quatrième métatarsien. La guérison est toujours radicale. Bolten a eu l'idée d'employer à cette métatarsalgie le traitement de choix de la plupart des névralgies : la destruction « in situ », du nerf par injection d'alcool. Il a appliqué cette thérapeutique au malade dont il a noté le cas et obtenu un succès.

Trouvant ce procédé très élégant, en même temps que simple et rationnel, nous l'avons utilisé pour celle de nos malades que nous avons eu l'occasion de traiter. Après anesthésie locale au chlorure d'éthyle, nous avons injecté un à deux centimètres cubes d'alcool à la partie antérieure du troisième espace interosseux. La malade était une jeune femme assez pusillanime qui nous a déclaré n'avoir presque pas souffert de l'injection.

Il y eut un peu d'œdème local et de réaction pendant deux à trois jours, puis tout rentra dans l'ordre.

Le succès de l'intervention a été complet : la malade n'a plus jamais souffert depuis et a même pu, elle qui ne pouvait, pour ainsi dire, plus se déplacer en ville, fournir, au début de la guerre, de grandes marches, sans éprouver la moinde gêne. Nous l'avons revue encore plusieurs fois dans ces derniers temps : la guérison se maintient toujours.

Nous croyons donc bien que, dans la maladie de Morton, l'injection d'alcool et la destruction du nerf est le traitement de choix et que l'intervention opératoire qui, si elle n'est pas grave, est toujours ennuyeuse et mutilante, ne sera plus nécessaire pour soulager ces malades et les rendre à la vie normale.

Outre les trois cas rapportés par Bolten : deux de Schoemaker et un personnel (MITTEILUNGEN AUS DEN GRENZGEBIETEN DER MEDIZIN U. CHIRURGIE, B. XXII, H. 2, p. 211. — 1910) voici trois cas inédits qui nous sont personnels :

Deux de ces cas nous ont simplement été adressés pour radiographie et diagnostic, ce qui explique que nous n'ayons pu leur appliquer le traitement indiqué. Nous avons simplement pu le conseiller au médecin traitant et ne savons malheureusement pas ce qui en est advenu.

1. *Jules D.* (n° 1871-H.) 43 ans, Comines, crises typiques de métatarsalgie, à part la douleur locale à la pression des orteils dans la main, rien de spécial à constater. La radiographie que vous voyez ne révèle absolument rien.

2. *Madame J. H.* (n° 489-p.) 30 ans, Louvain, souffre souvent au niveau de la tête du quatrième métatarsien gauche. Il faut

alors qu'elle enlève son soulier. Cela se produit même avec des souliers larges, et devient de plus en plus fréquent. Localement il n'y a absolument rien à constater. Seule la pression locale est un peu douloureuse et la compression des têtes métatarsiennes provoque de vives douleurs.

La radiographie (excellente) que vous voyez, montre les deux pieds radiographiés l'un à côté de l'autre. Vous ne parviendrez pas à y constater quelque chose d'anormal.

C'est chez cette malade-ci que nous avons fait le traitement indiqué plus haut, et obtenu de la sorte une guérison complète et définitive.

3. *Mademoiselle Madel C.* (n° 846, p.), 21 ans, Louvain.

La malade souffre du pied droit depuis deux à trois ans. S'est déjà trois fois foulé le pied. Eut alors, pendant un certain temps, de la douleur localisée au niveau des cunéiformes.

Elle se plaint actuellement de douleurs entre les têtes des troisième et quatrième métatarsiens. La crise se produit de temps en temps, en marchant. Alors la malade doit s'asseoir, étendre la jambe, puis elle sent quelque chose qui remonte le long du membre, puis c'est fini.

De nouveau ici, rien à constater extérieurement qu'un peu de pied plat et une circulation défectueuse. Douleurs facilement provoquées par la compression.

Ce cliché radiographique paraît identique aux autres et ne donne aucun renseignement.

Il s'agissait évidemment, ici aussi, d'une métatarsalgie de Morton typique.

Pneumo-péritoine et ventriculographie

Je ne compte pas vraiment vous faire une communication à ce sujet, mais vous montrer, par des clichés, les bons résultats que donnent, au point de vue diagnostic, les injections d'air dans les séreuses, péritoine et ventricule cérébraux.

La technique en est simple et réellement sans danger, à condition d'être faite avec prudence et une asepsie rigoureuse.

Le gaz injecté est habituellement de l'oxygène, mais de préférence un mélange de 1/5 d'oxygène et de 4/5 d'acide carbonique.

Pour l'abdomen on injecte de un à deux litres sans dépasser dix à douze centimètres cubes d'eau de pression ; pour les ventricules on n'injecte qu'une quantité de gaz strictement égale à la quantité de liquide retiré par la ponction. Il n'y a donc pas ici d'augmentation de pression.

Ce mode d'examen doit évidemment être réservé aux cas difficiles et légitimant ce mode d'exploration, mais il faut le connaître et, à l'occasion, savoir l'utiliser.

Dans la plupart des cas, cette exploration permet de distinguer merveilleusement, un à un, tous les organes abdominaux et donne plus de renseignements qu'une laparotomie exploratrice.

Il est évident que chaque fois les faits recueillis ne sont pas de première importance, mais trois fois déjà, cependant, nous avons de cette façon rendu d'inappréciables services à des malades.

Chez deux il s'agissait d'un repérage exact et d'un diagnostic de tumeur abdominale.

Chez le troisième, le plus intéressant, nous pûmes ainsi mettre en évidence, sans aucun doute possible, une lésion du rein droit, des adhérences du foie, au niveau d'une fracture costale, et une éventration diaphragmatique droite. Or, cet homme, ancien accidenté grave du travail, se plaignait toujours de douleurs dans le flanc droit et avait déjà subi un jugement le taxant de simulateur.

En ce qui concerne les ventricules cérébraux, nous pûmes de cette façon établir la nature extra-cérébrale d'une hydro-céphalie, et montrer l'intégrité des sinus, partant l'absence de compression, chez un malade porteur d'une vaste destruction de la selle turcique.

Sur l'invitation de la Section, M. le professeur Guermonprez nous entretient des Facultés catholiques de Lille, particulièrement de la Faculté de médecine. Il retrace leur histoire, les difficultés et les obstacles qui s'opposèrent à leur création et à leur développement et qui cédèrent devant une foi tenace et de légitimes revendications. Il s'étend particulièrement sur l'organisation et les développements nouveaux de la Faculté de médecine. Cet exposé a été écouté avec le plus vif et le plus sympathique intérêt. Il confirme l'impression que la Société scientifique a recueillie lors de la récente session qu'elle a tenue à Lille, et qui lui a permis de constater les brillants résultats d'un enseignement qui n'a cessé de compter des maîtres faisant honneur à la Science française et à la Foi catholique ; plusieurs d'entre eux — et non des moindres — ont donné et donnent encore, comme M. Guermonprez, à la Société scientifique une collaboration dont elle s'honore et dont elle se réjouit ; une communauté de vues et d'aspirations résumées dans une devise à laquelle toutes deux acquiescèrent avec une joyeuse soumission, doit assurer à ces relations une solidité et une cordialité fécondes. M. le Président, en remerciant et félicitant M. le professeur Guermonprez, se fait l'interprète de ces sentiments.

M. le D^r^ Warlomont entretient l'assemblée de l'ouvrage important du professeur Paul Bureau, *l'Indiscipline des Mœurs*. C'est une synthèse vivante et éloquente réunissant en faisceau tous les éléments d'un problème qui s'impose à l'attention du moraliste, du sociologue, du législateur et du médecin. Après une analyse de cette étude, si fortement documentée et d'une actualité si inquiétante, M. Warlomont s'attache à faire ressortir le rôle grave, bienfaisant et autorisé qui est dévolu, dans la crise à laquelle nous assistons, au médecin soucieux de faire prévaloir les lois de la saine morale, en plein accord avec la voix de sa conscience professionnelle et sa foi religieuse.

La Section décide, sur l'avis favorable des rapporteurs, l'impression dans les ANNALES, parmi les Mémoires, de l'importante étude de M. le D^r^ Vervaeck : *La Détermination de la Robusticité constitutionnelle*. Ce travail sera mis à l'ordre du jour d'une prochaine réunion pour être proposé à la discussion.

Sixième Section

La séance s'ouvre à 11 heures, sous la présidence de M. Lagasse de Locht, président de la Société. La parole est donnée à M. Van der Mensbrugghe pour une communication sur *La Signalisation de nos Chemins de fer*.

Il envisage successivement les signaux mobiles, seuls en usage autrefois et les signaux fixes : disques et sémaphores, en indiquant chaque fois les signaux de jour et ceux de nuit. Il passe ensuite en revue la signalisation en usage avant la guerre en Belgique, celle établie par les Allemands et enfin celle que l'administration des chemins de fer est occupée à installer sur les lignes principales et qui sera la signalisation future du réseau belge.

Cette étude paraîtra *in extenso* dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

du jeudi 27 janvier 1921

La séance est présidée par M. Lagasse de Locht. M. Camille Matignon, professeur de chimie au Collège de France, fait la conférence : *Le gisement de potasse alsacien et l'état actuel de son exploitation* (¹).

Une société alsacienne de forage, dirigée par M. Joseph Vogt, en recherchant de la houille dans le sous-sol alsacien, reconnut, au cours d'un sondage effectué en 1904 à Wittesheim, la présence de deux couches de sels potassiques à 627 et 649 m. de profondeur ; 165 sondages effectués par la Société Amélie constituée au lendemain de cette découverte, délimitèrent le bassin potassique avec une superficie d'environ 200 km^2.

En 1908, un premier puits était foncé et l'exploitation commençait au début de 1910.

(¹) Le texte de cette conférence paraîtra dans le numéro d'avril de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

Les concessions et intérêts de la Société Amélie avaient été absorbés par trois sociétés allemandes : Deutsche Kali Werke, Hohenzollern et Wintersall. M. Vogt, à la suite de nouvelles recherches, parvint à démontrer l'extension du bassin et à obtenir des concessions nouvelles qui restèrent la propriété d'un groupe franco-alsacien, le groupe Kali Ste-Thérèse.

A la veille de la guerre, douze puits étaient équipés, cinq étaient en fonçage, la production de 1913 avait été de 350.000 tonnes de sels bruts, représentant environ 50.000 tonnes d'oxyde de potassium K^2O, c'est-à-dire environ 1/20 de la production mondiale, exclusivement allemande, 1.110.000 tonnes évaluées en K^2O.

Le gisement alsacien, avec ses deux couches d'épaisseur moyenne 1 m. 20 et 4 m., contient environ 325×10^6 tonnes de K^2O ; il serait capable d'alimenter le monde pendant près de 300 ans avec la consommation d'avant guerre. Le gisement de potasse prussien qui s'étend sur une superficie de 1500 km^2 est vingt-cinq fois plus puissant que celui d'Alsace.

L'Allemagne avait donc le monopole de la potasse dans le monde. Ce monopole lui échappe désormais du fait du retour de l'Alsace à la France et de la découverte de gisements très importants en Espagne, dans la Catalogne ; gisements dont l'exploitation commencera avant deux ans.

Les mines de potasse alsaciennes étaient exploitées d'une façon anti-méthodique et anti-économique ; la direction française, depuis l'entrée des troupes alliées à Mulhouse, a travaillé à corriger dans la mesure du possible le mode de travail des Allemands et à substituer l'exploitation par front à l'exploitation par piliers tournés. Les îlots de protection des puits ont été augmentés, leur rayon a été porté de 50 à 200 mètres.

Des mesures de sauvegarde ont été prises contre le grisou et contre l'affaissement du plafond de la mine.

Le minerai le plus riche en chlorure de potassium est aussi le plus friable, de là un procédé très simple d'enrichissement. On sépare après broyage les parties les plus fines. On sépare aussi le minerai en sylvinite ordinaire contenant de 23 à 25 % de chlorure de potassium et en sylvinite riche avec 30 à 34 % du même chlorure.

Par une simple dissolution à chaud, suivie d'une cristallisation de refroidissement, on prépare un chlorure de potassium commercial de 90 à 92 %, lequel peut lui-même être amené à 98-99 % pour certains emplois chimiques.

On espère, dans quatre à cinq ans, retirer du gisement alsacien plus de 600.000 tonnes de K^2O, c'est-à-dire plus de la moitié de la production totale d'avant guerre.

Il n'y a pas d'ailleurs à craindre de surproduction, car la consommation de la potasse, dans tous les pays où elle a pu être livrée en quantité suffisante, a augmenté depuis la guerre dans de notables proportions, 73 % dans les pays scandinaves, 52 % en France, etc., pour le plus grand profit de l'agriculture.

On espère d'ailleurs que le bassin alsacien s'étend au delà de ses limites actuelles; une nouvelle société vient de se constituer, pour effectuer des sondages dans des régions où l'étude géologique semble indiquer son extension.

NOTES
Bryologiques et Lichénologiques
SUR
# les environs d'Avesnes (Nord)

PAR

l'abbé A. CARPENTIER

Au point de vue géologique la région d'Avesnes continue l'Ardenne belge. Les terrains primaires (grès, schistes, calcaires) y affleurent souvent et dessinent des plis parallèles, anticlinaux et synclinaux, dont les axes ont une direction générale Nord-Est, Sud-Ouest. De même que Dinant, sur la Meuse, Avesnes se trouve au centre de la « région calcareuse » et bâtie sur le calcaire carbonifère (1).

Dans cette zone, le cryptogamiste visitera avec intérêt les anciennes carrières d'Etrœungt, de Flaumont et Avesnelles, d'Avesnes, de Saint-Hilaire et de Ferrière-la-Petite, et de même les carrières autrefois exploitées dans les calcaires dévoniens, à proximité de la frontière belge : Trélon, Wallers-en-Fagne, Baives. Hestrud, Cousolre. A dix kilomètres d'Avesnes, vers l'Est et le Sud-Est, la région est couverte de bois et de forêts dont le sous-sol est essentiellement schisteux (bois l'Abbé, forêt de Trélon, bois de la fagne de Sains). A l'Ouest et au Sud-Ouest, vers la Sambre, les terrains primaires disparaissent sous un manteau de terrains plus récents (Crétacé, Tertiaire) et le pays d'Ardenne et de Fagne fait place, par transitions ménagées, au pays de Thiérache. En dehors des bois et des forêts, les vallonnements sont couverts de prairies, plantées d'arbres fruitiers et encloses de haies vives.

---

(1) Sur la géologie du pays consulter : J. Gosselet, *L'Ardenne*, pp. 631-666. 1888. — A. Carpentier, in Mém. Soc. Géol. d. Nord, t. VII, 2, pp. 5-156 ; carte, fig. 1. 1913. — Pour l'étude de la distribution des Phanérogames et Cryptogames, voir Abbé J. Godon : *Caractéristiques de la Flore du Département du Nord.* Ass. franç. Av. Sc., 38e Congrès. Lille, t. II, pp. 102-113 1909. — Promenades botaniques dans l'Avesnois, 119 pages, 1 carte ; Cambrai, chez Lefebvre, 1910.

Sur les Cryptogames des environs d'Avesnes on trouvera des documents dans les *Plantes cryptogames de France* de J. B. Desmazières et surtout dans plusieurs notes de l'abbé Boulay (¹).

Les plantes recueillies par ce savant bryologue sont conservées dans les collections du Musée Boulay, à la Faculté libre des sciences de Lille. Elles fournissent une base solide à nos études, résultats de nombreuses excursions entreprises avant et depuis la guerre. On se contentera, dans cette première note, d'attirer l'attention sur la répartition, dans l'Avesnois, des Mousses appartenant aux genres *Orthothricum*, *Ulota*, *Encalypta* et sur les caractéristiques de la flore cryptogamique corticole des environs immédiats d'Avesnes et de la région forestière (Sains, Trélon, Anor, Hirson).

I. Genres **Orthothricum** et **Ulota**. Espèces diverses ; leur distribution dans l'Avesnois.

A. ESPÈCES SAXICOLES : *Orthothricum saxatile* Schimper et *O. cupulatum* Hoffm. ; *O. affine* Schrad. et *O. diaphanum* Schrad.

1. *Orthothricum saxatile* (²).

Les capsules subcylindriques, qui atteignent au maximum 2 mm. de longueur dans nos échantillons, sont ornées de 8 côtes ; nous n'avons vu que très rarement des côtes intermédiaires. La base de la capsule n'est jamais aussi renflée que chez l'*Orthothricum ano-*

(¹) J. B. H. J. Desmazières, *Plantes cryptogames du Nord de la France* : fasc. I-XVI (1825-1836) et fasc. XVII-XLIV (1836-1851) et sér. II, fasc. I-XV (1853-1860).

— N. Boulay, *Revision de la flore des Départements du Nord de la France* ; fasc. I, 1878, p. 61 ; fasc. II, 1878, p. 40 ; fasc. III, 1879, pp. 39-42 et pp. 51 à 53.

(²) N. Boulay : *Muscinées de la France*, I, Mousses, p. 332. 1884. Paris, F. Savy.

— K. Gustav und W. Limpricht, *Die Laubmoose Deutschlands, Oesterreichs und der Schweiz. Dr. L. Rabenhort's Kryptogamen-Flora*, Bd. IV. Abth. III, S. 40, 41. 1904. Leipzig, Eduard Kummer.

malum (1) ; les dents au nombre de 16 sont soudées par paires, leur ornementation consiste en de fines stries, souvent anastomosées, sans papilles.

Cette espèce, que N. Boulay considérait comme « une variété saillante ou une race notable et assez constante de *O. anomalum* », est commune sur les rochers calcaires et les caleschistes de l'Avesnois. On l'a trouvée sur les calcaires carbonifères à Etrœungt, Avesnes, St-Hilaire, Marbaix, Dompierre, Bachant et sur les calcaires dévoniens des monts de Baives, d'Hestrud (carrière Aubry). Cette mousse se développe bien sur les parois calcaires exposées au Sud et au Sud-Ouest ; on la trouve dans ces localités en association avec *Grimmia, apocarpa, G. pulvinata, Barbula ruralis*, etc... A Dimont sur des psammites, nous avons observé la présence d'un *Orthothricum* voisin dont les 16 dents sont séparées et dont la capsule offre 16 côtes ; les 8 intermédiaires sont courtes *(O. anomalum)*.

2. *Orthothricum cupulatum* Hoffm. (2). Pl. fig. 8.

Les capsules sont plus ou moins cachées entre les feuilles ; après la sporose les côtes sont très accentuées et les 16 dents étalées. La surface externe des dents est ornée de fines lignes ou stries vermiculées, anastomosées par places. L'ouverture de la capsule est dilatée à l'état sec ; les côtes sont au nombre de 16, dont 8 intermédiaires plus courtes. Certaines touffes ont des coiffes peu velues ou nues, campanulées (spécimens trouvés dans l'ancien cimetière d'Avesnes).

L'espèce est signalée sur des pierres calcaires au bord de l'Helpe, rive gauche, à Flaumont ; sur les rochers du bosquet de Saint-Hilaire, rive gauche de l'Helpe ; sur des pierres tombales de l'ancien cimetière d'Avesnes ; au bord d'un ruisseau, ancienne route d'Avesnes-Aulnoye, à Saint-Hilaire et à St-Remy-Chaussée ; au bord d'une fontaine à Boussières ; sur des bornes à Reugnies, au lieu dit la Maltrache, près la route d'Avesnes à Solre-le-Château et près la route d'Avesnes-Maubeuge, à la lisière sud du bois Leroy.

---

(1) Cf. Limpricht, *op. cit.*, p. 39, fig. 216, b.

(2) N. Boulay, *Muscinées de la France*, I, pp. 328, 329.
— Limpricht : *op. cit.*, pp. 43-45.

Dans toutes ces localités cet *Orthothricum* pousse sur le calcaire et à l'humidité ; au bord des ruisseaux il est atteint ou recouvert par le courant d'eau lors des inondations, durant les crues d'hiver ; en temps ordinaire on le trouve à quelques décimètres au-dessus du courant.

3. *Orthothricum affine* et *O. diaphanum* Schrad.

Il n'est pas rare d'observer quelques touffes de ces *Orthothricum* sur les bornes, surtout le long des anciens chemins envahis par les herbes. Mais ces espèces sont particulièrement fréquentes sur les arbres. Elles sont en tout cas indifférentes à la nature chimique de la roche, qui leur sert de substratum.

B. ESPÈCES CORTICOLES.

Outre les deux dernières espèces précitées, qui sont fréquentes sur les arbres fruitiers dans les vergers, sur les arbres des promenades autour d'Avesnes, quelques autres espèces ne sont pas rares.

1. *Orthothricum fastigiatum* Bruch (¹).

Cette espèce, que l'abbé Boulay regarde comme une variété de l'*Orthothricum affine* Schrad. est, d'après lui, « plus généralement répandue (que le type) dans la zone silvatique inférieure, particulièrement dans le Nord ». Il l'a signalée (²) dans la fagne de Sains. D'après l'examen microscopique du péristome, dont les dents et les cils *(O. fastigiatum)* sont ornés de fines papilles vermiformes, dont les cils aussi longs que les dents sont munis d'appendices latéraux, l'*Orthothricum fastigiatum* est reconnu sur des saules près de l'Helpe Majeure à Saint-Hilaire, sur les ormes de la route d'Avesnes-Landrecies, sur des ormes à la Joncquière, près la route d'Avesnes-Maubeuge, sur de jeunes chênes dans le bois de la Fagne de Sains entre les chemins dits de Mérode et de la Rochefoucauld, sur des ormes au Pont de Sains.

2. *Orthothricum leiocarpum*. Bryologie européenne, fasc. 2/3. p. 28, t. 15 (1837).

(¹) Limpricht, *op. cit.*, 1895, pp. 82, 83.

(²) N. Boulay, *Muscinées de la France*, I, pp. 323, 324, Cette mousse, facilement reconnaissable à ses capsules lisses, n'est pas rare sur les arbres, le long des routes. Nous la signalerons comme particulièrement abondante sur des ormes au bord de la route d'Avesnes-Landrecies, près du terrain de manœuvres, sur des chênes dans la forêt entre Hirson et Anor, etc., etc.

3. *Orthothricum Lyelli* Hook. et Tayl.

Cette espèce est fréquente dans l'Avesnois, soit dans les environs immédiats d'Avesnes (ormes du champ de tir militaire, des routes départementales d'Avesnes à Landrecies, à Sains), soit dans la zone forestière entre Hirson et Anor, où elle abonde sur les chênes. Dans la forêt elle nous a paru relativement bien fructifiée et N. Boulay l'a trouvée fertile à Anor (1).

4. *Orthothricum tenellum* Bruch.

Cette forme, dont les petites touffes sont très fertiles, est peu commune à Sains, où l'abbé Boulay l'avait d'ailleurs découverte (2). Elle est fréquente par places sur les ormes de la grande route d'Avesnes à Sains et sur les arbres des promenades (la Rotonde), à Avesnes même.

5. *O. pumilum* Schwartz (= *O. tenellum*, γ *pumilum* Boulay (3).

Cette espèce est simplement signalée à Colleret, près Maubeuge, par N. Boulay (4).

6. Genre *Ulota* Mohr (Planche, fig. 1, 2, 3).

En 1878 N. Boulay signale à Anor la présence d'*Orthothricum* (= *Ulota*) *crispum* et en 1879 il distingue dans les bois de Sains et Trélon : *Ulota crispa* et *Ulota crispula*.

Les *Ulota* sont facilement distingués par la forme de la capsule après la sporose (5). Chez *Ulota Bruchii* la capsule est alors très allongée et se rétrécit insensiblement à partir du milieu vers l'orifice très étroit ; les capsules de l'*Ulota crispa* ont un orifice un peu évasé après la sporose, elles sont plus longues que celles de l'*Ulota crispula*. En plus de la forme plus trapue et raccourcie de ses capsules, l'*Ulota crispula* n'offre pas de rétrécissement ou de dilatation à la partie supérieure de l'urne.

---

(1) N. Boulay, *Révision*... II, 1878, p 40.

(2) N. Boulay, *Révision*... III, 1879, p. 39.

(3) G. Limpricht, *op. cit.*, Bd. IV, Abth. II, S. 75.

(4) N. Boulay, *Révision*... III, 1879, p. 42.

(5) Pour l'étude de la capsule et la dissémination des spores, voir spécialement Dr A. Pfaehler, *Étude biologique et morphologique sur la dissémination des spores chez les mousses*. BULL. SOC. VAUDOISE SC. NAT., vol. XL, n° 150, pp. 57-63, 1904.

Dans la région d'Avesnes les *Ulota* ont été trouvés dans les bois et les forêts ou dans leur voisinage. D'après l'étude des capsules, l'*Ulota Bruchii* Hornsch est le plus fréquent. Il est surtout abondant sur les jeunes chênes dans la fagne de Sains, la forêt de Trélon et dans les forêts entre Hirson et Anor, où il atteint son maximum de développement. On lui trouve associé, mais moins souvent d'après nos récoltes, l'*Ulota crispa* Brid. Il en est de même dans les petits bois taillis ou bosquets (la Villette, Bois Leroy, la Croisette), témoins d'une ancienne extension des forêts vers l'Ouest, à partir de la forêt de Trélon jusqu'à la forêt de Mormal, où M. le Dr Van Oye recueillait, dès 1870, des touffes d'*Ulota Bruchii* et où N. Boulay a depuis reconnu l'existence de l'*Ulota crispa* et de l'*Ulota crispula* en association avec l'*Ulota Bruchii* (N. Boulay, 1878, 1879).

II. Genre **Encalypta**. Contribution à l'étude de sa répartition géographique dans la région d'Avesnes.

Le genre *Encalypta* est représenté par deux espèces : *E. vulgaris* Hedw. et *E. contorta* (Wulf.) Lindb. La première est une espèce vulgaire que nous avons trouvée au Camp de César (Avesnelles) sur des dolomies ; entre Godin et le Baldaquin, près d'Avesnes, sur la terre qui recouvre le calcaire carbonifère ; à Solre-le Château sur des calcschistes ; à Dimechaux sur des psammites ; sur le mortier des murs (Avesnelles, Saint-Remy-Chaussée), etc... etc...

L'*Encalypta contorta* (Wulf.) Lindb. (= *E. streptocarpa* Hedw. Boulay) (pl. fig. 4) est une espèce intéressante (¹). L'abbé Boulay la signale comme disséminée et très rarement fertile dans la zone silvatique inférieure (²). Dès 1879 il la note au passage à Cousolre sur des schistes (³). En août 1913 nous avons eu la bonne fortune

---

(¹ Cf. Limpricht, *op. cit.*, 1904, p. 121.

(²) N. Boulay, *Muscinées de la France*, I, p. 312.

(³) N. Boulay, *Révision de la Flore* etc., III, p. 41, 1879.

de recueillir plusieurs spécimens fertiles dans une excavation des calcaires frasniens d'une ancienne carrière à Reugnies, près Cousolre. Les coiffes mesurent 9 mm ; les capsules très étroites, allongées, ont une longueur de 4 mm et offrent de neuf à dix stries spiralées très nettes. Depuis lors nous n'avons trouvé que quelques touffes fertiles sur le calcaire carbonifère des Ardennes, à Saint-Hilaire-sur-Helpe, mais ici les capsules étaient rares, plus petites et mal développées, ce semble, bien que la cueillette fût plus tardive (7 octobre 1913). Si les échantillons fertiles sont rares, les spécimens stériles ne le paraissent pas. *E. contorta* stérile a été recueilli à Etrœungt sur les dolomies, à Saint-Hilaire (carrière Orphée) sur le calcaire carbonifère, sur un talus schisteux près du moulin de Borzie, à Solre-le-Château ; on le signale sur le mortier calcaire des vieux murs, dans les remparts de Maubeuge, à Solrinnes, à Trélon, Wallers-en-Fagne et Saint-Hilaire. Cette espèce dioïque, dont la distribution s'étend dans la région étudiée, doit avoir une multiplication végétative remarquable.

III. Florule cryptogamique corticole.

Dans ce chapitre nous étudierons les mousses et lichens des arbres des promenades autour d'Avesnes ; nous indiquerons ensuite quelques traits caractéristiques de la florule corticole de la zone forestière, au Sud-Est de l'Avesnois.

I. De 1912 à 1914 et en 1920, les ormes et peupliers plantés au bord des routes départementales d'Avesnes à Sains, à Landrecies et à Maubeuge, nous ont fourni bon nombre de cryptogames, dont voici les principaux :

Muscinées : Hypnum cupressiforme L. ; *Homalothecium sericeum* L. sp. ; *Leucodon sciuroïdes* Schw. ; *Orthothricum Lyelli* H. et T. commun sur certains ormes ; *O. leiocarpum* B. E. ; *O. tenellum* Bruch. ; *O. affine* Schrad. ; *O. diaphanum* Schrad. ; *Tortula ruralis* L, ces deux dernières espèces assez fréquentes surtout à la base des arbres ; *Tortula laevipila* Brid.; *Frullania dilatata* Dum.

Lichens (1) : *Usnea hirta* Hoffm., rare ; *Anaptychia ciliaris*

---

(1) On adopte la classification et la nomenclature de l'abbé J. Harmand : *Lichens de France*. Fasc. I, *Collemacés*, 1903 ; fasc. II, *Coniocarpés*, 1905 ; fasc. III, *Stratifiés radiés* et *Radiés*, 1907 ; fasc. IV, *Phyllodés*, 1909 ; fasc. V, *Crustacés* 1913. P. Klincksieck, éd. Paris.

Mass., non rare; *Ramalina pollinaria* Ach., *R. farinacea* Ach., *R. fastigiata* Ach., *R. calicaris* Fr; *Evernia prunastri* Ach.; *Parmelia subaurifera* Nyl.; *P. dubia* Schœ (= *P. Borreri* Ach.) et var. *ulophylla* Harmand (1); *P. scortea* Ach. (= *P. tiliacea* Ach. v. *scortea* Mérat, auct.), var. *pastillifera* Harmand, variété recueillie uniquement sur les peupliers de la route d'Avesnes à Maubeuge (2); *P. sulcata* Tayl., forme très sorédiée et forme à sorédies nulles ou à peu près; *Parmelia acetabulum* Dub., fertile; *P. caperata* Ach.; *Parmelia trichotera* Hue (3), quelques spécimens, à Marbaix; *Candelaria concolor* Arn., non rare; *Physcia parietina* D. N.; *Ph. lychnea* Nyl.; *Ph. stellaris* Nyl. fert.; *Ph. aipolia* Nyl. fert. sur ormes de la route d'Avesnes à Landrecies; *Ph. leptalea* D. C. var. *tenella*, fréquente; *Ph. pulverulenta* Nyl. et var. *venusta*, arbres des promenades, la Rotonde, Avesnes; *Ph. obscura* Nyl. sur des ormes au Pont-de-Sains (*Ph. obscura*, var. *ulothrix*, à thalle verdâtre-jaunâtre, à nhizines noires débordantes); *Lecanora subfusca* Hue v. *allophana* Ach., base des ormes, le Pont-de-Sains et var. *chlarona* sur peupliers, route d'Avesnes à Maubeuge; *Lecidea parasema* Ach., var. *elæochroma*, etc.

Il est à noter que le *Parmelia tiliacea* v. *scortea* a été observé sur de vieux pommiers à Solre-le-Château et que le *P. trichotera* a été recueilli à Trélon, près l'étang de la Folie.

2. *Région forestière au Sud-Est d'Avesnes.*

Quand on aborde le bois de la Fagne de Sains par la route du Château Talleyrand, on trouve sur les ormes du Pont-de-Sains, près du château, la plupart des espèces qu'on vient de citer. Cependant on remarque en plus parmi les *Evernia* et *Ramalina*, l'*Evernia furfuracea* Mann. et le *Parmelia physodes* Ach.; il y a quelques années nous avons trouvé l'*Usnea florida*.

---

(1) Cette variété *ulophylla* est, d'après M. Bouly de Lesdain, une modification due aux insectes qui rongent le bord du thalle. Cf. Bouly de Lesdain, *Recherches sur les Lichens des environs de Dunkerque*, p. 98. 1910.)

(2) En association avec le *Parmelia physodes* (excursion de septembre 1920).

(3) Abbé Hue, *Causerie sur les Parmelia*. JOURNAL DE BOTANIQUE, t. XII, pp. 245-247, 1898.

De Trélon quand on se dirige vers la forêt par le chemin qui mène à la carrière du Château Gaillard, sur les peupliers on peut faire les mêmes observations. En plus des *Parmelia subaurifera*, *P. dubia*, *P. sulcata*, *P. saxatilis*, *corticola*, *P. caperata*..., on recueille quelques *Usnea*, l'*Evernia furfuracea* et le *Parmelia physodes* (^{1}).

Ce dernier est très abondant sur les pins et les bruyères de la butte sablonneuse de Montfaux, près Glageon, sur les pins du Terne de Solre entre Solre-le-Château et Liessies et dans une pineraie de la forêt entre Liessies et Trélon.

La florule cryptogamique des forêts de Trélon et de Saint-Michel est remarquable par le développement de l'*Usnea florida*, *sorediifera* Arn. (^{2}), de l'*Evernia furfuracea* et du *Graphis scripta* var.

Remarques générales. — Conclusions.

1. L'*Orthothricum saxatile* et l'*O. cupulatum*, tous deux signalés par le bryologue F. Gravet comme étant assez communs dans la zone calcareuse (Dinant) de l'Ardenne belge (^{3}), se trouvent également dans le prolongement occidental de cette même zone dans la région d'Avesnes (Nord). *O. saxatile* est fréquent sur les affleurements calcaires, les calceschistes, d'âge frasnien ou carbonifère du pays d'Avesnes. *O. cupulatum* est moins fréquent; on l'observe aussi sur les rochers ou pierres calcaires, mais au bord des rivières ou dans des stations où des conditions particulières d'humidité sont réalisées quelques mois.

2. L'*Encalypta contorta* (= *E. streptocarpa*) n'est pas rare dans l'Avesnois. Entre Avesnes, Etrœungt et Maubeuge, nous l'avons reconnu plusieurs fois, à l'état stérile, sur le mortier calcaire des vieux murs. C'est une espèce qui paraît en voie d'extension grâce à une active multiplication végétative. On l'a trouvée

---

(^{1}) N. Boulay, *Révision*... 1879, p. 52.

(^{2}) Cf. J. Harmand, *Lichens de France*, III, p 376, 1907 et Claudel et Harmand, *Lichenes gallici praecipui exsiccati*, fasc. I, 1903, n° 10 (spécimen d'abord déterminé *U. barbata* v. *hirta*).

(^{3}) F. Gravet, *Bryotheca belgica*, n^{os} 65, 66, 325.

cependant bien fertile à Reugnies, dans une cassure des bancs calcaires.

3. Soulignons quelques caractéristiques de la région boisée du Sud-Est (Sains, Trélon, Anor, Hirson) : fréquence des *Ulota* (en particulier de l'*Ulota Bruchii* associé à l'*Orthothricum Lyelli* fertile) (1), du *Parmelia physodes* ; développement de l'*Usnea florida, sorediifera*, de l'*Evernia furfuracea* et de formes pendantes, ramifiées et très sorédiées de *Ramalina (R. farinacea)* et d'*Evernia*.

4. Nous donnons quelques détails sur quelques *Parmelia* intéressants : — *Parmelia physodes* : certains spécimens récoltés entre Anor et Hirson, dans la forêt, possèdent des lobes recourbés vers le haut et sorédiés (v. *labrosa*), mais quelques segments périphériques, libres de toute adhérence au substratum (écorce des chênes) offrent une tendance marquée à se renfler et à prendre la forme tubuleuse, avec sorédies terminales capitées, somme toute à présenter des traits caractéristiques du *P. tubulosa* Bitter (2) (Planche, fig. 5). Bitter avait distingué plusieurs espèces dans le *P. physodes* (3). Les remarques de M. Birger Kajanus (4) nous paraissent très judicieuses à ce sujet : en présence de formes de thalles offrant des transitions du *P. physodes* au *P. tubulosa* et au *P. farinacea*, il paraît plus logique de voir dans ces prétendues espèces des variations du *Parmelia physodes* — *Parmelia trichotera* (Pl., fig. 6). Lobes à marges très ciliées (*P. trichotera*, f. *ciliata* Bouly de Lesdain (5) ; face supérieure présentant par places quelques cils isolés, transition vers le

---

(1) En Vendée, MM. F. Camus et J. Charrier citent comme rares en dehors des forêts *Ulota crispa* Brid. et *O. Lyelli* H. et T. Cf. Bull. Soc. Bot. de France, t. LVIII (4e sér.), 1911, p. clii.

(2) Cf. Claudel et Harmand, *op. cit.*, n° 265.

(3) G. Bitter, *Ueber die variabilität einiger Laubflechten und ueber den einfluss aüsserer Bedingungen auf ihr Wachtvtum*. Pringheim's Jahr f. wiss. Botanik. Bd. XXXVI, Leipzig, 1901.

(4) Birger Kajanus (alias Nilson), *Morphologischen Flechtenstudien*. Arkiv. for Botannik, X, n° 4, déc. 1910, p. 37 ; Taf. 1, fig. 1.

(5) Dr Bouly de Lesdain, *Recherches sur les Lichens des environs de Dunkerque* (Thèse de doctorat ès-sciences), p. 95. P. Michel, édit. Dunkerque. 1910.

Parmelia pilosella Hue. Le développement des cils nous paraît être en relation avec l'habitat des thalles, qui croissent parmi les mousses (*Hypnum cupressiforme)* sur les jeunes chênes, dans la forêt de St-Michel.

— *Parmelia scortea* Ach. var. *pastillifera* Harmand (1). Le thalle de cette variété est ici de couleur légèrement bleutée, les lobes sont courts, l'isidium est constitué de nombreux petits disques noirs à surface irrégulière, granuleuse (Pl., fig. 7).

---

(1) J. Harmand, *Lichens de France*, IV, *Phyllodés*, p. 558. 1909.

EXPLICATION DE LA PLANCHE. (1)

Fig. 1. *Ulota Bruchii* Hornsch. *Localité* : forêt de St-Michel. Grossissement $= \frac{7}{2}$.

Fig. 2. *Ulota crispa* Brid. *Provenance* : Bois de la Fagne de Sains. Gr. $= \frac{15}{3.5}$

Fig. 3. *Ulota crispula* Bruch. Même provenance. Gr. $= \frac{5}{1}$.

Fig. 4. *Encalypta contorta* Lindb. *Localité* : carrières de Reugnies, près Cousolre. Gr. $= \frac{15}{9}$.

Fig. 5. *Parmelia physodes*. Ach. var. Forêt d'Anor. Gr. $= \frac{4}{1}$.

Fig. 6. Cf. *Parmelia trichotera* Hue f. *ciliata* B. de Lesdain. Même localité. Gr. $= \frac{3}{1}$.

Fig. 7. *Parmelia scortea* Ach. var. *pastillifera* Harmand ; sur peupliers, route d'Avesnes à Maubeuge. Gr. environ $\frac{4}{1}$.

Fig. 8 *Orthothricum cupulatum* Hoff. ; pierre calcaire humide. Avesnes Gr. $= \frac{10}{3}$.

(Manuscrit reçu le 25 novembre 1920.)

---

(1) Les clichés sont de M. l'abbé Depape, que nous remercions spécialement.

Lichens et Mousses de l'Avesnois

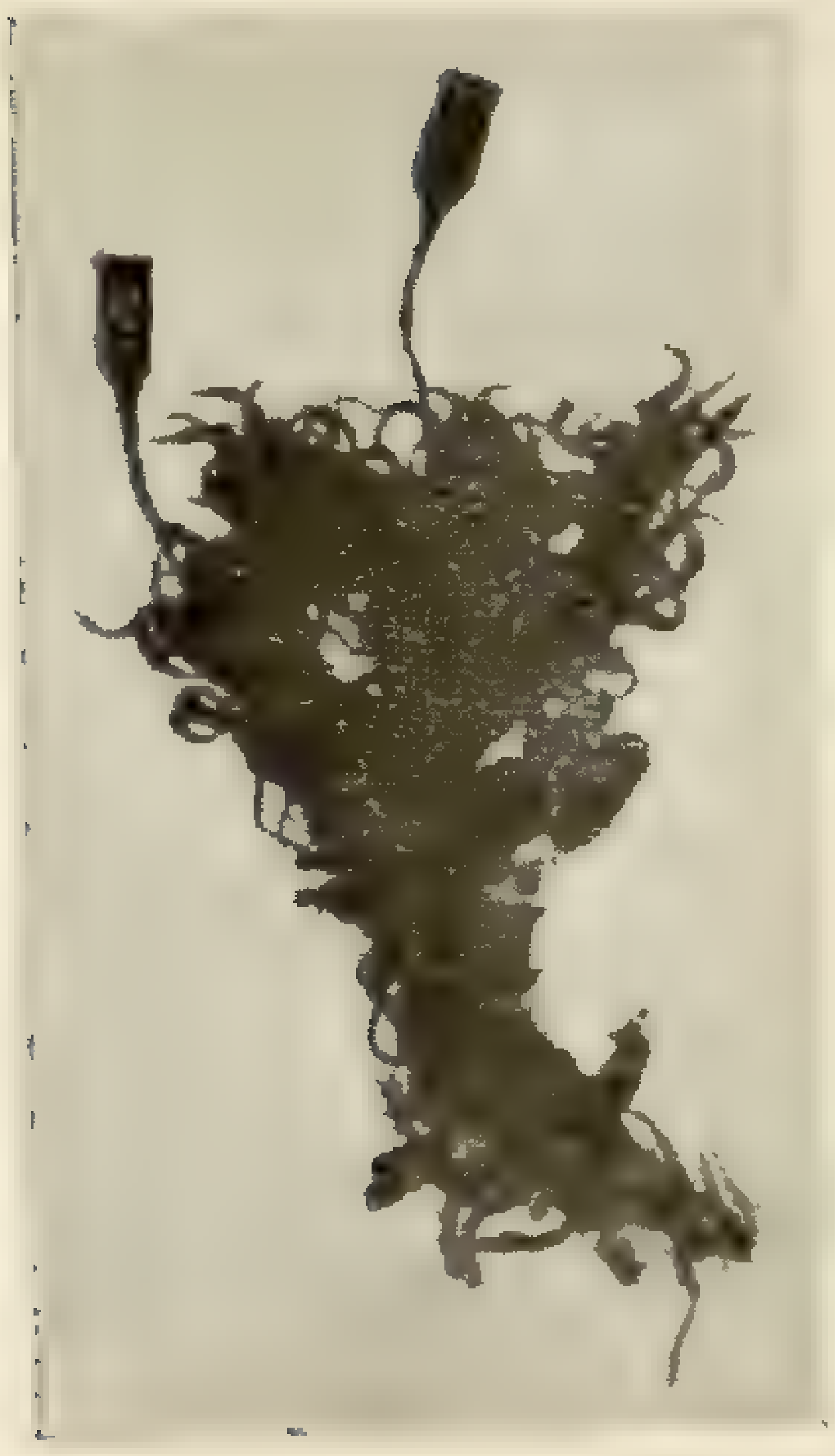


FIG. 3.

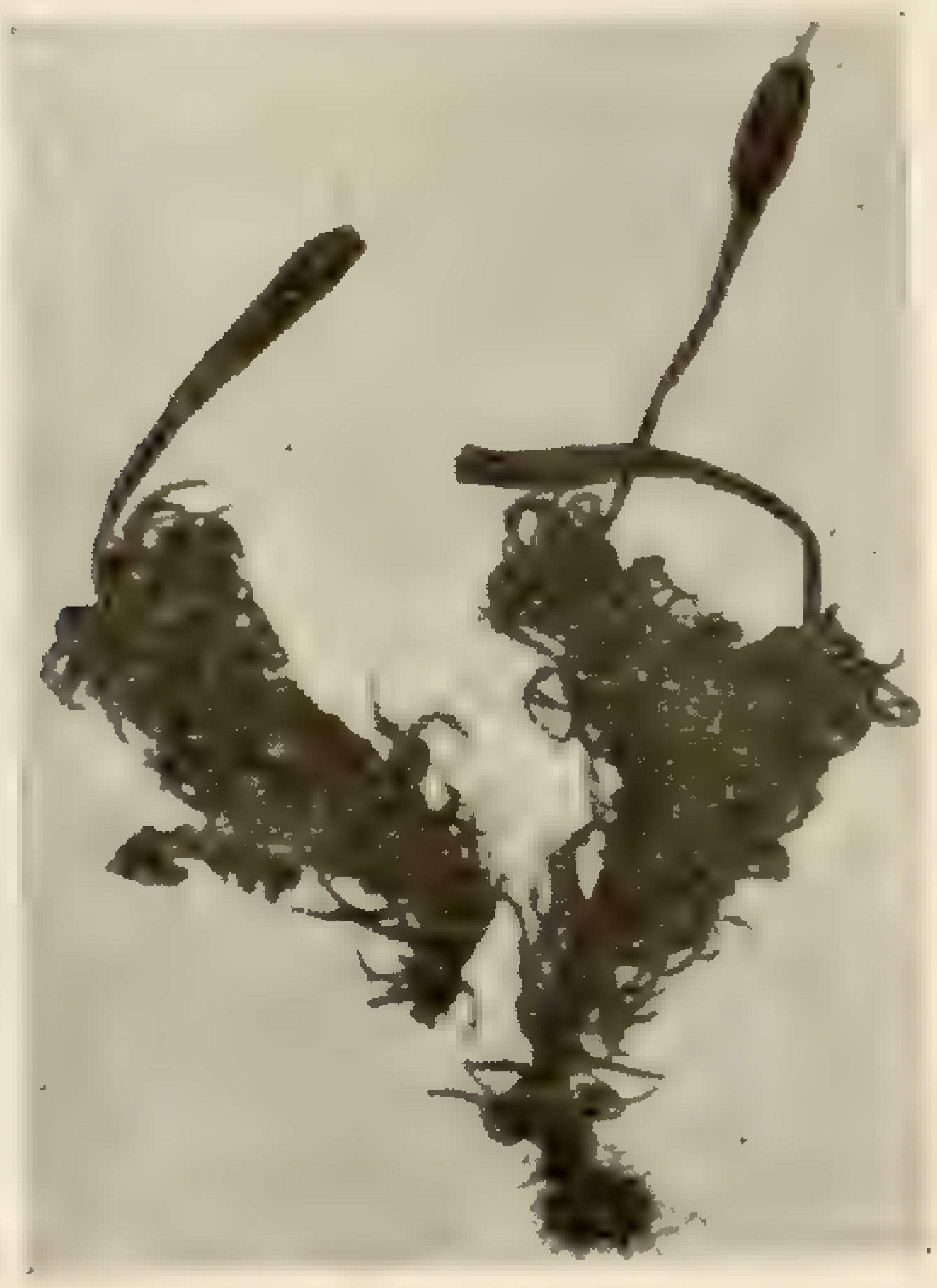


FIG. 1.

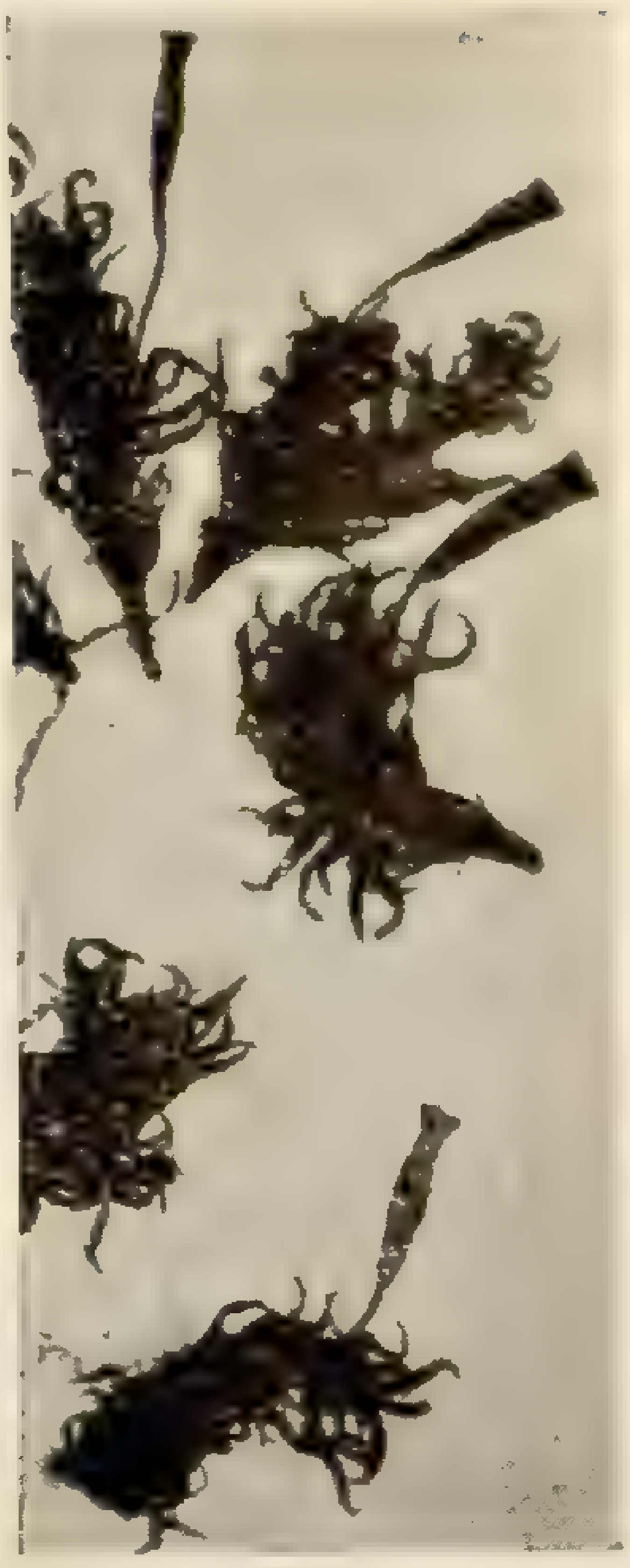


FIG. 2.

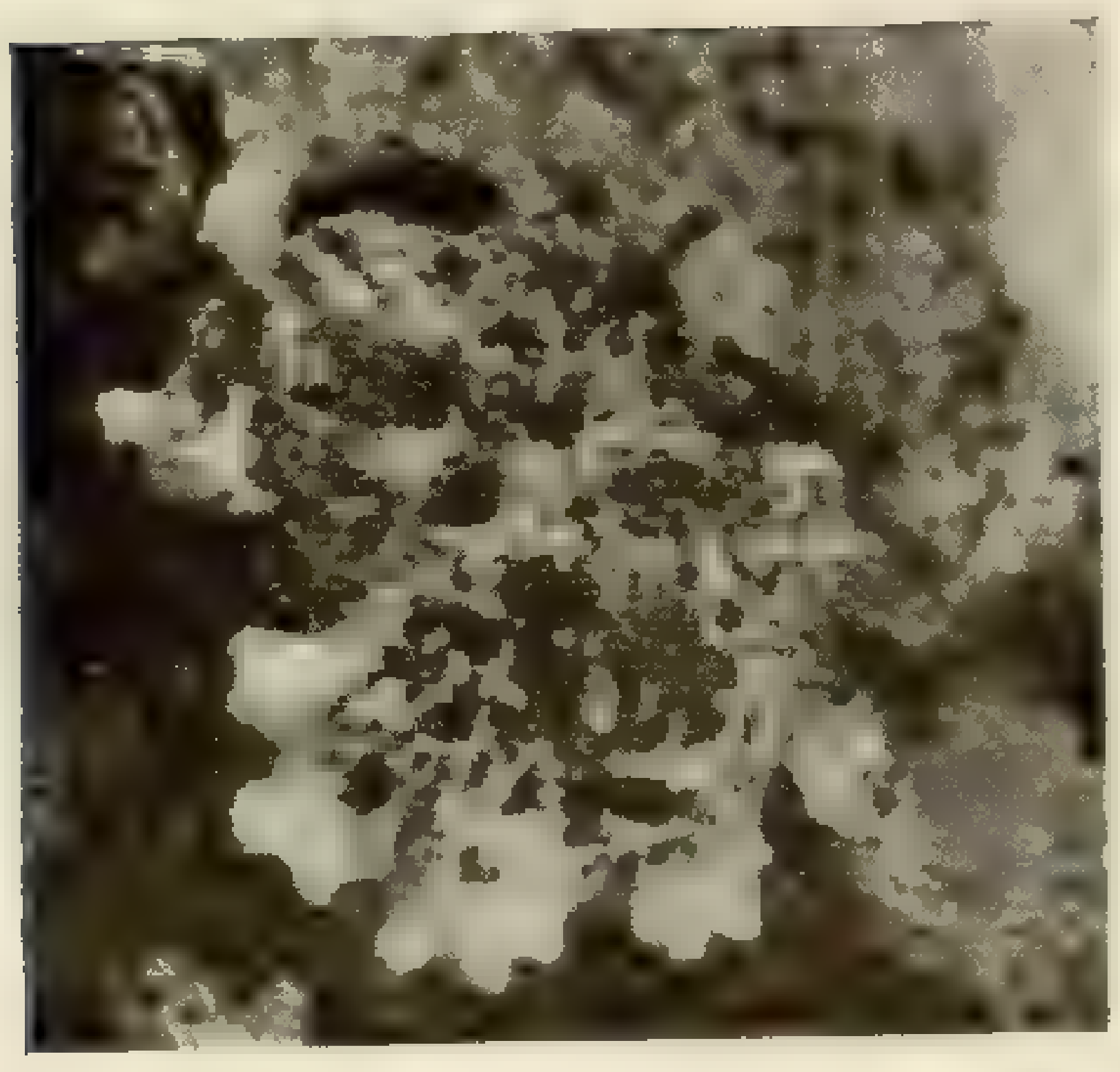


FIG. 7.

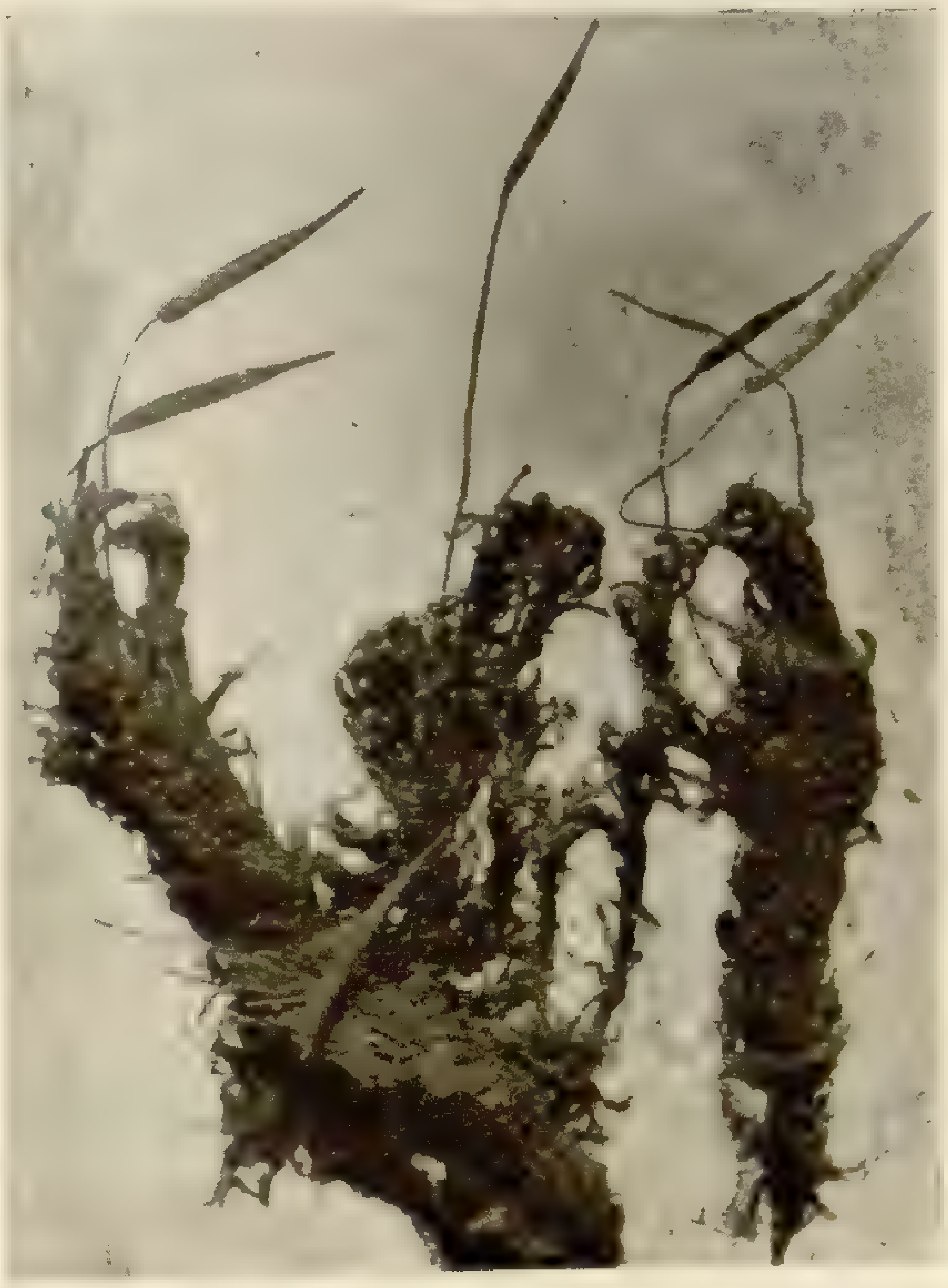


FIG. 4.

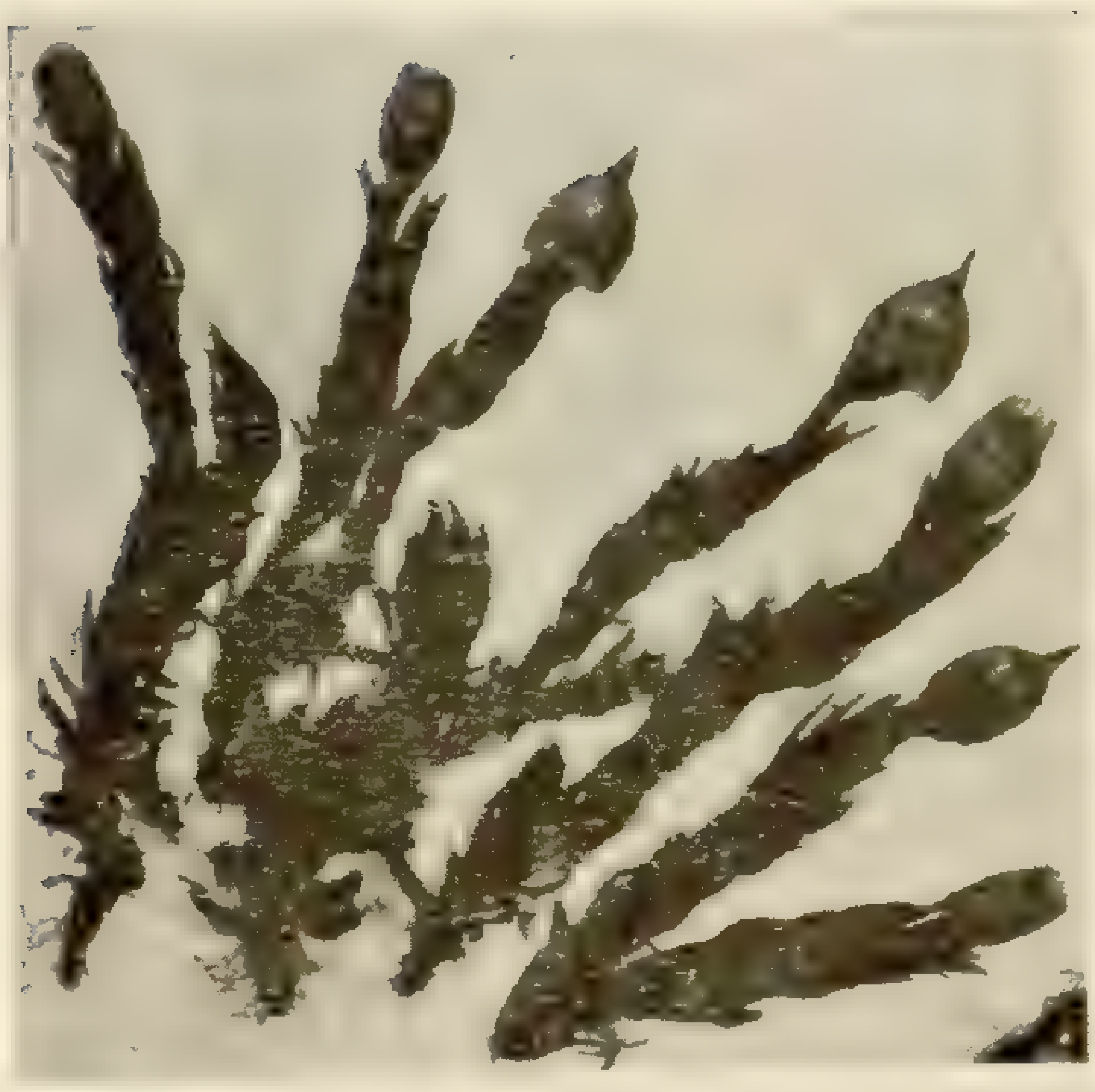


FIG. 8.

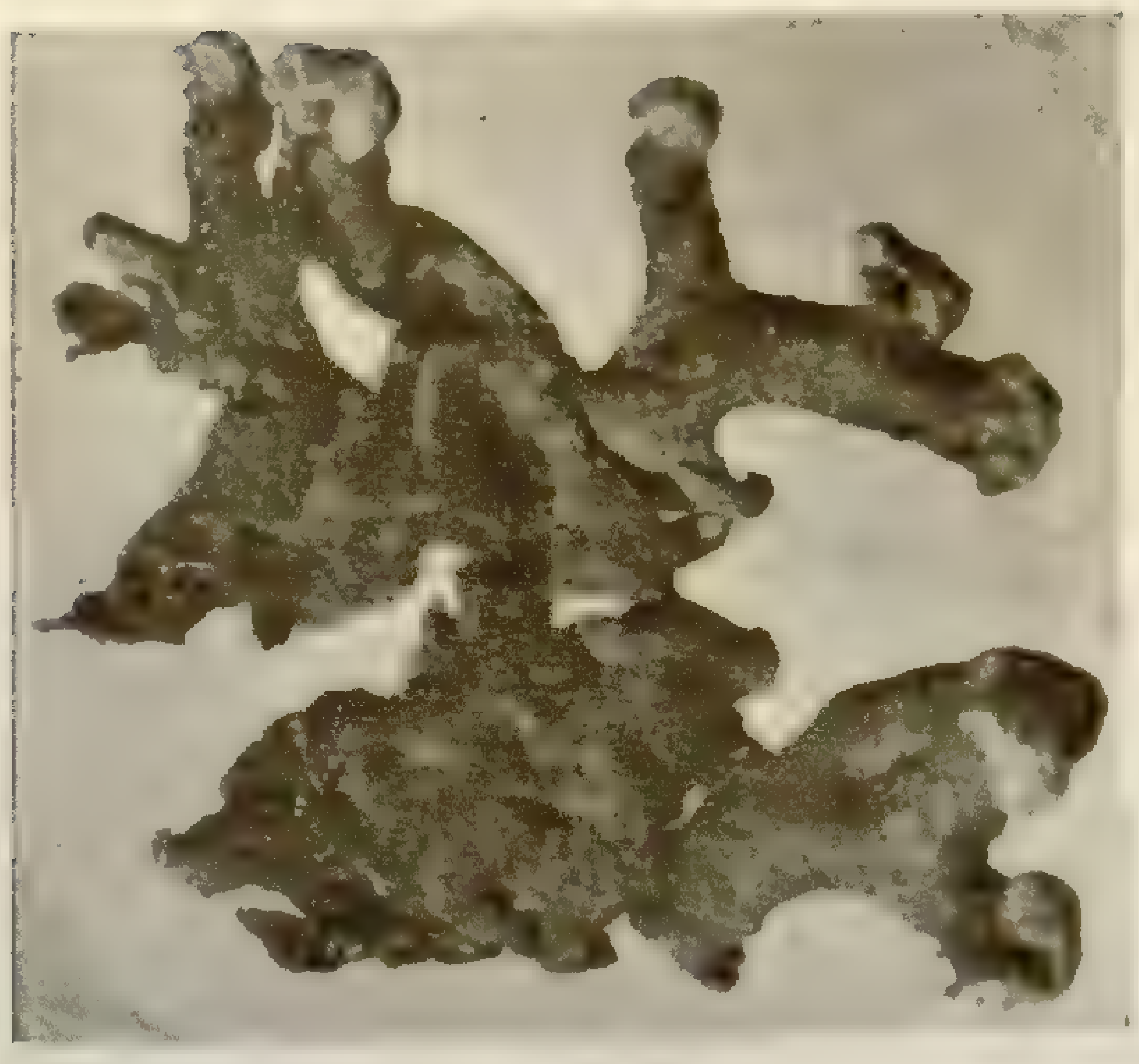


FIG. 5.

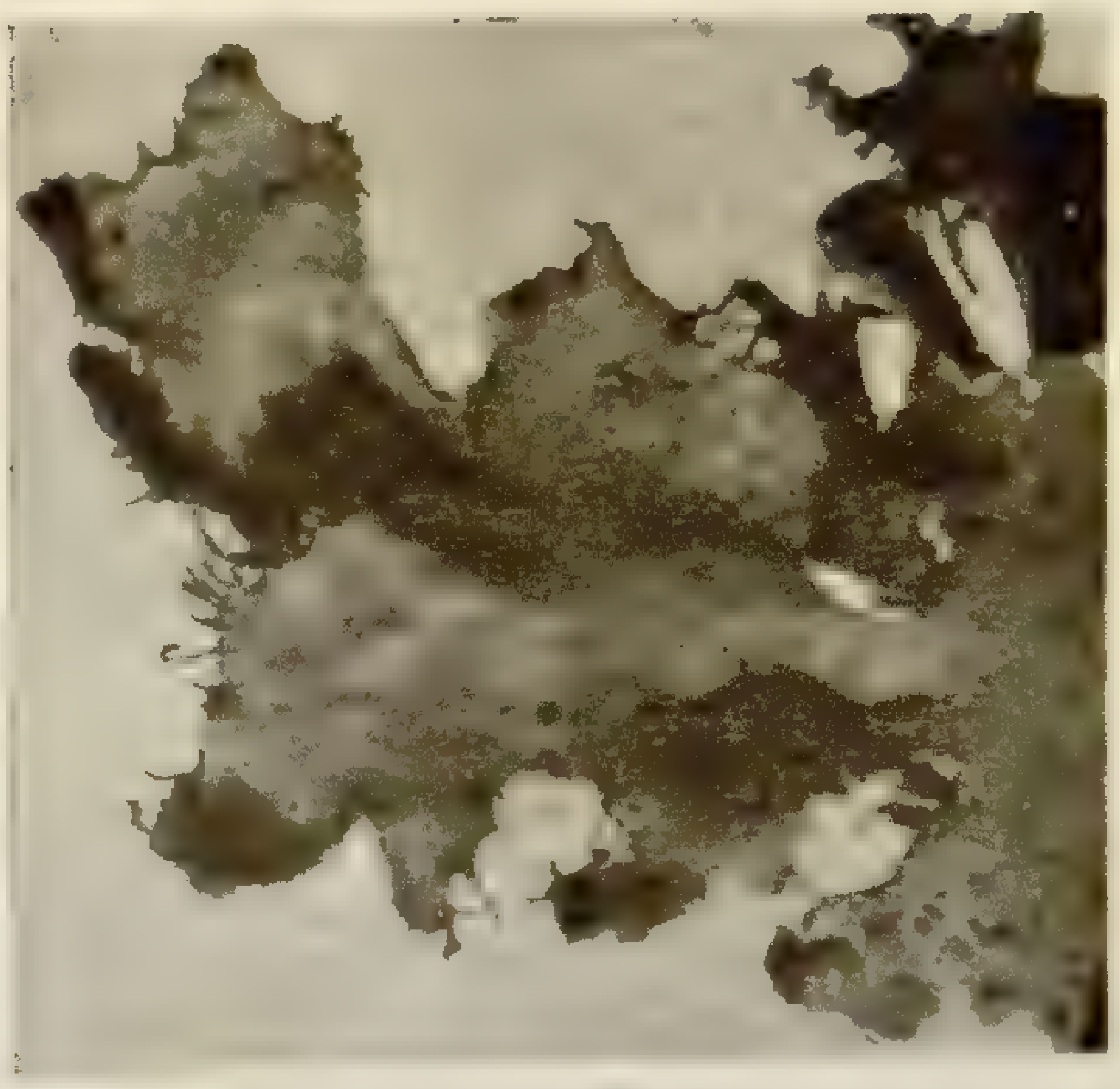


FIG. 6.

La détermination de la Robusticité constitutionnelle

PAR LE

Docteur L. VERVAECK
Directeur du service d'anthropologie pénitentiaire

Parmi les questions qui relèvent de l'observation médicale pure, une des plus intéressantes peut-être est la recherche des indices organiques et constitutionnels, les uns d'ordre architectural ou anatomique, d'autres d'ordre fonctionnel ou physiologique, pouvant constituer, sinon des preuves, tout au moins de sérieuses présomptions de vigueur corporelle. Certes, les études faites dans cet attachant domaine ont abouti à des constatations intéressantes et à des formules ingénieuses de détermination de la « Robusticité constitutionnelle » ; on ne peut dire cependant que vu la précision des résultats obtenus il soit superflu d'entreprendre l'analyse méthodique des facteurs, nombreux du reste, susceptibles d'influencer la cote numérique d'un indice de Robusticité et sa signification biologique. Quoi qu'il en soit, aucune documentation anthropométrique importante n'a été publiée sur ce point en Belgique (¹). Cette lacune nous a engagé à étudier ce problème dans le milieu pénitentiaire. Des recherches de l'espèce peuvent s'y entreprendre sur une vaste échelle et dans d'excel-

---

(¹) Nous tenons à signaler toutefois d'intéressants travaux de nos confrères de l'armée sur les conditions et les procédés de détermination de la « Robusticité constitutionnelle » envisagée au point de vue militaire ; il nous a été donné notamment d'en apprécier la valeur pratique lors des travaux de la Commission instituée par l'arrêté royal du 10 avril 1913 en vue de reviser les tableaux des infirmités et des maladies, donnant droit à l'exemption du service militaire.

lentes conditions de précision, grâce à l'organisation du Laboratoire anthropologique de la prison de Forest.

L'étude actuelle est basée sur 1300 observations de délinquants examinés de 1911 à 1918. Ultérieurement nous avons éliminé de ce milieu d'investigation certaines catégories de sujets, en raison de leur âge, de leurs anomalies anthropométriques, de leur état pathologique, etc.

Notre série s'est trouvée réduite finalement à 831 détenus de 20 à 25 ans. D'autre part, les individus de 19 à 21 ans ont fait l'objet d'une étude spéciale en vue de préciser les conditions anthropologiques de la vigueur constitutionnelle au point de vue du recrutement militaire. Cette seconde série comprend 243 sujets.

Nos recherches ont abouti à la conclusion générale que la détermination d'un indice de Robusticité est rendue fort délicate par l'intervention de nombreux facteurs biologiques ou pathologiques, dont l'importance varie suivant les individus ; nous nous sommes attaché spécialement à délimiter leur champ d'action et à préciser leur influence réciproque au point de vue de la vigueur corporelle ; nous avons pu en déduire la tare d'erreur qu'ils peuvent entraîner dans la détermination d'un indice de Robusticité.

Nous espérons cependant n'avoir pas fait exclusivement œuvre négative et nous croyons que notre documentation permettra de serrer de plus près les données du problème et d'en faciliter la solution pratique ; peut-être même nos recherches sur les relations entre la taille, le tempérament, le périmètre thoracique, le poids et la santé offriront-elles quelque intérêt au point de vue médical et anthropologique, et seront-elles de nature à compléter l'étude des types constitutionnels dominants en Belgique, étude fort délaissée en ces dernières années.

Enfin, au point de vue criminologique proprement dit, nos recherches ont fourni des éléments statistiques permettant de préciser les relations si discutées entre l'état pathologique ou d'anormalité biologique des délinquants et leurs actes délictueux ; elles forment à cet égard un chapitre de l'étude d'ensemble que nous avons entreprise sur la constitution organique des condamnés belges.

La Robusticité organique peut s'envisager dans un sens positif, quand elle se base sur les conditions de notre organisation physique, de notre force musculaire, sur la régularité de nos fonctions, ou la capacité de notre assimilation nutritive ; il est tout aussi intéressant de l'étudier dans son sens négatif, en analysant les modalités de la résistance offerte par l'individu à la fatigue, aux intoxications, aux infections, à l'usure organique enfin.

Le point de vue auquel se place le médecin, chargé d'apprécier la valeur vitale d'un sujet, varie suivant les circonstances. Tantôt il s'inspire de la nécessité d'assurer un bon recrutement militaire ou de répartir heureusement, dans les différentes armes, les conscrits incorporés, en tenant compte de leurs aptitudes spéciales et de leurs prédispositions constitutionnelles : telle sera la tâche du médecin de l'armée. Mais ce point de vue sera bien différent lors de l'examen médical des candidats se présentant aux diverses administrations ou désireux d'affronter les dangers de la vie coloniale ; il se modifiera encore pour le praticien à qui les sociétés d'assurances confient la tâche délicate de soupeser les chances de longévité et de maladie d'un sujet qui lui est inconnu, sujet soucieux souvent de dissimuler les tares pathologiques grevant sa constitution. Dans quelques cas particuliers le médecin aura à tenir compte de considérations plus spéciales encore, en vue, par exemple, de déterminer les aptitudes professionnelles, ou de rechercher si la santé d'un novice est compatible avec les exigences de la règle monastique, particulièrement dans certains ordres à régime sévère. Enfin — et l'on peut regretter que cet examen ne se généralise pas et même qu'il ne soit pas rendu obligatoire — l'investigation médicale aura quelquefois pour but de s'enquérir si un fiancé ne présente pas de prédispositions pathologiques héréditaires ou personnelles, susceptibles de tarer sa descendance et de constituer un obstacle au mariage.

On le voit aisément : le point de vue auquel le médecin se placera pour apprécier la Robusticité organique d'un sujet peut varier énormément suivant l'orientation imposée à son examen par les circonstances qui le dictent. Mais quelles qu'en soient les conditions particulières, il serait dans tous les cas hautement désirable de pouvoir disposer d'un critérium uniforme et sûr, d'une formule biologique simple, voire même d'un indice mathématique pour déterminer la vigueur constitutionnelle et la situation plus ou moins satisfaisante de l'état général du sujet à examiner.

Loin de nous la pensée de donner à cette investigation de la vigueur organique une importance telle que l'examen médical proprement dit lui soit subordonné ; bien au contraire, celui-ci, qui requiert du tact, de l'expérience et de la science, peut seul avoir une valeur décisive ; la recherche de la Robusticité ne sera jamais qu'un procédé rapide de sélection entre sujets normaux ou voisins des frontières pathologiques ; son seul avantage est d'annihiler dans la plus large mesure la personnalité de l'examinateur.

Car, il faut le reconnaître, l'exploration du médecin sera fatalement de qualité scientifique fort inégale et ses conclusions se ressentiront de la valeur même de son appréciation individuelle ; en outre, pour un même examinateur, elles pourront aussi varier en bienveillance ou en sévérité d'un jour à l'autre, suivant les conditions plus ou moins favorables de son état physiologique : qui ne connaît les oscillations de notre caractère et de notre humeur sous la dépendance des dispositions de notre état de santé et des incessantes variations de notre constitution biologique? Que de facteurs extérieurs ou intrinsèques influent, à notre insu le plus souvent, sur notre jugement et sur l'ensemble de nos opérations mentales ! Malgré ses qualités professionnelles, le médecin ne peut se flatter d'y échapper totalement ; c'est une des raisons pour lesquelles il s'efforce de trouver un critérium mathématique rigide, le renseignant en quelque sorte automatiquement sur la vigueur constitutionnelle des individus soumis à son examen.

Disons-le en passant, cet examen, pour être complet, ne devrait pas, comme il n'arrive que trop souvent, se limiter à l'individu même, à la recherche de ses lésions organiques ; il devrait toujours s'étendre à l'étude de son hérédité familiale et au relevé consciencieux de ses tares anthropométriques et morphologiques ; car ces tares traduisent parfois éloquemment et les dégénérescences qui pèsent sur lui et les facteurs pathologiques qui, au cours de l'enfance et de l'adolescence, ont troublé son développement organique. Ces recherches complémentaires jetteront souvent quelque lumière sur les manifestations pathologiques

Recherches de Contrôle sur l'exactitude

des procédés des D^{rs} Roblot (poids corporel) et Lassabière (surface corporelle)

Nota. — Nous avons pris au hasard *29* individus, de 25 ans, jouissant d'une bonne santé, ne présentant aucune tare, de taille comprise entre 1 m. 53 et 1 m. 80.

Les colonnes imprimées en italiques indiquent les calculs nécessités par les procédés expérimentés. Nous les avons fait figurer dans ce tableau, afin d'en rendre la vérification plus aisée.

				PROCÉDÉ DU DOCTEUR ROBLOT												PROCÉDÉS DU D^r LASSABIÈRE				
NUMÉROS DES DOSSIERS	TEMPÉRAMENT	PÉRIMÈTRE THORACIQUE	TAILLE	*Col. 4 − 150*	*= col. 5 / 3*	*= (col. 4 − 100)*	*= col 7 − col. 6*	*Correction*				POIDS PHYSIOLOGIQUE DU D^r ROBLOT (= col. 8 + col. 12)	POIDS RÉEL CONSTATÉ	DIFFÉRENCE (col. 14 − col. 13)		A. *(col. 4)²* (taille)	SURFACE CORPORELLE col. 17 × 0,92	B. *(col. 3)²* périmètre	SURFACE CORPORELLE col. 19 × 2,3	ÉCART col. 18 − col. 20
								= col. 4 / 2	*= col 9 + 2*	*= col 3 − col. 10*	*= col. 11 × 1,5 si col. 11 positive*			+	—					
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*
646	L N	89 .	179	*29*	*9,667*	*79*	*69^k,333*	*89,5*	*91,5*	—	.	69^k,333	77^k.	—	7^k,767	*32.041*	29.477,72	*7.921*	18.218,30	11.259,42
544	S	88 .	177	*27*	*9, —*	*77*	*68, —*	*88,5*	*90,5*	—	.	68, »	75 .	—	7^k, »	*31.329*	28.822,68	*7.744*	17.811,20	11.011,48
612	L	87 .	174	*24*	*8 —*	*74*	*66, —*	*87, —*	*89*	—	.	66, »	72 .	—	6^k, »	*30.276*	27.853,92	*7 569*	17.408,70	10.445,22
597	S	83 .	169	*19*	*6,333*	*69*	*62,667*	*84,5*	*86,5*	—	.	62,667	69 .	—	6^k,333	*28.561*	26.276,12	*6 889*	15.844,70	10.431,42
817	S N	84 .	165	*15*	*5, —*	*65*	*60, —*	*82,5*	*84,5*	—	.	60, »	63 .	—	3^k, »	*27 225*	25.047,00	*7.056*	16.228,80	8.818,20
900	N	82 .	162	*12*	*4, —*	*62*	*58 —*	*81, —*	*83, —*	—	.	58, »	62 .	—	4^k, »	*26.244*	24.144,48	*6.724*	15.465,20	8.679,28
1178	N	85 .	171	*21*	*7. —*	*71*	*64.*	*85,5*	*87,5*	—	.	64, »	68 .	—	4^k, »	*29.241*	26,901,72	*7 225*	16.617,50	10.284,22
975	L	81 .	163	*13*	*4,333*	*63*	*58,667*	*81,5*	*83,5*	—	.	58,667	63 .	—	4^k,333	*26.569*	24.443,48	*6.561*	15.090,30	9.353,18
1400	N	85 .	172	*22*	*7,333*	*72*	*64,667*	*86, —*	*88, —*	—	.	64,667	68 .	—	3^k,333	*29.584*	27.217,28	*7.225*	16,617,50	10.599,78
1000	N	82 .	164	*14*	*4,667*	*64*	*59,333*	*82, —*	*84, —*	—	.	59,333	61 .	—	1^k,667	*26 896*	24,744,32	*6.724*	15.465,20	9.279,12
1414	S N	82,5	176	*26*	*8,667*	*76*	*67,333*	*88, —*	*90, —*	—	.	67,333	69 .	—	1^k,667	*30.976*	28,497,92	*6.806^{25}*	15,654,37	12.843,55
968	N	79,5	161	*11*	*3,667*	*61*	*57,333*	*80,5*	*82,5*	—	.	57,333	54 .	3^k,333	—	*25.921*	23.847,32	*6.320^{25}*	14.536,57	9.310,75
321	S N	81,5	167	*17*	*5,667*	*67*	*61,333*	*83,5*	*85,5*	—	.	61,333	58 .	3^k,333	—	*27.889*	25.657,88	*6 642^{25}*	15.277,17	10.380,71
910	S N	78,5	172	*22*	*7,333*	*72*	*64,667*	*86, —*	*88, —*	—	.	64,667	66 .	—	1^k,333	*29.584*	27,217,28	*6.162^{25}*	14.173,17	13.044,11
853	S N	75 .	163	*13*	*4,333*	*63*	*58,667*	*81,5*	*83,5*	—	.	58,667	59 .	—	0^k,333	*26.569*	24.443,48	*5.625*	12,937,50	11.505,98
847	S	84 .	164	*14*	*4,667*	*64*	*59,333*	*82, —*	*84, —*	»	.	59^k,333	64^k.	—	4^k,677	*26.896*	24.744,32	*7.056*	16.228,80	8.515,52
1242	N	81,5	159	*9*	*3, —*	*59*	*56, —*	*79,5*	*81,5*	»	.	56, »	60 .	—	4^k, »	*25.281*	23.258,52	*6.642^{25}*	15.277,17	7.981,35
1141	S N	87 .	169	*19*	*6,333*	*69*	*62,667*	*84,5*	*86,5*	*0 5*	*0^k,750*	63^k,417	71^k.	—	7^k,583	*28.561*	26.276,12	*7.569*	17.408,70	8.867,42
1149	S	88 .	171	*21*	*7. —*	*71*	*64, —*	*85,5*	*87,5*	*0,5*	*0,750*	64,750	70 .	—	5^k,250	*29 241*	26.901,72	*7.744*	17.811,20	9.090,52
1159	L N	86,5	167	*17*	*5 667*	*67*	*61,333*	*83,5*	*85,5*	*1 .*	*1,500*	62,833	67 .	—	4^k,167	*27.889*	25.657,88	*7 482^{25}*	17.209,17	8.448,71
1187	L	84 .	162	*12*	*4, —*	*62*	*58*	*81, —*	*83 .*	*1 .*	*1,500*	59,500	63 .	—	3^k,500	*26 244*	24.144,48	*7.056*	16,228,80	7.915,68
373	S	85,5	164	*14*	*4,667*	*64*	*59,333*	*82, —*	*84 .*	*1,5*	*2,250*	61,583	65 .	—	3^k,317	*26.896*	24.744,32	*7.310^{25}*	16.813,57	7.930,75
1253	N	85,5	163	*13*	*4,333*	*63*	*58,667*	*81,5*	*83,5*	*2 .*	*3, —*	61,667	61 .	0^k,667	—	*26 569*	24.443,48	*7.310^{25}*	16.813,57	7.629,91
998	L	88 .	166	*16*	*5,333*	*66*	*60,667*	*83, —*	*85 .*	*3 .*	*4,500*	65,167	64 .	1^k,167	—	*27.556*	25.351,52	*7 744*	17.811,20	7.540,32
425	S	84 .	158	*8*	*2,667*	*58*	*55,333*	*79.*	*81 .*	*3 .*	*4,500*	59,833	57,5	2^k,333	—	*24.964*	22.966,88	*7.056*	16.228,80	6.738,08
369	L	87,5	165	*15*	*5, —*	*65*	*60, —*	*82,5*	*84,5*	*3 .*	*4,500*	64,500	67,5	—	3^k, »	*27.225*	25.047,00	*7 656^{25}*	17.609,37	7.437,63
780	L	90,5	170	*20*	*6,667*	*70*	*63,333*	*85, —*	*87 .*	*3,5*	*5,250*	68,583	70 .	—	1^k,417	*28.900*	26.588,00	*8.190^{25}*	18.837,57	7.750,43
566	N	88 .	164	*14*	*4,667*	*64*	*59,333*	*82, —*	*84 .*	*4 .*	*6. —*	65,333	68 .	—	2^k,667	*26.896*	24.744,32	*7.744*	17.811,20	6.933,12
565	N	88,5	162	*12*	*4, —*	*62*	*58, —*	*8 , —*	*83 .*	*5,5*	*8,250*	66,250	64 .	2^k,250	—	*26.244*	24,144,48	*7.832^{25}*	18.014,17	6.130,31
Moyenne des 29 sujets		84,5	166	*16*	*5,333*	*66*	*60,667*	*83*	*85*	–	—	60^k,667	65^k,300	—	4^k,633	*27 556*	25.351,52	*7.140^{25}*	16.422,57	8.928.95
d'ap. Quételet à 25 ans)		88,2	168	*18*	*6, —*	*68*	*62, —*	*84*	*86*	*2,2*	*3^k,300*	65,300	66,2	—	0^k,900	*28.224*	25.966,08	*7.779^{24}*	17.892.25	8.073,83

soudaines et imprévues qui apparaissent, sans cause appréciable, chez des sujets dont l'examen n'avait révélé aucune lésion médicale sérieuse.

Diverses méthodes ont été successivement préconisées pour apprécier le degré de la Robusticité constitutionnelle ; il semble toutefois que seule l'anthropologie métrique puisse fournir des éléments sûrs et décisifs à ce point de vue ; l'architecture corporelle, ses proportions, son harmonie constituent de toute évidence des présomptions et des garanties de bon fonctionnement de l'activité organique, réserve faite des multiples interventions d'ordre pathologique.

Nous ne nous arrêterons pas à l'esthésiométrie, à la dynamométrie, à la spirométrie, étudiées tour à tour par les auteurs dans leurs relations avec la force de résistance constitutionnelle ; ces méthodes, déjà fort délicates dans leur application, ne s'adressent qu'à l'une des fonctions biologiques et ne sont pas susceptibles de généralisation. En outre, une sérieuse tare d'erreur pèsera toujours sur leurs résultats par le fait qu'elles dépendent dans une trop large mesure de l'intervention subconsciente ou volontaire du sujet examiné. Ces méthodes enfin exposent à de sérieuses controverses. La dynamométrie, l'esthésiométrie ne sont-elles pas influencées par de nombreux facteurs secondaires, susceptibles de dissimuler les résultats qu'elles pourraient fournir au point de vue de l'état général d'un individu ? Quant à la spirométrie, nous savons actuellement qu'il n'existe aucune relation certaine et constante entre le développement du thorax et la surface pulmonaire, et bien moins encore entre ce développement et la qualité du fonctionnement respiratoire.

Toutes ces méthodes, encore qu'intéressantes, ne peuvent être utilisées que dans des cas particuliers et à titre de contrôle. Ajoutons cependant qu'au point de vue de la clinique, elles gardent toute leur valeur et il résulte notamment des remarquables recherches du Prof. Spehl, que la spirométrie a une importance primordiale pour le diagnostic et le traitement rationnel de la Prétuberculose (¹).

(¹) Dr Spehl, *La Lutte contre la Tuberculose pulmonaire*. Bruxelles, 1919.

Ranke et d'autres ont préconisé, pour apprécier la Robusticité constitutionnelle, la détermination de la Densité organique. Ranke est arrivé à la conclusion que le poids spécifique normal de l'adulte de 25 ans, bien nourri et bien portant, était de 1,0591 (Allemagne). Ce poids spécifique augmenterait avec l'âge et aussi, semble-t-il, sous l'influence d'un travail musculaire intense.

Dans le même ordre d'idées, on a tenté d'utiliser le critérium du volume corporel et différentes formules assez ingénieuses ont été proposées à cet effet. Elles se heurtent toutes aux obstacles que créent les irrégularités de la conformation physique et la diversité des tempéraments.

Wiazemski a assimilé à ce point de vue le corps humain à un cylindre, dont la circonférence serait représentée par le Périmètre thoracique et la hauteur par la Taille du sujet. En rapportant le poids corporel au chiffre obtenu par ce procédé, on pourrait évaluer le Poids spécifique de l'homme et en déduire certaines présomptions de résistance constitutionnelle.

Kouprianow et d'autres auteurs ont eu recours à des calculs analogues et proposé des coefficients de multiplication pour la détermination de la Robusticité. Leur caractère précaire et imprécis se conçoit déjà si l'on songe à l'irrégularité de la forme humaine. Leur inexactitude est, au surplus, mise en évidence par l'écart même des divers coefficients qui ont été suggérés comme multiplicateur fixe.

La méthode des coefficients de multiplication a également été préconisée pour évaluer la vigueur constitutionnelle, en se basant sur les rapports existant à l'état normal entre le poids et la taille de l'homme, l'on a proposé notamment de multiplier par 4 le nombre de décimètres de la Taille. Jansen estime que l'adulte bien portant doit peser 322 grammes par centimètre de taille.

Les chiffres de Lehrnbecker assignent à cette progression la valeur fixe de 0,75 par centimètre de taille. Rappelons dans cet ordre d'idées les intéressants rapprochements mathématiques, établis par Quételet, entre les moyennes du poids et de la taille aux différents âges de la vie. Gautrelet enfin prend la moyenne des 3 indices obtenus comme suit : A) multiplier la taille par 0,4 ; B) poids corporel ; C) multiplier le diamètre acromial, c'est-à-dire la carrure, par la constante 1,66. Le tiers de la somme de ces 3 chiffres correspondrait au poids normal à 30 ans.

Nos recherches de contrôle sur la valeur de ces méthodes de multiplication par un coefficient fixe ne nous ont donné que des résultats peu satisfaisants. De valeur incontestable pour des études d'ensemble et des calculs de moyennes, ces évaluations sont d'une approximation trop grande, partant d'application peu sûre, pour un sujet déterminé; nous y avons renoncé.

Pour être complet, il nous faut encore signaler l'ingénieuse tentative du Dr Lassabière pour évaluer l'étendue de la surface corporelle de l'enfant; quoique sa méthode, telle qu'il l'a exposée au Congrès de l'Éducation familiale de Bruxelles en 1910, soit difficilement applicable à l'adulte, nous tenons à indiquer les deux procédés préconisés par notre confrère pour évaluer la surface du corps. Le premier consiste à multiplier le carré du chiffre obtenu pour le Périmètre thoracique, mesuré à la hauteur du mamelon, par la constante 2,3 — soit $Pr^2 \times 2,3$. Le second procédé consiste à multiplier le carré de la taille par la constante 0,92 — soit $T^2 \times 0,92$. Encore une fois, nos expériences de contrôle chez l'adulte nous ont démontré que la méthode ne lui était pas applicable, ce qui s'explique vraisemblablement par la multiplicité des causes susceptibles de modifier le chiffre du poids et du périmètre thoracique, même à l'état normal. Il nous suffira de constater d'ailleurs que l'écart entre les chiffres obtenus successivement par les deux procédés Lassabière varie entre 25 et 45 °/₀ (¹).

Bien supérieurs, pensons-nous, à toutes les méthodes que nous venons d'exposer sommairement sont les procédés d'ordre anthropométrique, basés sur les relations régulières qui existent entre les différentes mensurations corporelles. Toute une série de travaux, émanant notamment de l'Ecole anthropologique française, ont mis en évidence l'intérêt des rapports anthropométriques, non seulement chez l'homme normal, mais aussi chez les tarés au point de vue biologique. Chez ces derniers, ils viennent souligner d'une manière nette leur origine dégénérative. Rappelons surtout les recherches si intéressantes à cet égard, faites au Laboratoire de médecine légale de Lyon sous l'inspiration des Profes-

---

(¹) Voir tableau ci-joint. p. 145.

seurs Lacassagne et Martin ; les travaux, très documentés, de Perrier sur les détenus de la prison de Nîmes, sont également à signaler dans cet ordre d'idées.

Abstraction faite de leur intérêt criminologique, les relations anthropométriques qui existent entre la Taille, le Poids et le développement du Thorax constituent des bases solides pour évaluer la normalité biologique et la résistance constitutionnelle de l'individu. Plusieurs procédés de détermination de la Robusticité organique s'inspirent de ces rapports anthropométriques ; parmi eux, les méthodes préconisées par Tartière et Pignet méritent de retenir l'attention. Il nous paraît utile, avant d'en exposer le mécanisme, de rappeler quelques notions physiologiques relatives au poids, à la taille et au périmètre thoracique, envisagés chez l'homme normal.

Poids. — Pour Broux, le poids corporel de l'adulte normal se rapprochait sensiblement du chiffre des centimètres de la taille dépassant le mètre, et cette opinion est encore généralement acceptée ; on s'accorde toutefois à admettre une tolérance assez large pour les chiffres du poids des sujets dont la taille dépasse 1 m. 65. Pour les tailles inférieures à 1 m. 65, cet écart doit atteindre 7 kgs. avant d'entraîner une signification pathologique ; il pourrait aller à 12, et pour quelques auteurs à 15 kgs. pour les sujets de haute stature. Tel est l'avis défendu par la plupart des médecins militaires, se plaçant au point de vue de l'incorporation des recrues. Il importe de remarquer qu'il s'agit ici du poids minimum exigé pour le service militaire, indépendamment de tout examen médical ; c'est la raison pour laquelle, en France et en Belgique, les conscrits dont la pesée indique un chiffre inférieur à 50 kgs., sont ajournés.

Les recherches du Dr Titeca dans le milieu militaire belge sont généralement invoquées à l'appui de cette opinion ; récemment encore, le Dr Wibin, de l'armée belge, insistait sur ce point dans un rapport en date de juillet 1913. A son avis, la tolérance ne peut dépasser 12 à 15 kgs. pour le poids des conscrits dont la taille est supérieure à 1 m. 65. Notre distingué confrère Maistriau, médecin de régiment de 1re classe, estime que l'on doit se montrer moins large dans l'appréciation des poids insuffisants.

L'échelle de tolérance progressive qu'il préconisait a été acceptée dans ses grandes lignes par la « Commission de Revision des Tableaux des causes d'exemption du service militaire », comme une des bases d'appréciation de la vigueur constitutionnelle pour les cas où l'examen médical laissait quelque doute; le Dr Maistriau admet comme limite les chiffres suivants :

TAILLES	TOLÉRANCE pour la formule « Poids = Décimales de la Taille »
1 m. 54 à 1 m. 59	4 kgs.
1 m. 60 à 1 m. 64	6 »
1 m. 65 à 1 m. 70	8 »
1 m. 71 à 1 m. 75	10 »
1 m. 76 et plus.	12 »

Il y a lieu toutefois de le répéter, cette tolérance se justifie essentiellement par l'âge auquel s'opère le recrutement militaire. A 19 et 20 ans, le développement corporel est souvent incomplet, ce qui entraîne un notable déficit du poids.

La croissance étant inachevée, les systèmes osseux et musculaire n'ont pas acquis leurs dimensions et leur densité définitives. Une tolérance semblable ne s'expliquerait plus pour ce motif à partir de la 25me année; en revanche, d'autres facteurs organiques interviennent alors pour modifier le poids et l'augmenter dans la plupart des cas; signalons, dans les limites physiologiques, l'influence du tempérament qui, avec les progrès de l'âge, détermine souvent un certain degré de pléthore et d'obésité ; le genre de vie; les conditions d'hygiène et d'exercice musculaire; la nutrition ; le surmenage ; il faut y ajouter la répercussion des divers états pathologiques, qui entraînent une détérioration constitutionnelle plus ou moins accusée, et exceptionnellement un accroissement factice du poids à signification morbide.

Quételet avait déjà insisté sur le relèvement progressif du poids entre 20 et 30 ans ; nous reproduisons ci-dessous ses moyennes chez l'homme et la femme pendant cette période décennale.

AGE	ACCROISSEMENT ANNUEL DU POIDS (QUÉTELET)	
	Hommes	*Femmes*
20	59,5	52,2
21	61,2	54,3
22	62,9	54,8
23	64,5	55,2
25	66,2	54,8
27	65,9	55,1
30	66,1	55,3

D'après nos recherches personnelles, on peut admettre que le poids corporel tend à augmenter dans des conditions physiologiques pendant une période de temps qui varie d'après les individus et qui peut se prolonger jusqu'à l'âge de 45 à 50 ans ; cette règle toutefois souffre beaucoup d'exceptions.

La détermination du poids moyen chez l'homme normal a fait l'objet de nombreuses statistiques ; malheureusement, elles se rapportent presque toutes à l'adulte de 19 à 22 ans et, nous l'avons déjà constaté, le développement organique n'est que rarement parachevé à ce moment.

Nous croyons intéressant de rappeler dans cet ordre d'idées la statistique relevée par le D^r Chassagne, médecin-major de l'armée française, sur 400 élèves de l'École militaire de gymnastique de Joinville et sur 440 recrues de taille au-dessus de la moyenne. Parmi eux il s'en trouvait 97 dont le poids était égal à la taille ; chez la plupart, il lui était supérieur ; dans un petit nombre de cas seulement, il la dépassait. En tenant compte du déchet de 1388 kgs., provenant du second groupe et de l'excédent de 195 kgs., fourni par les hommes à poids supérieur aux décimales de la taille, Chassagne arrive à la conclusion que le poids moyen des 840 sujets examinés par lui — tous en bonne santé et bien constitués puisque incorporés ou élèves de l'École militaire de gymnastique — était inférieur de 1800 grammes au chiffre des centimètres de la taille.

Le Dr Roblot, dont les recherches sur la détermination du poids normal à l'âge de 25 ans sont à retenir, propose le procédé arithmétique suivant pour l'évaluation du poids physiologique chez un sujet donné :

1. — Diviser par 3 le nombre de centimètres de la taille dépassant 1 m. 50 ;

2. — Retrancher le quotient obtenu du chiffre des décimales au delà d'un mètre ;

3. — Si le périmètre thoracique du sujet dépasse la demi-taille de plus de 2 centimètres, il faut ajouter au résultat le produit de la multiplication du nombre de décimales au delà d'un mètre par la constante 1,5.

Exemple. — Sujet dont la taille est de 1 m. 75 et le périmètre thoracique de 95 centimètres :

$$75 - \frac{25}{3} + (5{,}5 \times 1{,}5) = 74 \text{ kgs. } 920 \text{ grammes.}$$

Afin d'étudier dans la pratique l'exactitude de la méthode Roblot, nous avons réuni une série de 29 sujets, tous âgés de 25 ans, dont le poids avait été considéré comme normal ; il s'agissait de détenus bien portants, sans tares médicales antérieures. Ils se répartissaient, au point de vue de la Robusticité, parmi les indices de 10 à 32 (Pignet). Leur taille était comprise entre 1 m. 53 et 1 m. 80. Pour 15 d'entre eux, le périmètre thoracique ne dépassait pas la demi-taille de plus de 2 centimètres ; chez 12, au contraire, il en était ainsi, et l'écart variait de 10,5 à 5,5 cm., ce qui imposait la correction conseillée par Roblot et que nous avons indiquée ci-dessus. Dans 2 cas enfin le périmètre thoracique était égal à la demi-taille.

Voici les résultats que nous avons obtenus et qui ont été consignés dans le tableau ci-joint, p. 145. Dans la 1re série, comprenant 15 sujets, dont le poids variait de 75 à 89 kgs. et la taille de 1 m. 61 à 1 m. 79, l'écart entre le chiffre calculé par la méthode Roblot et le poids réel du sujet, poids que nous avions considéré comme s'écartant peu de la normale, a atteint 3 kgs. dans 11 cas. Dans un seul cas il n'était que de 300 grammes. Dans la 2^{me} série, de 12 sujets, cet écart atteignait 3 kgs. dans 6 cas, 2 kgs. dans 3 cas ; 1 kg. 400, 1 kg. 100 et 0 kg. 600 respectivement dans les 3 autres cas. Chez les 2 sujets, dont le périmètre thoracique égalait la demi-taille, cet écart atteignait 4 kgs.

Dans ces conditions, nous avons renoncé en règle générale à la méthode conseillée par le D^r Roblot pour déterminer le poids normal de l'adulte.

Nos recherches personnelles sur le Poids corporel nous ont permis d'établir que cette notion — beaucoup plus complexe qu'on ne se l'imagine à première vue — subit d'importantes fluctuations, même à l'état physiologique, sous l'influence d'une série de facteurs constituant la personnalité biologique du sujet examiné ; nous résumons ici les conclusions principales de ces recherches.

Le tempérament du sujet exerce une incontestable influence sur le poids physiologique ; l'amplitude des variations normales qu'il peut lui imprimer atteint plus de 7 kgs. — abstraction faite de tout autre facteur anthropométrique ou médical.

Toutes conditions égales d'ailleurs, le poids moyen des détenus examinés par nous (831) s'ordonnait comme suit pour les divers tempéraments. *(Voir tableau, page 153).*

La taille du sujet exerce une influence bien plus considérable encore ; disons toutefois que les écarts observés par nous ont été moins grands que ceux que théoriquement l'on pouvait prévoir : l'amplitude des oscillations du poids moyen des individus, sériés au point de vue de la taille, a atteint près de 17 kgs., alors que l'écart entre les tailles moyennes des « Très petits » (1 m. 52 à 1 m. 55) et des « Très grands » (1 m. 76 à 1 m. 80) est de 236 mm. *(Voir tableau, page 153).*

Nous déduisons des chiffres ci-dessus que l'écart entre le nombre de kilogs. du poids moyen et les décimales de taille moyenne varie de (+ 1,28) pour les très petits à (— 5,44) pour les très grands, soit une oscillation de 6,72 d'amplitude.

Influence du Tempérament sur le Poids

	Moyennes générales	TEMPÉRAMENTS :					
		Sanguin	Sanguin-nerveux	Lymphatico-nerveux	Lymphatique	Nerveux	Bilieux et Bilieux-nerveux
Nombre de sujets :	831 (1)	152	122	90	161	242	56
Taille moyenne :	1 m. 6676	1 m. 6697	1 m. 6643	1 m. 6564	1 m. 6633	1 m. 6762	1 m. 6670
Poids moyen :	64 k. 551	68 k. 276	64 k. 615	62 k. 889	63 k. 450	64 k. 510	60 k. 768
Écart entre le poids moyen et les décimales de la taille moyenne :	— 2,209	+ 1,306	— 1,815	— 2,751	— 2,880	— 3,109	— 5,932

Influence de la Taille sur le Poids

	Moyennes générales	SÉRIATION DE LA TAILLE :					
		153/155	156/160	161/165	166/170	171/175	176/180
Nombre de sujets :	831	28	88	219	277	162	57
Taille moyenne :	1 m. 6676	1 m. 5383	1 m. 5835	1 m. 6326	1 m. 6807	1 m. 7260	1 m. 7744
Poids moyen :	64 k. 551	55 k. 107	57 k. 595	62 k. 286	65 k. 600	68 k. 690	72 k. 000
Écart entre le poids moyen et les décimales de la taille moyenne :	— 2,209	+ 1,277	— 0,755	— 0,974	— 2,470	— 3,910	— 5,440

---

(1) Y compris 8 sujets de tempérament mixte non nerveux (sanguins-lymphatiques — lymphatico-bilieux — sanguins-bilieux) non analysés séparément.

Disons-le en passant, les variations qu'imposent au poids corporel le tempérament et la taille du sujet ne doivent ni s'additionner, ni s'opposer ; car elles se confondent dans une large mesure. En effet, nos recherches pour déterminer leur importance respective, ont établi qu'il existe d'étroites corrélations entre ces deux facteurs anthropologiques.

Ce serait trop nous écarter de notre sujet que d'y insister par le détail ; aussi nous sommes-nous borné à mettre en évidence les fluctuations de la taille moyenne suivant le Tempérament ; nous les avons indiquées dans le tableau (page 153).

Autre conclusion de nos investigations sur la fréquence des poids physiologiques chez les sujets de tailles différentes : les modalités subnormales, rares entre 1 m. 60 et 1 m. 70, se multiplient à mesure qu'on s'écarte de ces tailles pour devenir, en règle générale, nettement anormales en dessous de 1 m. 52 et au-dessus de 1 m. 80 ; aussi avons-nous éliminé de nos recherches personnelles sur le poids normal tous les sujets à tailles extrêmes.

Enfin, après avoir effectué la correction imposée par la taille et le tempérament du sujet, on peut admettre que le poids physiologique théorique correspond exactement, chez l'homme dont le développement organique définitif est acquis (25 ans) (1), aux décimales de la taille.

Dans la pratique, on concédera, à cet égard, une tolérance de 1 kg., en deçà et au delà de ce chiffre.

Doivent — d'après nos recherches — être considérés comme subnormaux, c'est-à-dire sans signification pathologique autre que celle d'une infériorité constitutionnelle, amendable par l'exercice ou le régime, ou d'une débilitation passagère de l'organisme, les poids corporels qui sont inférieurs ou supérieurs de 10 kgs. au chiffre des Décimales de la Taille.

Le domaine de l'anormalité biologique et de la Pathologie commence au delà de ces frontières, avec cette réserve qu'il est quelques rares exceptions à cette loi pour les poids très élevés.

---

(1) Nous négligeons ici le minime accroissement de taille et d'élargissement du squelette qui s'observe entre la 25me et la 34me année, stade ultime, semble-t-il, de la période de croissance organique.

Notre série de 831 détenus examinés comprenait 20 °/o environ de poids physiologiques — 60 °/o de poids subnormaux, dont un peu plus de la moitié de poids excessifs — et 20 °/o de poids anormaux, dont 1/4 par excès et 3/4 par insuffisance. Cette répartition varie d'ailleurs avec la taille, ainsi que l'établit le tableau suivant.

Répartition physiologique du poids — Ses variations avec la taille

RÉPARTITION DES POIDS	Moyennes générales	RÉPARTITION SUIVANT LES GROUPES DE TAILLES :					
		153/155	156/160	161/165	166/170	171/175	176/180
Normaux :	20,55 °/o	21.4 °/o	28,1 °/o	18,5 °/o	21,3 °/o	18,6 °/o	18,3 °/o
Subnormaux :	58.78 »	53,6 »	55,0 »	63,4 »	57,8 »	56,6 »	60,0 »
Anormaux :	20,67 »	25,0 »	16,9 »	18,1 »	20,9 »	24,8 »	21,7 »

La conclusion générale qui se dégage de notre étude du poids corporel est que cette donnée ne peut être acceptée sans correction comme critérium de Robusticité constitutionnelle ; alors même que le poids du corps est rapporté à la taille du sujet et à son tempérament, il faut encore tenir compte de deux facteurs essentiels : l'état de la nutrition et l'existence de tares pathologiques : c'est-à-dire que l'on ne pourra en aucun cas, se baser sur ce seul élément — admis jadis comme axiome en médecine — pour affirmer l'état de santé d'un individu.

En corollaire, ces corrections faites, le poids corporel deviendra une des meilleures bases d'appréciation pour affirmer le degré de Robusticité.

Nous basant sur nos relevés anthropométriques complets, nous avons pu établir pour notre milieu pénitentiaire observé (831 détenus de 20 à 50 ans et de 1 m. 52 à 1 m. 80), que l'accroissement physiologique du poids suivant la taille, est en moyenne de 650 grs. par cm. à partir de 1 m. 60; entre 1 m. 52 et 1 m. 58, le poids corporel moyen est égal ou légèrement supérieur aux décimales de la taille et il est un peu inférieur à celles-ci chez les sujets de 1 m. 58 et 1 m. 59.

Nous l'avons dit toutefois, il faut dans la pratique accorder une tolérance de 3 kgs., correspondant aux variations d'ordre physiologique du poids corporel.

Exemple : A une taille de 1 m. 67 correspond normalement un poids de 64 kg. 550 ; mais on peut admettre comme physiologiques ceux qui sont compris entre 63 kg. 500 et 65 kg. 500.

La Taille. — De même que le poids, la taille varie sous l'influence de nombreux éléments organiques, tant dans le domaine physiologique que pathologique ; aussi l'introduction de ce facteur dans une formule de Robusticité constitutionnelle doit-elle se faire sous certaines réserves, car elle peut entraîner de sérieuses erreurs.

Le développement de la taille n'a de réelle importance biologique que s'il correspond à un ensemble organique, harmonieux et bien proportionné. On sait, en effet, depuis longtemps qu'avec l'élévation de la taille ne croissent pas la force et la résistance constitutionnelle; bien au contraire, l'expérience l'a démontré et les statistiques médicales militaires notamment en font foi, les hommes les plus vigoureux se rencontrent surtout parmi les sujets de taille moyenne ou petite.

C'est la raison pour laquelle une tendance très nette s'est manifestée en ces dernières années pour abaisser le chiffre minimum de la taille requise pour l'incorporation des recrues; en Belgique, ce minimum a été maintenu à 1 m. 54, alors qu'en France il descendait à 1 m. 52. Il faut tenir compte toutefois de l'écart assez sensible, existant entre les chiffres de la taille moyenne en France et en Belgique. Notons-le en passant, l'intervention du facteur ethnique se traduit quelquefois d'une manière si importante dans les mensurations anthropométriques, qu'elle rend malaisée et parfois même impossible la comparaison de statistiques relevées en des pays différents ; aussi nous bornerons-nous à rappeler les conclusions des travaux relatifs à la taille en Belgique et les relations de cet élément anthropologique avec les facteurs d'ordre pathologique.

Signalons tout d'abord les recherches très intéressantes du Professeur Houzé, établissant que les tuberculeux héréditaires ont une taille plus élevée que les normaux de même race; tous leurs diamètres thoraciques sont inférieurs à la normale et leur angle xyphoïdien est souvent très aigu. L'élévation de la taille semble donc créer une prédisposition aux maladies respiratoires et à la tuberculose notamment. Les recherches de Houzé ont confirmé au surplus les constatations relevées dans le milieu militaire. Il y a une trentaine d'années déjà, le Dr Titeca établissait, d'après la statistique des recrues incorporées en Belgique de 1879 à 1886, que le périmètre thoracique décroît avec l'élévation de la taille et que la constitution physique des grands a plus de chance d'être faible que celle des petits. Depuis lors, les médecins militaires belges ont maintes fois confirmé ces constatations par des arguments d'ordre pathologique ; les cas de bronchite et de tuberculose, les maladies, les décès sont plus nombreux dans les régiments dont la taille réglementaire est le plus élevée ; la résistance à la fatigue y est moindre et le développemeat thoracique médiocre ; les constitutions physiques y sont en général moins bonnes.

Le Dr Wibin rappelait dans son rapport (1913) que les meilleurs marcheurs de l'armée sont compris entre les tailles 1 m. 62 et 1 m. 68 ; ils restent bons entre 1 m. 54 et 1 m. 62 ; ils sont très médiocres ou mauvais au-dessous de 1 m. 54 et au-dessus de 1 m. 70.

La signification anthropologique et la normalité des très petites tailles ont souvent été discutées. Nos recherches personnelles (1) nous ont démontré que, sauf quelques exceptions, les tailles de 1 m. 51 à 1 m. 54 ne se différencient par aucun caractère anormal ou pathologique du groupe des sujets dont la taille varie de 1 m. 55 à 1 m. 60 ; parmi les conscrits de 1 m. 51 à 1 m. 549, la proportion de malades et d'infirmes n'est pas supérieure à celle des miliciens de taille moyenne ; les chiffres du périmètre thoracique sont au moins aussi bons que ceux des sujets de 1 m. 55 à 1 m. 60 qui sont classés comme les meilleurs; enfin la proportion parmi eux de constitutions faibles est inférieure à celle des groupes à stature plus élevée. Aussi avons-nous conclu en 1909 que les très petites tailles ne résultent nullement de facteurs pathologiques, mais bien de variations « physiologiques » de la croissance, dont quelques-unes semblent relever de causes héréditaires. Nos recherches depuis lors dans le domaine pénitentiaire n'ont fait que confirmer cette conclusion ; tout au moins aucun doute n'est-il possible pour les sujets de 1 m. 52 à 1 m. 55.

---

(1) *La Taille en Belgique*. MÉM. SOC. ANTHROP. DE BRUXELLES, 1909.

Dans notre étude sur la « Taille en Belgique », nous avons insisté sur les caractéristiques de cet élément anthropologique en notre pays. Rappelons notamment que la Taille moyenne des recrues doit être fixée à 1 m. 658 millimètres ; ce chiffre s'élève insensiblement jusqu'au début de la trentaine pour s'arrêter à la fin de la croissance à la moyenne de 1 m. 669 mm. La taille moyenne définitive varie, dans nos différentes provinces, du maximum, 1 m. 6717 (Limbourg), au minimum, 1 m. 6546 (Hainaut). La répartition des groupes de tailles est également différente dans les diverses provinces ; dans l'ensemble du pays elle se fait comme suit :

Très petites —	au-dessous de 1 m. 55 —	2,0 %
Petites —	de 1 m. 55 à 1 m. 60 —	11,5 »
Moyennes —	de 1 m. 60 à 1 m 65 —	28,0 »
	de 1 m. 65 à 1 m. 70 —	35,5 »
Hautes —	de 1 m. 70 à 1 m. 75 —	18,0 »
Très hautes —	au delà de 1 m. 75 —	5,0 »

Parmi les très petites tailles on compte 80 % d'hommes normaux ; 12 % d'entre elles n'atteignent pas 1 m. 51.

Il est à noter aussi que, d'après les statistiques des cas d'exemption du service militaire, la taille moyenne des recrues éliminées pour maladies, infirmités ou faiblesse de complexion est supérieure d'un centimètre environ à la taille moyenne des soldats incorporés.

Enfin, l'on observe une légère tendance au relèvement de la taille en Belgique. D'après nos calculs, elle dépassait en 1907 de 5 millimètres la taille de 1885 ; le même phénomène anthropologique s'observe d'ailleurs dans la plupart des armées d'Europe.

Le Périmètre thoracique. — Les intéressantes relations biologiques et pathologiques du périmètre thoracique, lui ont fait accorder par les auteurs une place de premier rang parmi les éléments d'appréciation de la Robusticité constitutionnelle ; son importance a surtout été mise en relief au point de vue de la sélection militaire. Les médecins de l'armée ont nettement établi l'infériorité vitale des soldats à périmètre thoracique insuffisant, argument qui a contribué à renforcer la valeur médicale des mensurations du thorax.

Loin de nous la pensée de vouloir en restreindre l'importance ou de contester l'intérêt des déductions qu'un mauvais périmètre permet de formuler au sujet de la résistance organique à la fatigue, à la maladie et à l'usure.

Mais il ne faut pas perdre de vue que la prise du périmètre thoracique est une mensuration éminemment délicate et que, notamment quand elle a pour but de déterminer l'écart entre les circonférences à l'inspiration et à l'expiration, sa justesse dépend dans une certaine mesure de la bonne volonté du sujet mensuré. Nous croyons donc utile d'attirer l'attention sur les tares possibles de la méthode; elles dépendent de causes multiples (¹).

Constatons tout d'abord que les résultats des mensurations thoraciques en général, et du Périmètre en particulier, ne peuvent être comparés entre eux qu'avec grande prudence ; cette réserve est imposée par les conditions anatomiques de la poitrine, si variables chez les différents sujets. La forme même du thorax, la situation et la saillance des angles de l'omoplate, les asymétries de conformation d'origine fonctionnelle ou osseuse que l'on observe fréquemment à cette région du tronc, les inégalités d'épaisseur du sein et des masses musculaires, thoraciques et dorsales, la richesse

---

(¹) La critique des erreurs auxquelles expose la Périmétrie et des difficultés de sa technique, a été parfaitement synthétisée dans l'intéressant ouvrage du Professeur Spelh, *La lutte contre la turbercelose pulmonaire*. 1919. Avec lui nous estimons que le périmètre *moyen* n'a aucune valeur biologique ; toutefois, bien exécutées, les mensurations du thorax donnent des résultats que nous croyons au moins aussi importants et aussi sûrs que ceux de la spirométrie. Les deux méthodes, loin de s'exclure, devraient se contrôler pour mieux assurer le diagnostic de la Robusticité constitutionnelle.

variable du tissu adipeux et de la glande mammaire, dépendant dans une mesure au moins égale de l'état de la nutrition et du tempérament du sujet, sont tous éléments qui peuvent altérer la justesse des résultats de l'épreuve périmétrique et qui, tout au moins, en rendent la comparaison délicate.

L'influence de la fonction pulmonaire s'exerce largement, elle aussi, sur le développement du thorax. La manière de respirer, la gymnastique respiratoire, et d'autre part, les maladies de la poitrine, notamment la tuberculose, les adhérences pleurales viennent le modifier profondément. Aussi peut-on observer un écart relativement considérable entre les chiffres obtenus chez différents sujets pour les circonférences à l'inspiration et à l'expiration maxima. Il faut tenir compte en outre de la manière dont l'individu mensuré respire et dont il exécute les prescriptions assez minutieuses qu'impose un relevé précis du pourtour de la poitrine. Toutes ces raisons nous ont fait préférer en règle générale le Périmètre expiratoire, en Anthropométrie du moins. Enfin, chaque opérateur apporte à cette mensuration sa note personnelle, ce qui complique encore le problème.

Il faut attribuer vraisemblablement à ces causes d'erreurs et à ces difficultés de technique les différentes méthodes de mensuration, suivies par les auteurs dans la périmétrie thoracique.

Encore cette diversité ne serait-elle qu'ennuyeuse si chaque mensurateur indiquait avec précision le procédé anthropométrique qu'il a adopté dans ses recherches ; la plupart du temps, cette notion est négligée, ce qui rend toute utilisation des travaux de l'auteur impossible en vue d'une étude de comparaison ou de contrôle. On ne peut, en effet, comparer entre eux les périmètres pris à différentes hauteurs du thorax ou à des moments variables du cycle respiratoire. Le choix de la méthode est d'ailleurs difficile : chacun des procédés préconisés étant passible d'erreurs.

Passons-les rapidement en revue.

Si l'on se place au point de vue de la région mensurée, trois périmètres thoraciques différents sont utilisés par les auteurs.

1°) Le *Périmètre axillaire*, qui se mesure au-dessous des aisselles ; il est appelé encore « sus-mammaire » parce qu'il se prend habituellement au-dessus du mamelon ; c'est le procédé suivi par Papillault dans ses mensurations sur le cadavre. A ce niveau, le thorax est rétréci et peu extensible ; mais les masses musculaires et l'épaisseur de l'omoplate compensent bien au delà la réduction d'amplitude respiratoire ; cette mensuration correspond au point de vue fonctionnel au lobe supérieur du poumon ; elle se prend généralement dans l'intervalle des mouvements respiratoires.

2°) Le *Périmètre sous-pectoral* est celui auquel recourent habituellement les médecins militaires (¹).

Les indications si intéressantes que fournissent les travaux et statistiques des médecins militaires au point de vue de la Robusticité organique, et qui servent de base pour éliminer de l'ar-

---

(¹) En Belgique, l'Arrêté Royal du 10-1-14 a déterminé comme suit les conditions de l'exemption définitive ou temporaire du service militaire pour faiblesse constitutionnelle.

Tableau B. — (Exemption définitive).

B. 62. — Débilité congénitale ou acquise, non susceptible d'amélioration rapide.

Seuls peuvent être rangés sous cette rubrique les hommes répondant à deux des conditions suivantes :

a) Périmètre thoracique inférieur de 3 centimètres aux chiffres indiqués au tableau ci-après ;

b) Poids inférieur de 4 kgs. aux chiffres indiqués au tableau ci-après ;

c) Être atteint de plusieurs infirmités ou tares pathologiques, indiquant un état d'infériorité constitutionnelle, mais insuffisantes à elles seules pour motiver l'exemption.

Note. — Le périmètre thoracique sera mesuré horizontalement, le ruban métrique inextensible étant appliqué exactement sous l'angle inférieur des omoplates, le sujet, debout, ayant les bras élevés perpendiculairement et comptant lentement à haute voix.

La mensuration doit se prendre exactement après l'expiration, c'est-à-dire dans l'intervalle entre deux mouvements respiratoires.

Tableau C. — **(Exemption temporaire).**

C. 62. — **Faiblesse de complexion.**

Pour être exempté, le sujet doit réunir deux des conditions suivantes :

a) Périmètre thoracique inférieur aux chiffres indiqués dans le tableau ci-après ;

b) Poids inférieur aux chiffres indiqués dans le tableau ci-après ;

c) Être atteint de plusieurs infirmités ou tares pathologiques, indiquant un mée les débiles, se rapportent toutes aux résultats obtenus par ce procédé.

Le Périmètre sous-pectoral se prend horizontalement, le sujet debout, la poitrine redressée, comptant lentement à haute voix, le ruban métrique étant appliqué exactement sous l'angle inférieur des omoplates ; en avant il passe habituellement un peu

---

certain degré de débilité constitutionnelle, mais insuffisantes à elles seules pour motiver l'exemption.

Tableau indiquant les chiffres minima du poids et du périmètre thoracique exigés pour l'aptitude militaire

TAILLES	POIDS (*)	PÉRIMÈTRE THORACIQUE (**)	TAILLES	POIDS (*)	PÉRIMÈTRE THORACIQUE (**)
1 m. 54	50 kgs.	78 cm.	1 m. 66	58 kgs.	81 cm.
1 m. 55	51 »	78 »	1 m. 67	59 »	81 »
1 m. 56	52 »	78 »	1 m. 68	59 »	81 »
1 m. 57	52 »	79 »	1 m. 69	60 »	82 »
1 m. 58	53 »	79 »	1 m. 70	61 »	82 »
1 m. 59	54 »	79 »	1 m. 71	61 »	82 »
1 m. 60	54 »	80 »	1 m. 72	62 »	82 »
1 m. 61	55 »	80 »	1 m. 73	62 »	82 »
1 m. 62	56 »	80 »	1 m. 74	63 »	83 »
1 m. 63	56 »	80 »	1 m. 75	63 »	83 »
1 m. 64	57 »	81 »	1 m. 76	64 »	83 »
1 m. 65	58 »	81 »	et +		

(*) Tolérance de 3 kgs. pour les volontaires de moins de 19 ans.
(**) » 3 cm. » » »

En Italie, un périmètre thoracique inférieur à 75 cm. entraîne la réforme du service militaire ; à 80 cm., l'exemption temporaire.

En Suisse, il doit être égal à la demi-taille et au moins de 80 cm.

au-dessous des mamelons(1), ou, ce qui vaudrait mieux, au-dessous du bord inférieur du grand pectoral. Généralement cette mensuration se prend immédiatement après l'expiration dans le court intervalle qui sépare les mouvements respiratoires : ceci afin d'éviter une distension anormale du thorax. Le plus souvent, on demande au sujet d'élever les bras verticalement ; ce détail de technique qui lui impose un mouvement anormal peut offrir certains inconvénients ; à notre avis, il vaut mieux adopter pour cette mensuration la position horizontale des bras ou même leur abaissement naturel le long du tronc. On ne saurait assez insister en tous cas sur la nécessité d'adopter pour la détermination de ce périmètre une méthode rigoureuse et uniforme.

D'après Wiazemski, dont les statistiques sont basées sur les périmètres sus- et sous-mammaires, le premier de ceux-ci, pris au repos respiratoire, correspond habituellement au second, mensuré au moment de l'inspiration ; à 17 ans 1/2, l'écart moyen de ces deux mensurations n'est que de 8 millimètres (2) (867 et 859).

3°) Le *Périmètre xyphoïdien* traduit le plus régulièrement la normalité physiologique des poumons.

Malheureusement, comme le constate le médecin militaire

---

(1) La ligne mamelonnaire indiquée quelquefois peut, en dehors des inconvénients dus au volume inégal du sein et de l'épaisseur variable des muscles pectoraux, entraîner certaines erreurs en raison du manque de fixité anatomique de la situation du mamelon.

Des recherches de Papillault sur 200 cadavres parisiens il résulte que chez l'homme cette situation peut varier. Le mamelon est le plus souvent situé à la hauteur de la 4me côte ou un peu au-dessous d'elle ; assez fréquemment on le trouve au niveau du 4me espace intercostal ; quelquefois il correspond à la 5me côte, et, exceptionnellement, à la partie inférieure du 3me espace intercostal. Chez les sujets à poitrine rentrante et épaules tombantes, le mamelon paraît être situé beaucoup plus bas ; mais, en raison de la voussure du dos, l'obliquité des côtes est plus accentuée, ce qui fait que, somme toute, le rapport anatomique ne varie guère. En arrière, le mamelon correspond sensiblement au corps de la 7me vertèbre dorsale.

(2) Certains auteurs parlent de « Périmètre médian », c'est-à-dire pris à distance égale entre l'axillaire et le xyphoïdien ; en pratique, ses résultats se confondent sensiblement avec ceux du Périmètre sous-pectoral.

Wibin, son utilisation pour le choix des recrues est actuellement rendue impossible par l'absence de statistiques anthropométriques, permettant de le rapporter au périmètre sous-pectoral en vigueur dans les Conseils de milice.

Si nous envisageons le Périmètre thoracique par rapport à la respiration, nous constatons une fois de plus de notables variantes dans les procédés de mensuration ; il faut distinguer ici la circonférence mesurée au moment du repos respiratoire — habituellement en usage au Conseil d'aptitude militaire — la circonférence à l'expiration et la circonférence à l'inspiration. Encore faut-il remarquer que certains auteurs parlent à ce sujet des mouvements respiratoires habituels, correspondant donc à une amplitude pulmonaire moyenne, tandis que d'autres recherchent l'inspiration et l'expiration maxima ou forcées, correspondant la première à la capacité respiratoire la plus grande des poumons, la seconde à l'expulsion presque complète de l'air résiduel. L'intérêt de ces notions varie nécessairement avec le point de vue des études physiologiques ou médicales, basées sur la Périmétrie du thorax.

Enfin le périmètre moyen, c'est-à-dire la moyenne des circonférences inspiratoire et expiratoire, est quelquefois utilisé au cours de recherches sur la Robusticité constitutionnelle ; l'écart entre les deux circonférences thoraciques correspond à l'*amplitude respiratoire* qui constitue un élément clinique des plus intéressants (¹).

Ces nombreuses variantes dans les méthodes de Périmétrie du thorax expliquent à suffisance le manque de concordance dans les résultats obtenus par les auteurs. C'est la raison pour laquelle nous avons tenu à faire une série d'expériences sur les relations existant à l'état normal et pathologique entre les différents périmètres du thorax.

Nous en résumons succinctement les résultats dans une série de propositions, dont nous réservons la démonstration pour un travail ultérieur.

(¹) Certains auteurs ont essayé de déterminer le rapport normal entre le Périmètre thoracique et la Taille; nous rappelons à cet égard les chiffres de Magnan

I. La périmétrie thoracique se trouve parfaitement définie par la détermination des deux éléments : 1. La mensuration à l'expiration ; 2. L'amplitude respiratoire.

II. La meilleure position pour prendre le périmètre xyphoïdien est celle du « soldat sans armes », les bras pendants, les épaules dégagées, la tête droite ; le moment respiratoire à choisir est la fin de l'expiration. La position « les bras horizontaux » est bonne également; elle devient indispensable pour la périmétrie axillaire.

III. Le périmètre xyphoïdien donne l'amplitude respiratoire la plus élevée et la plus constante ; la circonférence thoracique, à ce

---

et Sellet ; nous ignorons malheureusement à quel genre de périmètre thoracique ils s'appliquent.

ANS	TAILLE	PÉRIMÈTRE THORACIQUE	RAPPORT $\frac{P}{T}$
15	1 m. 62	73	0,45
16	1 m. 65	77	0,46
17	1 m. 69	80	0,47
18	1 m. 69	82	0,48
19	1 m. 71	83	0,48
20	1 m. 72	84	0,48
21	1 m. 73	86,5	0,50
22	1 m. 73 5	87,5	0,51
23	1 m. 74	89	0,52
24	1 m. 74 3	89	0,51
25	1 m. 74 4	90	0,52

Quelques compagnies d'assurances se servent de ce rapport comme élément d'appréciation de la résistance constitutionnelle d'après les recherches du D^{r} Snellen ; cet indice de vitalité $\left(\frac{P \times 100}{T}\right)$ correspondrait à une durée moyenne de vie de 38 ans, s'il est inférieur à 50 ; l'indice de vitalité supérieur à 50 correspondrait à une durée moyenne de vie de 46 1/2 ans.

niveau, est en moyenne inférieure de 7 cm. à celle du périmètre axillaire ; en cas d'obésité, ces chiffres peuvent être tarés d'une certaine erreur : ils seront trop élevés de 1 à 2 cm. pour le périmètre, et trop faibles dans la même proportion pour l'amplitude. Toutefois c'est la méthode à conseiller pour diverses raisons anatomiques et techniques.

IV. Le périmètre sus-pectoral — ou mamelonnaire — est à rejeter en raison des causes d'erreur auxquelles expose la mensuration à cette hauteur du thorax (muscles pectoraux et dorsaux, saillie et position de l'omoplate, développement et situation de la glande mammaire).

V. Le périmètre axillaire donne les résultats les plus constants et les plus élevés pour la circonférence thoracique ; il n'est guère influencé par le pannicule adipeux, mais sa technique rencontre quelques difficultés ; son amplitude respiratoire est un peu moindre.

VI. Le périmètre axillaire expiratoire moyen oscille autour de 88 cm. chez l'homme normal à croissance achevée ; ses oscillations extrêmes vont de 73 à 105 cm. (831 détenus de 20 à 50 ans).

L'amplitude respiratoire axillaire est en moyenne de 3,64 cm. ; ses écarts extrêmes vont de 1 à 10 cm. : dans 67,5 % des cas, elle était de 3 à 4 cm.

VII. Le périmètre xyphoïdien expiratoire moyen est de 81,5 cm. ; ses oscillations extrêmes vont de 66 à 99 cm.

L'amplitude moyenne est de 4,18 cm. ; ses écarts vont de 1 à 12 : dans 54,5 % des cas, elle est de 3 à 4 cm. ; dans 16,5 %, de 5 cm. ; dans 18,6 %, de 6 à 12 cm.

VIII. Le périmètre xyphoïdien croît avec la taille et la hauteur du buste ; il varie peu avec l'envergure.

IX. L'importance de l'indice thoracique, au point de vue de la robusticité constitutionnelle, est beaucoup plus réduite que celle de la périmétrie.

X. La formule anthropométrique du thorax la meilleure au point de vue de la vigueur constitutionnelle serait celle qui combinerait le périmètre axillaire avec l'amplitude respiratoire xyphoïdienne :

« Indice constitutionnel du thorax = périmètre axillaire × amplitude xyphoïdienne. »

XI. Parmi les périmètres du thorax, nous donnons la préférence, au point de vue anthropométrique, au périmètre expiratoire, parce qu'il élimine presque totalement la part d'intervention du sujet ; il correspond nettement à la valeur statique du développement thoracique.

Au contraire, l'amplitude et la capacité respiratoire — cette dernière évaluée par la spirométrie — sont largement influencées par la volonté du sujet, par son degré de compréhension de l'expérience et surtout par les tares pathologiques acquises qui restreignent parfois si considérablement l'étendue de la distension du parenchyme pulmonaire (tuberculose pulmonaire, pleurésie, etc...).

La valeur de ces éléments est surtout dynamique et fonctionnelle ; leur intérêt est donc d'ordre clinique.

XII. L'accroissement moyen de tous les périmètres en général est de 23 millimètres par centimètre de taille au-dessus de 1m60. Cet indice d'accroissement diminue avec l'élévation de la taille.

Si nous condensons les constatations, faites par les médecins dans le domaine de la Périmétrie thoracique, nous aboutissons à la conclusion générale que de nombreux facteurs interviennent dans la constitution du thorax, notamment au cours de la première enfance et de l'adolescence. En outre, les états pathologiques des organes respiratoires exercent une grande influence sur le développement de l'ossature thoracique et sur l'amplitude pulmonaire ([1]).

Ces questions sont trop connues pour que nous devions y revenir. Elles relèvent de l'hygiène sociale et scolaire, et l'on ne saurait y attacher trop d'importance.

Les recherches du Prince Wiazemski et de Godin sont les plus convaincantes à cet égard ; nous leur empruntons quelques brèves indications. La circonférence thoracique à la naissance l'emporte de 8 à 10 centimètres sur la demi-taille ; elle tend insensiblement à l'égaler et y parvient vers l'âge de 10 ans chez les garçons, un peu plus tôt chez les filles (8 ans) ; puis elle lui devient infé-

---

([1]) **Il faut tenir compte, en outre, du facteur ethnique et du rapport anthropométrique entre la taille et la circonférence thoracique.**

rieure et ce mouvement s'accentue avec des accélérations et des retards d'amplitude variables suivant les individus jusqu'à la 15me année environ; après cette période, son développement redevient proportionnellement plus rapide que celui de la taille et l'on observe souvent qu'entre 19 et 20 ans le périmètre thoracique égale et même dépasse de quelques centimètres la demi-taille.

Nous savons, d'autre part, qu'il existe entre le périmètre thoracique et la taille une corrélation constante, et cela à toutes les époques de la croissance ; cette corrélation varie dans des limites physiologiques avec les individus suivant les conditions de leur tempérament, de leur constitution, de leur hygiène et de leur nutrition ; mais ce rapport régulier et constant, sur lequel se basent les procédés de détermination du degré de Robusticité, n'existe plus quand des facteurs pathologiques sont venus entraver la croissance ou donner à son évolution une allure anormale et souvent précipitée. Somme toute, la relation anatomo-physiologique normale entre la taille et le développement du thorax ne s'observe que dans la minorité des cas, et l'on peut admettre que chez les individus de stature élevée elle est plutôt exceptionnelle. On constate, en règle générale, chez ces derniers une infériorité thoracique plus ou moins marquée ; dès l'enfance elle existe et elle coïncide habituellement avec des irrégularités dans l'accroissement osseux de la cage thoracique, dont elle est en dernière analyse la conséquence et la traduction pathologique.

Si l'on envisage au surplus les relations entre le développement du thorax et la constitution du sujet, nous remarquons que chez l'adulte et l'homme mûr le premier est d'autant plus satisfaisant que l'état constitutionnel est plus robuste ; nos constatations confirment nettement à cet égard les conclusions des recherches de Wiazemski sur les jeunes gens de 10 à 19 ans ; cette supériorité du développement thoracique chez les sujets dont la constitution est bonne ou vigoureuse s'observe plus spécialement à deux époques de la croissance : une première fois, entre 10 et 12 ans, plus tard entre 16 et 20 ans.

On s'accorde généralement à dire qu'un sujet bien portant et normalement constitué doit avoir un périmètre thoracique supérieur à la demi-taille ; pour être physiologique, ce rapport doit se traduire par un excédent d'au moins un centimètre chez les grands et de 2 centimètres pour les tailles inférieures à la moyenne.

Cet axiome anthropométrique se retrouve dans la plupart des règlements militaires fixant les conditions de l'examen médical des recrues. En Suisse, pour être incorporé, le jeune homme en âge de milice doit avoir un thorax dont la circonférence est égale à la moitié de la taille et mesure au moins 80 centimètres. En Italie sont réformés les soldats dont le périmètre thoracique est inférieur à 75 centimètres, ajournés ceux chez qui il est compris entre 75 et 80 centimètres. Bien plus, il résulte des recherches de Vallin et Anthony que même des thorax bien proportionnés à la taille et harmonieusement développés doivent être considérés comme incompatibles avec les exigences du service militaire s'ils n'atteignent pas au moins 77 centimètres. En France, on s'en tient à cet égard aux minima suivants, fixés par les travaux du médecin-major Mackievicz.

Taille		Périmètre minimum
1 m. 54 à 1 m. 59	—	78 centimètres
1 m. 60 à 1 m. 64	—	80 »
1 m. 65 à 1 m. 70	—	81 »
1 m. 71 à 1 m. 75	—	82 »
1 m. 76 et au delà	—	83 »

Nous avons reproduit plus haut les limites fixées en 1913 pour le périmètre thoracique par la Commission belge chargée de préciser les causes d'exemption du service militaire ; elles ne diffèrent que par leur précision plus grande des chiffres en usage dans les conseils de révision français.

Nous annexons à titre documentaire les deux tableaux suivants relatifs au périmètre thoracique. Dans le premier, Roblot a rapporté à la taille la circonférence xyphoïdienne mesurée à la fin de l'expiration. Le second tableau indique d'après les recherches de divers auteurs les chiffres moyens atteints par le développement thoracique chez les jeunes gens de 10 à 19 ans.

PÉRIMÈTRE THORACIQUE MOYEN

(1.011 SUJETS — D^{r} ROBLOT)

Nombre de sujets examinés	Taille	Périmètre moyen	Centimètres en sus de la demi-taille
193	155^{cm} — 160$^{cm.}$	84$^{cm.}$,7	4^{cm},7
309	161 — 165	85 ,6	3 ,1
326	166 — 170	86 ,7	1 ,7
135	171 — 175	88 ,6	1 ,1
48	176 — 180	91 ,0	1 ,0

DÉVELOPPEMENT THORACIQUE DES JEUNES GENS ENTRE 10 ET 19 ANS

Age	Russes, (internat. Wiazemski)				Polonais	Anglais	Italiens	Français	
	Nombre de sujets	*Robustes*	*Faibles*	Moyenne	(Iasickinski)	Roberts	Marro	Simon (colonie de Vaucluse)	Godin
10	*205*	*63,9*	*61,0*	63,0	58,3	61,8	62,0	62,5	—
11	*264*	*65,9*	*63,0*	64,4	62,0	63,0	62,1	66,0	—
12	*268*	*66,8*	*64,9*	65,3	63,5	66,8	64,6	66,0	—
13	*248*	*69,8*	*69,1*	69,2	65,6	71,5	65,6	67,5	68,4
14	*228*	*71,0*	*70,8*	71,6	69,4	75,4	67,0	72,0	70,3
15	*189*	*79,1*	*72,8*	75,8	73,7	79.2	71,1	74,5	74.3
16	*131*	*79,1*	*76,9*	78,1	75,3	83,3	72,0	76,0	78,4
17	*78*	*81,6*	*78,7*	79,6	76,6	86,4	74,8	77,5	80,8
18	*36*	*82,7*	*79,5*	80,7	79,0	88,2	76,2	77,5	82,2
19	*19*	*83,3*	*80,0*	81,6	80,0	—	75,0	78,5	—
	1.666								

Dans son livre bien documenté *La Lutte contre la Tuberculose pulmonaire*, le professeur Spehl attache une importance prédominante à la spirométrie pour déterminer la valeur de la fonction respiratoire ; il estime — non sans raison — que cette méthode donne les résultats les plus sûrs et les plus constants pour apprécier la normalité du fonctionnement pulmonaire, élément clinique sur lequel se base son intéressante conception de l'origine des lésions tuberculeuses du poumon. Il se sert du spiromètre de Verdin, dont la manœuvre simple permet d'évaluer le volume d'air expulsé au cours de l'expiration maxima.

Le prof. Spehl appelle le chiffre obtenu (celui-ci, en moyenne, étant à 20 ans de 3380 cm^3 pour un homme dont la taille est de 1 m. 67) : « la capacité vitale » du sujet, et il se sert de cet élément pour formuler une série de rapports biologiques de haut intérêt.

Son rapport avec le poids $\left(\frac{CV}{Poids}\right)$ donne, à son avis, la mesure du « souffle » du sujet. Vient ensuite le rapport de la capacité vitale avec la taille $\left(\frac{CV}{T}\right)$, qui permet de corriger le premier ; de moindre importance est le rapport $\left(\frac{CV}{\text{Périm. thorac. moyen}}\right)$ qui n'a de valeur que pour les sujets dont le poids est égal ou inférieur à la moyenne.

Le D^r Spehl condense enfin les 3 premiers éléments dans une formule qu'il appelle le « Quotient vital » $\left(\frac{CV \times P}{T}\right)$, donnant une impression générale du développement physique et de la constitution d'un sujet ; il insiste toutefois sur la nécessité d'examiner séparément les rapports $\frac{CV}{T}$ et $\frac{CV}{P}$, auxquels il ajoute le rapport $\frac{P}{T}$ pour pouvoir « se représenter parfaitement, même sans voir le sujet, sa structure et sa valeur physiologique ».

Nous avons tenu à indiquer dans ses grandes lignes l'intéressante méthode du Professeur de l'Université de Bruxelles, pour déterminer la valeur de la fonction respiratoire au point de vue du dépistage et du traitement de la tuberculose pulmonaire.

Nous manquons d'observations personnelles sur la spirométrie, dont l'application rencontre quelques difficultés dans la pratique — surtout si l'on veut l'appliquer successivement à un nombre assez important de sujets ; il ne nous est donc pas possible d'en discuter la précision et la valeur de diagnostic au point de vue de la robusticité constitutionnelle, — question qui nous intéresse spécialement. Nous comptons l'étudier ultérieurement dans ses relations avec l'amplitude respiratoire et la périmétrie thoracique : ce qui nous fournira un critérium sûr pour en évaluer l'importance pratique au point de vue qui nous occupe en ce moment.

Nous nous permettons toutefois d'insister sur l'intérêt scientifique — même en clinique — de la périmétrie thoracique méthodique et complète, qui échappe — à notre sens — à la plupart des critiques formulées par l'auteur. Il suffit d'ailleurs de rappeler l'abondante littérature médicale établissant sans conteste les rapports étroits entre le développement du périmètre thoracique et la morbidité des affections respiratoires d'une part, la faiblesse constitutionnelle d'autre part ; nous y avons déjà fait allusion antérieurement. Cette méthode n'est donc pas à abandonner ; mais, bien exécutée, elle viendrait compléter heureusement la formule du quotient vital du professeur Spehl. Il nous a paru intéressant de reproduire ici à titre documentaire une partie du tableau des moyennes obtenues par le professeur Spehl ; nous y annexons les résultats de nos recherches personnelles pour le poids et le périmètre thoracique à l'âge adulte ; nos moyennes précisent les modifications qu'y apporte la taille. *(Voir tableaux pages 173 et 174).*

Il nous reste à exposer sommairement les deux méthodes anthropométriques principales de détermination de la robusticité constitutionnelle basées sur les éléments que nous venons d'envisager : la taille, le poids, la périmétrie thoracique ; d'autres procédés n'en sont que des variantes plus ou moins heureuses.

Le classement constitutionnel de Tartière se base exclusivement sur le rapport entre le poids et la taille des recrues ; nous reproduisons son tableau qui indique pour les trois grands groupes de tailles la signification constitutionnelle des écarts existant entre leurs chiffres et les conséquences à en déduire au point de vue du recrutement militaire. *(Voir tableau, page 175).*

Actuellement ce procédé d'élimination est généralement abandonné ; le poids peut en effet varier dans une large mesure pour des causes accidentelles, même d'ordre physiologique.

Le classement préconisé par le médecin-major Pignet constitue un progrès très marqué sur la méthode de Tartière. Il se base

MOYENNES DU PROFESSEUR SPEHL

Age	Nutrition			Fonction respiratoire			Quotient Vital		
Années	Taille en centim. T	Poids (kilogr.) P	Écart entre Poids et Taille T et P (kilogr.)	Capacité vitale (cent. cub.) C V	$\frac{C\,V}{T}$	$\frac{C\,V}{P}$	$\frac{CV+P}{T}$	Pér. Thor.	$\frac{\text{Pér. th.} + P}{T}$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
19.	165.5	57.6	— 7.9	3287	19.	57.	1143	83.6	289
19.3	165.8	58.	— 7.8	3310	19.9	57.	1157	84.2	294
19.6	166.2	58.5	— 7.7	3333	20.	56.9	1173	84.8	298
19.9	166.6	59.	— 7.6	3356	20.	56.8	1188	85.4	302
20.	167.	59.5	— 7.5	3380	20.	56.	1206	86.	306
20.3	167.	59.9	— 7.4	3382	20.	56.	1213	86.	308
20.6	167.1	60.3	— 6.8	3385	20.	56.	1221	86.	310
20.9	167.1	60.7	— 6.4	3387	20.	55.7	1230	86.	312
21.	167.2	61.2	— 6.0	3390	20.	55.	1240	86.	314
21.6	167.3	62.	— 5.3	3395	20.	54.7	1253	86.	318
22.	167.4	62.9	— 4.5	3400	20.	54.	1277	86.	323
22.6	167.5	63.7	— 3.8	3405	20.	53.	1294	86.	327
23.	167.7	64.5	— 3.2	3410	20.	52.	1311	86.	330
23.6	167.8	64.9	— 2.9	3415	20.	52.	1320	86.	332
24.	167.9	65.3	— 2.6	3420	20.	52.	1330	86.	334
24.6	168.	65.7	— 2.3	3425	20.	52.	1339	86.	336
25.	168.2	66.2	— 2.0	3430	20.	51.	1349	86.	338
26.	168.2	66.1	— 2.1	3440	20.	52.	1351		
27.	168.3	65.9	— 2.4	3450	20.	52.	1350		
28.	168.4	65.9	— 2.5	3460	20.	52.	1353		
29.	168.5	66.	— 2.5	3472	20.	52.	1359		
30.	168.6	66.1	— 2.5	3484	20.	52.	1365		
31.	168.6	65.8	— 2.8	3484	20.	52.	1359		
32.	168.6	65.6	— 3.0	3484	20.	53.	1355		
33.	168.6	65.3	— 3.3	3484	20.	53.	1349		
34.	168.6	65.1	— 3.5	3484	20.	53.	1345		
35.	168.6	64.8	— 3.8	3484	20.	53.	1339		
40.	168.6	63.67	— 4.9	3484	20.	54.	1315		
45.	168.6	63.06	— 5.0	3484	20.	54.	1313		
50.	168.6	63.05	— 5.1	3484	20.	54.	1312		

Le Poids et le Périmètre thoracique en Belgique en fonction de la Taille (Dr Vervaeck)

MOYENNES PHYSIOLOGIQUES

TAILLE	POIDS	PÉRIMÈTRE (1)	ÉCART AVEC 1/2 TAILLE
m.	*kg.*	*cm.*	*cm.*
1,52	52 à 53	78,00	+ 2,00
53	53 à 54	78,50	+ 2,00
54	54 à 55	78,75	+ 1,75
55	55 à 56	79,00	+ 1,50
56	56,500	79,25	+ 1,25
57	57,500	79,50	+ 1,00
58	58,000	79,75	+ 0,75
59	59,000	80,00	+ 0,50
1,60	59,650	80,25	+ 0,25
61	60,650	80,50	0
62	61,300	80,75	— 0,25
63	61,950	81,00	— 0,50
64	62,600	81,25	— 0,75
65	63,250	81,50	— 1,00
66	63,900	81,75	— 1,25
67	64,550	82,00	— 1,50
68	65,200	82,25	— 1,75
69	65,850	82,50	— 2,00
1,70	66,500	82,75	— 2,25
71	67,150	82,75	— 2,75
72	67,800	83,00	— 3,00
73	68,450	83,25	— 3,25
74	69,100	83,25	— 3,75
75 (2)	69,750	83,50	— 4,00
76	70,400	83,75	— 4,25
77	71,050	83,75	— 4,75
78	71,700	84,00	— 5,00
79	72,350	84,00	— 5,50
1,80	73,000	84,25	— 5,75

---

(1) Nos chiffres se rapportent au Périmètre xyphoïdien à l'expiration qui est inférieur de 3 à 4 cm. au Périmètre mamelonnaire ou sous-pectoral ; d'autre part, l'amplitude respiratoire xyphoïdienne est de 4,2 cm. en moyenne d'après nos recherches.

(2) A partir de la taille 1 m. 75, il devient difficile d'établir une moyenne, en raison de l'amplitude considérable des oscillations que présentent les chiffres du Périmètre thoracique ; elles varient suivant les sujets de 73 à 93 cm.

Écart entre le Poids et la Taille des Recrues

(Tartière)

CONSTITUTION	TAILLE		
	1^m60 et au-dessous	1^m60 à 1^m70	au delà de 1^m70
Très bonne	0 à 2 cm.	0 à 3 cm.	0 à 4 cm.
Bonne	2 à 4 »	3 à 6 »	4 à 8 »
Assez bonne	4 à 6 »	6 à 9 »	8 à 12 »
Passable ou médiocre	6 à 8 »	9 à 12 »	12 à 15 »
Mauvaise (à surveiller ou à éliminer de l'armée)	plus de 8 »	plus de 12 »	plus de 15 »

sur les relations existant entre la Taille, d'une part, considérée comme un élément d'ordre négatif, et le poids et le périmètre thoracique, d'autre part, à qui l'on assigne une valeur positive au point de vue de la vigueur constitutionnelle. Partant de ces données, l'auteur adopte la formule suivante pour déterminer la « Valeur numérique » ou « Indice de Robusticité » :

Taille — [Poids + Périmètre thoracique] = Valeur numérique.

Il est à noter que le périmètre thoracique utilisé par l'auteur est le sous-pectoral pris à la fin de l'expiration.

Pignet a proposé le tableau suivant d'échelons constitutionnels pour les indices de robusticité, à la suite de ses expériences dans le milieu militaire; celles-ci ont prouvé que proportionnellement à l'élévation du chiffre de l'indice croît le nombre des indisponibilités, des réformes et ajournements du service militaire, enfin des entrées à l'infirmerie et des journées de traitement hospitalier.

Indice de Robusticité.

(Dr Pignet)

INDICES	CONSTITUTION
Inférieur à 10	Très forte
11 à 15	Forte
16 à 20	Bonne
21 à 25	Moyenne
26 à 30	Assez bonne ou faible
31 à 35	Très faible
au delà de 35	Mauvaise

Signalons pour mémoire que le Dr Mayet emploie pour les enfants un indice de Pignet légèrement modifié suivant la formule :

$$\text{Taille} - \left(\text{Poids} + \frac{\text{Pér. th. inspiratoire} + \text{Pér. th. expiratoire}}{2}\right)$$
$$= \text{coefficient de Robusticité.}$$

AGE	COEFFICIENT DE ROBUSTICITÉ	AGE	COEFFICIENT DE ROBUSTICITÉ
10 ans	43,0	17 »	28,0
12 »	42,0	18 »	25,0
13 »	39,0	19 »	24,0
14 »	37,0	20 »	23,0
15 »	34,5	21 »	23,0
16 »	32,0		

Ajoutons toutefois que les recherches du Dr Calvet dans le même milieu ont abouti à des chiffres quelque peu différents, entre 12 et 15 ans.

La méthode Pignet, dont les résultats ont été contrôlés par un certain nombre de médecins militaires, a été admise en principe

L'INDICE DE PIGNET

NOTA. — *Dans le présent tableau, nous avons négligé les décimales.*

831 Détenus masculins de 20 à 50 ans, et de $1^{m}525$ à $1^{m}800$.

INDICE DE PIGNET	AGE						RACE					CONSTITUTION		TEMPÉRAMENT							SANTÉ		TAILLE (Moyen : $1^{m}6676$)					POIDS													PÉRIMÈTRE EXPIRATOIRE XYPHOIDIEN (Moyen : 81,5)					DAMPLITUDE RESPIRATOIRE XYPHOIDIENNE (Moyenne : 4 cm^2)						INDICE THORACIQUE (Moyenne : 76,1)						TOTAUX
																												POIDS ABSOLU (Moyen : 62 k. 355)								ÉCART AVEC LES DÉCIMALES DE LA TAILLE (Moyen : — 4,405) P < déc. T																						
	20 à 24	25 à 29	30 à 34	35 à 39	40 à 44	45 à 49	W	F	B.	M.	Étrangers	+	—	S	SN	N	LN	L	B et BN	Divers	+	—	$1^{m}525$ à $1^{m}60$	$1^{m}605$ à $1^{m}65$	$1^{m}655$ à $1^{m}70$	$1^{m}705$ à $1^{m}75$	$1^{m}755$ à $1^{m}80$	α à 47	48 à 52	53 à 57	58 à 62	63 à 67	68 à 72	73 à 77	78 à ω 87	Anormaux insuffisants	Subnormaux insuffisants	Normaux	Subnormaux exagérés	Anormaux exagérés	α 66 à 72	73 à 77	78 à 84	85 à 89	90 à ω 99	1 et 2	3	4	5	6	7 à ω 11	α 61 à 65	67 et 68	69 à 76	77 à 84	85 et 86	87 à ω 95	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
— 15				1		1	1			1		1	1	2							1	1		1	1										2					2					2		2							1	1			2
— 14												.	.																																													.
— 13				1		1	1	1				2	.	2							2			1		1									2					2					2	1	1								2			2
— 12			1				1					1	.				1				1				1										1					1					1	1										1		1
— 11					1			1				1	.	1							1			1										1						1					1			1									1	1
— 10					3			1		2		3	.	1		2					3				3										3					3					3	1			2					1	2			3
— 9				2				1	1			2	.	1	1						2				1		1								2					2					2	1				1				1			1	2
— 8												.	.																																													.
— 7				1	1			2				2	.	1				1			1	1		1	1									1	1					2					2	1	1								2			2
— 6			1				1					.	1					1				1			1										1					1					1		1								1			1
— 5		2	2					2			2	4	.			3	1				3	1		1	2	1							1	1	2					4					4		1	1	2					2	1	1		4
— 4						1		1				1	.	1							1					1									1					1					1				1						1			1
— 3						1	1					1	.	1							1				1										1					1					1		1							1				1
— 2			1	1				1		1		2	.	1		1					2					2									2					2					2	1			1					1			1	2
— 1	1		3	1				3	2			5	.	3		1		1			5		2		1	2						1	1	1	2				2	3				2	3	1	2		2						5			5
0	1	1			2	2	1	4	1			6	.	3				2		1SB	5	1	1	2	2	1						1	2	1	2					6				1	5	1	3		1	1				2	4			6
+ 1					2	1		2			1	2	1	3							2	1	1		2							1		2					2	1					3		2	1						1	2			3
+ 2		1	1		1		1	1		1		3	.	1		1		1			3				1	1	1							1	2				2	1				1	2	1					2			2	1			3
3	1	2	1	3	2	2	3	6	1	1		10	1	4	2	2	1	1	1		8	3	1		4	5	1					1	4	4	2				7	4				9	2	1	2	5	1		2		1	2	7		1	11
4		2	2			2	1	3		2		5	1	3	1			2			5	1	1	4	1							1	4	1					3	3				5	1	1	4	1						2	3	1		6
5	1	1	2	3	3		2	7		1		9	1	4	1	3	1	1			7	3	1	2	5	2					1	1	2	5	1				7	3				8	2	1	1	4	3	1				2	7	1		10
6	2	1	1	2	3	3	3	5	2	1	1	10	2	8	1	3					9	3		5	5	2						1	10	1					12					6	6	5	3	1	3					6	6			12
7	1	3	3	2	1	1	4	4		3		10	1	1	3	3	2	1	1		8	3		5	4	2						5	5		1				11					9	2	1	1	5	3		1		1	3	7			11
8	2	1	3	1	1	1	2	6		1		9	.	2	1	2	1	2	1		7	2	3	1	3	2					1	4	2	2					8	1			2	5	2		1	2	2	3	1			4	4		1	9
9		5	2	1	4	2	4	7		3		13	1	4	3	3	1	3			11	3	2	2	6	3	1				1	3	6	4					13	1			3	11		2	2	4	3	2	1			6	7		1	14
10	6	5	3	3	1	1	3	12	3	1		17	2	8	2	2	2	4		1SL	18	1	2	4	10	2	1			1	2	3	10	3					19				5	12	2	5	2	6	4	1	1	1		5	13			19
11	4	8	2	4	2	2	4	15	2	1		21	1	4	4	5	1	7	1		18	4	1	9	6	4	2				1	11	5	3	2				22				6	16		1	6	10	2	2	1			5	17			22
12	6	4	4	3	4	3	3	18	2		1	21	3	7	5	8	2	2			19	5		9	6	6	3				2	43	7	1	1			4	20				6	17	1		6	9	5	3	1			9	13	1	1	24
13	4	5	3	3	2		2	9	4	2		15	2	2	3	4	1	4	3		16	1	5	5	4	1	2			2	4	5	4	2				2	15				9	8		6	1	3	3	1	3			7	8	2		17
14	6	6	6	3	4	4	8	12	6	2	1	25	4	8	3	8	3	7			25	4	4	9	5	8	3			1	7	8	7	6				3	26				17	12		1	10	10	5	3				12	14	1	2	29
15	5	7	8	8	2	2	7	10	9	4	2	25	7	6	6	8	5	5	2		26	6	4	8	11	8	1			2	7	9	42	2				7	25				22	10		1	8	10	7	2	4		1	15	16			32
16	8	4	8	6	6	2	6	17	5	4	2	28	6	8	6	6	6	6	2		29	5	5	4	13	6	6			3	6	11	10	4				16	18				25	9		3	5	14	6	4	2		1	10	21	1	1	34
17	14	6	9	3	3		6	23	2	4		34	1	3	6	17	3	3	3		34	1	6	14	5	7	3			4	5	19	6	1			2	25	8				28	7		3	6	9	5	6	6	2		11	21	1		35
18	11	9	2	3	5	1	2	16	5	6	2	28	3	7	5	8	6	5			28	3	7	9	6	7	2			3	8	14	6				1	21	9				24	7		2	10	12	1	4	2			13	17	1		31
19	11	11	3	4	1	4	3	15	7	8	1	28	6	6	3	17	2	4	2		28	6	8	8	12	3	3		1	4	9	16	3	1			7	22	5				31	3		3	9	7	5	5	5	1	2	10	19	1	1	34
20	6	8	3	7	5	1	6	14	5	4	1	26	4	4	8	8	3	6	1		26	4	8	7	10	2	3			8	8	10	4				7	23					30			2	8	7	6	5	2	3	4	11	11	1		30
21	7	9	6	4	4	4	9	15	5	3	2	27	7	3	10	9	3	6	2	1SL	30	4	4	9	10	9	2			4	13	12	5				25	19	4			3	28	3		2	10	8	6	5	3	1	2	20	10	1		34
22	10	6	4	6	4	2	6	17	2	4	3	25	7	3	6	7	4	9	2	1LB	23	9	4	13	11	4			1	7	12	11	1				23	48	1				32			2	12	9	4	2	3		3	16	12	1		32
23	8	2	4	5	5	2	2	18	3	2	1	16	10	2	4	8	2	6	4		21	5	6	4	10	4	2		1	7	9	7	2				19	7				2	23	1		3	4	7	7	4	1		1	13	10	1	1	26
24	6	5	3	8	4	2	8	12	2	6		21	7	2	3	8	5	9	1		21	7	7	8	10	3			3	5	11	9	0				23	5				4	24			3	6	8	6	4	1	3	2	16	6	1		28
25	7	6	3	5	6	4	6	18	3	2	2	23	8	8	5	10	1	4	1	2LB	27	4	3	8	15	2	3		2	5	17	5	2			2	25	4				8	22	1		4	6	9	5	6	1		4	15	9	2	1	31
26	8	7	5	5	4	3	6	15	2	5	4	23	9	3	4	14	5	2	4		25	7	2	9	11	8	2			10	11	9	2			1	27	4				11	21			6	8	9	5	3	1	1	3	17	6	4	1	32
27	6	2	5	1	4	3	4	15		2		14	7	3	2	4	2	9	1		14	7	3	6	6	5	1		1	6	10	4				3	18					8	13			2	4	7	2	5	1	1		11	8		1	21
28	9	6	4	1	1	2	6	10	4	2	1	13	10	2	3	9	1	5	3		19	4	4	6	9	4			3	5	12	3				4	18	1			2	11	10			3	6	10	2	1	1		4	13	5	1		23
29	13	2	1	3	5		4	9	7	4		16	8	3	6	5	3	6	1		19	5	1	6	8	6	3			9	7	5	2	1		4	20					11	13			3	5	8	3	4	1			14	6	1	3	24
30	9	5	6	5		1	7	13	2	3	1	11	15	.	4	9	4	5	3	1SL	22	4	4	7	10	3	2		3	9	10	4				10	16					17	9			2	6	8	4	4	2	1	1	19	5			26
31	8	4	3	6	2	2	6	12	2	4	1	9	16	3	2	9	5	3	2	1LB	19	6	1	3	13	7	1	1		10	10	3	1			16	9					12	13			2	12	6	2	3			1	12	11	1		25
32	6	5	5	6	3		9	12	1	2	1	12	13	2	3	10	5	5			17	8	3	4	12	5	1	1	3	8	12	1				15	10				2	18	5			2	4	9	4	5	1		1	18	5	1		25
33	4	2	3	1	2		3	7	1	1		9	3	.	1	3	1	6	1		8	4	2	1	6	3			2	5	5					10	2				1	7	4			3	2	4	1	2				8	4			12
34	6	2	5	2			3	8	1	1	2	6	9	2	1	2	1	7	2		11	4	2	5	3	4	1		3	7	4	1				11	4				2	10	3				3	7	2	2	1		1	8	4	1	1	15
35	3	2	2		1	2	2	6	1	1		4	6	.	2	3	2	1	2		7	3	1	3	2	3	1	1	3	2	3	1				9	1				1	9					5	1	3		1			6	4			10
36	2	2		2	1	1	2	2	1	2		4	4	.	1	1		3	3		5	3	1	3		3	1	1	3		3	1				7	1				1	7					2	2	2	1	1			3	5			8
37	5	2			2		3		3	3	1	1	8	2	.	4	1	2			4	5	3	1	1	3	1	3	1	4		1				9					4	5					5	3			1			6	3			9
38	6			2		1	2	5	1	1		6	3	2	1	3			3		6	3	1	3	3	1	1	1	2	6						9					4	5				1	2	4	1	1			1	7	1			9
39		2		1	2		1	1		3		1	4	.		2	1	1	1		2	3	1	2		1	1	1	1	2	1					4	1				3	2					1	2		1	1		2	2	1			5
40	3						2	1				2	1	1		1		1				3		2			1		2		1					3					2	1					1	1		1		1		1			1	3
41					1			1				.	1	1		.						1			1				1							1					1	1						1							1			1
42		1						1				.	1			1					1			1					1							1														1			1					1
43	1	1	1			1	2		2			2	2			1	1	1	1		3	1	1		1	2		1	1	2						4					4							2	1	1				1	2		1	4
44	1			1	1		1		2			1	2			1	1		1		3				1	2			2	1						3					3							2	1					3				3
45	1						1					1	.			1						1		1				1								1					1							1						1				1
46	1	1			1		1			2		2	1			1		1	1		2	1		1	1	1		1	1	1						3					3								3					1	2			3
47				1				1				.	1			1					1			1				1								1					1					1									1			1
Totaux	220	166	134	131	112	68	172	418	102	106	33	619	212	152	122	242	90	161	56	8	665	166	116	219	277	162	57	13	41	143	213	215	126	49	31	131	235	181	239	45	35	152	428	163	53	86	203	250	137	100	55	15	37	376	354	28	21	831

dans l'armée roumaine où, à la suite des recherches des D^rs^ Butza, Papen, Roussovitsch, on refuse les conscrits dont l'indice de Robusticité dépasse 32. Elle a été appliquée officieusement en France. En Suisse, on l'utilise comme moyen de contrôle. En Belgique, lors des discussions de la Commission, chargée en 1913 de reviser le tableau des causes médicales d'exemption du service militaire, il fut reconnu que l'application aux conscrits belges des chiffres de Robusticité, indiqués par Pignet, entraînerait une élimination beaucoup trop sévère. Des expériences de contrôle aboutirent à la conclusion que non seulement un déchet important s'observerait parmi les hommes compris actuellement dans le contingent, mais qu'en outre des sujets maigres et nerveux, de constitution vigoureuse, seraient rejetés, tandis que des sujets lourds, à résistance organique inférieure et grevés même de tares médicales, y seraient maintenus. Dans ces conditions, la Commission, en l'absence de données anthropologiques bien établies sur le développement corporel des jeunes gens de 17 à 20 ans en Belgique, estima devoir renoncer à l'application de la méthode de Pignet. Elle admit un triple critérium de la faiblesse constitutionnelle : d'une part, l'existence de certaines infirmités et tares pathologiques ; d'autre part, les minima pathologiques dont elle fixa les chiffres pour le poids et le périmètre thoracique. Quand ces trois indices d'infériorité organique se trouvent réunis chez un sujet, ils entraînent sa réforme du service militaire.

Il sera extrêmement intéressant de pouvoir, après une expérience de quelques années, se rendre compte de l'utilité pratique de cette nouvelle méthode d'appréciation de la faiblesse constitutionnelle ; il serait aussi désirable de voir se continuer dans le milieu militaire des travaux de contrôle sur les résultats qu'aurait donnés l'application des indices de Robusticité et sur les modifications à apporter au procédé de Pignet, en vue de son utilisation en Belgique.

Nos recherches personnelles dans le milieu pénitentiaire ont poursuivi le même but ; elles avaient pour objectif de réunir une documentation physiologique et anthropologique aussi complète que possible, sur les divers éléments de nature à influencer la résistance constitutionnelle et à modifier les conditions physiologiques du Poids, de la Taille et du développement de la poitrine.

Nous avons calculé systématiquement l'indice de Robusticité (1) constitutionnelle des délinquants examinés à notre laboratoire, suivant la formule du Dr Pignet, en vue de contrôler ainsi la valeur de cette méthode.

Le tableau d'ensemble ci-dessous (page 179) indique les variations qui s'observent dans la répartition des indices de Robusticité, suivant une série de facteurs que l'expérience nous a démontré exercer une influence plus ou moins grande sur l'état constitutionnel et sur les éléments anthropométriques qui permettent d'en calculer la résistance.

Dans une série de statistiques ordonnées suivant ces différents facteurs, nous tenterons de préciser l'importance respective et la part d'intervention de chacun d'eux ; nous pourrons ainsi déduire de cette étude quelques conclusions relatives aux limites d'application de la méthode du Dr Pignet et suggérer quelques corrections à y apporter dans certains cas.

Afin de bien déterminer les conditions anthropologiques et médicales des sujets que nous avons examinés, nous donnons dans le tableau ci-après leur répartition au point de vue des délits, de la race, de l'âge, de la santé, de l'état constitutionnel, du tempérament, enfin des tares héréditaires, des anomalies dégénératives de la morphologie et des irrégularités observées dans leurs mensurations anthropologiques. *(Voir tableau, page suivante)*.

Parmi les facteurs médicaux qui, à en juger par notre observation personnelle, influencent surtout les trois éléments de la formule de Pignet, et notamment le poids, nous insistons spécialement sur la constitution et le tempérament.

---

(1) L'indice de robusticité a été calculé suivant la formule [Taille — (Poids + Périmètre)]. Exemple : 1 m 70 — (60 k + 90 cm) = 20. L'indice obtenu peut être négatif quand le poids ou le périmètre auront des chiffres supérieurs à la moyenne ; nous avons dans nos recherches substitué le périmètre xyphoïdien, expiratoire, au périmètre mamelonnaire qu'utilisait Pignet ; pour comparer nos résultats avec les siens, il faudrait, en dehors des corrections d'ordre ethnique, ajouter à nos chiffres 3 à 4 cm, ce qui représente l'écart moyen, et assez constant, entre les périmètres sous-pectoral et xyphoïdien.

Répartition générale de notre milieu d'étude

(831 délinquants de 20 à 50 ans, et de 1 m 526 à 1 m 805 de taille)

DÉLITS		RACE		AGE		SANTÉ		CONSTITUTION		TEMPÉRAMENT		TARES HÉRÉDITAIRES LOURDES		TARES MORPHOLOGIQUES		ASYMÉTRIES		ANOMALIES ANTHROPOMÉTRIQUES	
				ans															
Crimes	36	Flamands	418	20 24	220	très bonne : 95		Bonne	619	Sanguin.	152	nulle	229	faibles	53	faibles	191	faibles	61
							665												
Vols	592	Wallons	172	25/29	166	moyenne : 570		Mauvaise	212	Nerveux	242	une	256	moyennes	326	moyennes	337	moyennes	322
Coups	98	Bruxelles	102	30/34	134	faible : 103			831	Lymphat.	161	deux	229	importantes	452	importantes	303	importantes	448
							166								831		831		831
Mœurs	69	Mixtes	106	35/39	131	mauvaise : 63				S N	122	trois	79						
Divers	35	Étrangers	33	40 44	112		831			L N	90	davantage	38						
	831		831	45 50	68	Infirmités				Bilieux & BN	56		831						
Primaires	357				831	sans	633			Divers	8								
Récidivistes	484					avec	198				831								
							831												

Le tempérament représente une disposition de notre organisation vitale, transmise héréditairement et à peu près immuable, dont les causes biologiques sont complexes et encore mal précisées. Son influence se fait sentir non seulement dans l'architecture de notre corps et le fonctionnement de nos organes, mais aussi dans nos réactions de défense aux intoxications et infections, tant exogènes qu'endogènes. S'y rattache intimement l'élément « Constitution » ; dès l'enfance elle se traduit par un tonus variable de résistance à la maladie, à la fatigue, aux impressions du dehors. Beaucoup plus que le tempérament, dont médicalement on peut à peine masquer ou atténuer les prédispositions fâcheuses, la Constitution est susceptible d'être amendée ou tonifiée par un régime, un traitement et une hygiène appropriés.

On ne doit pas négliger davantage, dans l'appréciation de la robusticité d'un individu, son état de santé habituel, ses tares pathologiques, reliquats de maladies antérieures notamment au cours de la première enfance, ses tares héréditaires même, conséquence de l'état pathologique de ses parents au moment de la procréation, enfin les conditions de son état organique au moment de l'examen médical. Cet état organique est en relations directes avec sa nutrition, son hygiène, éventuellement avec le surmenage auquel il aurait été soumis et avec la maladie dont il souffre ou dont il serait convalescent.

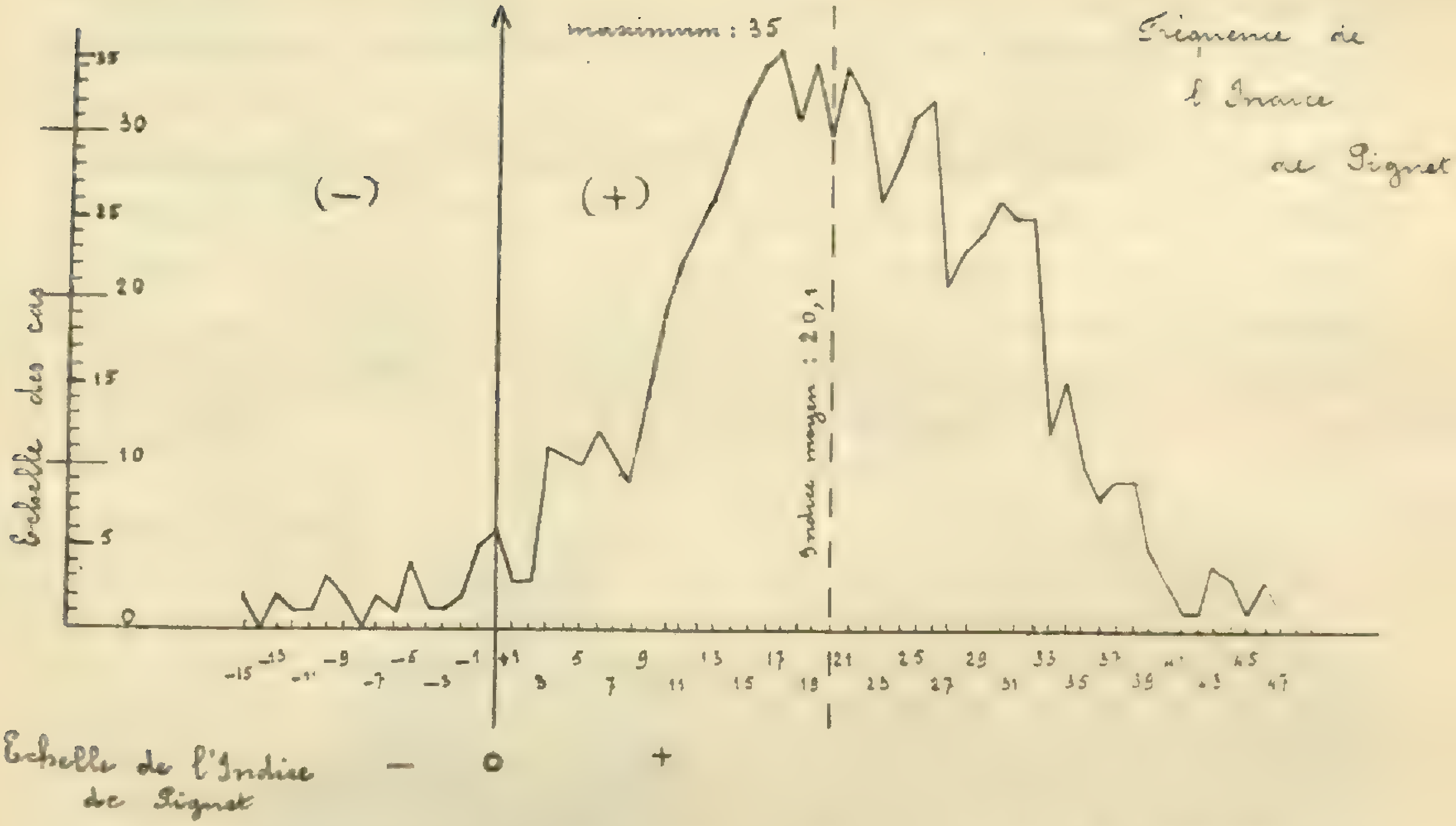
On doit aussi tenir compte de l'âge, élément important quand on envisage la résistance constitutionnelle d'un sujet, et qui peut modifier considérablement son poids corporel.

RÉPARTITION GÉNÉRALE ET VALEUR ABSOLUE DE L'INDICE DE PIGNET

L'indice des 831 sujets examinés s'étend de (— 15) à (+ 47), embrassant donc 63 unités (y compris l'indice 0).

L'indice moyen est (+ 20,1).

Le graphique page 181 indique la fréquence des indices observés dans le groupe étudié par nous à la Prison de Forest et duquel, rappelons-le, les malades ont été éliminés.



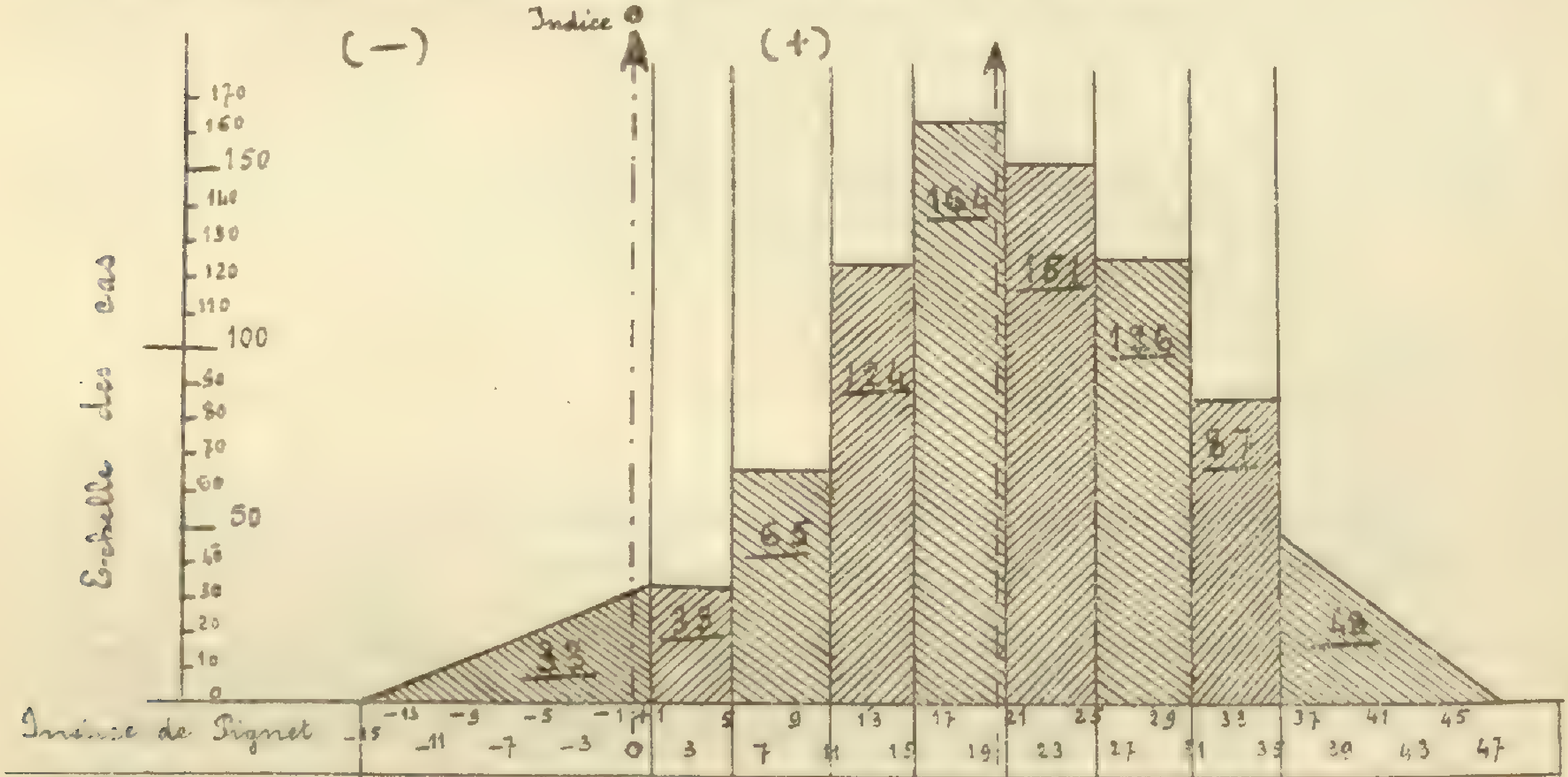
Voici maintenant la répartition de notre série d'individus en adoptant la classification proposée par Pignet.

ROBUSTICITÉ	INDICE	NOMBRE DE CAS OBSERVÉS	
Très forte	10 et moins	131	15,8 %
Forte	11 à 15	124	14,9 »
Bonne	16 à 20	164	19,7 »
Moyenne	21 à 25	151	18,2 »
Faible	26 à 30	126	15.1 »
Très faible	31 à 35	87	10,5 »
Mauvaise	36 et plus	48	5,8 »
Moyenne générale	+ 20,1	831	100

Dans le graphique suivant, tracé d'après ces chiffres, nous avons tenté d'établir une répartition binomiale des cas, basée sur le degré de normalité constitutionnelle des sujets, qui suit assez exactement la sériation par 5 unités ; dans ce but nous avons dû modifier quelque peu la notation adoptée par Pignet tout en respectant ses tendances.

C'est ainsi que les groupes « bons » et « moyens » de Pignet formente ici l'ensemble des constitutions « moyennes » tandis que les notations « fort » et « très fort » remontent de 5 unités dans l'échelle.

Nous pouvons distinguer de la sorte une série médiane compacte de 315 sujets normaux ou moyens, soit 38 %; elle est séparée des séries extrêmes ou anormales par excès ou par insuffisance de l'indice (32 %) par 2 groupes intermédiaires ou subnormaux, d'importance numérique à peu près égale.



Nombre de cas ...	33	33	65	124	164	151	126	87	48
Robusticité Cas ...	Très forte 33	Forte 98		Bonne 124	Moyenne 315		Faible 126	T. faible 87	Mauvaise 48
Répartition binomiale Cas	Anormaux excessifs 131			Surn.x 124	Normaux 315		Subn.x 126	Anormaux insuffisants 135	

Le tableau (page 183) donne les chiffres correspondant à cette notation binomiale.

Conclusion. — Le groupe que nous avons étudié comprenait 38 % d'hommes moyens ou normaux ; 30 % de subnormaux — les uns vigoureux, les autres tout au plus acceptables ; ils sont en proportion égale au-dessus et au-dessous de la moyenne générale (Indice + 20) — ; enfin 32 % de sujets à indice anormal, les uns très robustes (15,8 %), les derniers très faibles ou mauvais (16,3 %).

RÉPARTITION BINOMIALE	ROBUSTICITÉ	INDICE		CAS	%
Anormaux excessifs	Très forte Forte	0 et indices négatifs + 1 à 10		33 98	4,— 11,8
Surnormaux	Bonne	11 à 15		124	14,9
Normaux	Moyenne	16 à 20 21 à 25	164 151	315	37,9
Subnormaux	Faible	26 à 30		126	15,1
Anormaux insuffisants	Très faible Mauvaise	31 à 35 36 et au delà		87 48	10,5 5,8

Dans les tableaux suivants, où nous étudions séparément les différents facteurs que nous avons envisagés, nous conserverons la répartition binomiale appliquée ci-dessus, tout en indiquant la notation numérique des indices qui permet de la ramener au classement de Pignet.

1. Influence de l'âge. *(Voir tableau, page 184).*

A s'en rapporter à l'indice moyen, il semblerait que la Robusticité augmente avec l'âge; les proportions centésimales démontrent toutefois que cette tendance est soumise à de continuelles oscillations, ainsi qu'en témoignent les chiffres du pourcentage.

Le tableau plus condensé ci-dessous — où nous n'avons distingué que trois groupes : les indices moyens, forts et faibles — est plus caractéristique au point de vue de l'influence de l'âge.

ROBUSTICITÉ	Indice de Pignet	AGE						Moyenne générale
		α 20/24	25/29	30/34	35/39	40/44	45/ω49	
Surnormaux	< 16	18	32,5	36,5	33	35,0	44,0	31
Normaux	16 25	40	39,5	33,5	39	38,5	32,5	38
Subnormaux	> 25	42	28,0	30,0	28	26,5	23,5	31

Influence de l'âge

ROBUSTICITÉ	Indice de Pignet	AGE													
		NOMBRE DE CAS							PROPORTIONS CENTÉSIMALES						
		α 20/24	25/29	30/34	35/39	40/44	45/ω49	Totaux	α 20/24	25/29	30/34	35/39	40/44	45/ω49	Totaux
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*
Anormaux +	— 15/+ 10	15	24	26	22	25	19	*131*	6,82	14,46	19,40	16,79	22,32	27,94	*15,8*
Surnormaux	+ 11/+ 15	25	30	23	21	14	11	*124*	11,36	18,07	17,16	16,03	12,50	16,18	*14,9*
Normaux +	+ 16/+ 20	50	38	25	23	20	8	*164*	22,73	22,89	18,66	17,56	17,86	11,76	*19,7*
Normaux —	+ 21 + 25	38	28	20	28	23	14	*151*	17,27	16,87	14,92	21,38	20,53	20,59	*18,2*
Subnormaux —	+ 26 + 30	45	22	21	15	14	9	*126*	20,46	13,25	15,68	11,45	12,50	13,24	*15,1*
Anormaux —	+ 31 + 47	47	24	19	22	16	7	*135*	21,36	14,46	14,18	16,79	14,29	10,29	*16,3*
TOTAUX		220	166	134	131	112	68	*831*	%	%	%	%	%	%	%
Fréquence % des Cas		*26^5*	*20*	*16^1*	*15^7*	*13^5*	*8^2*	%							
Indice Pignet moyen		23^3	20	18^7	19^6	18^7	16^9	20^1							

Ici l'accroissement paraît régulier sans que toutefois la proportion des indices normaux — de 16 à 25 — en soit fortement influencée, sauf entre 30 et 35 ans et après 40 ans. Il est inutile d'ajouter que dans bien des cas la Robusticité organique ne s'accentue pas avec l'âge; bien au contraire; l'abaissement de l'indice tient essentiellement à l'augmentation du poids corporel et ce facteur, tout au moins entre 30 et 50 ans, est loin de constituer une présomption de vigueur plus grande; souvent même il indique un fléchissement organique et une tendance à la pléthore.

Nous pouvons déduire de ce fait une conclusion importante : Les chiffres de l'indice de Robusticité, tels qu'ils ont été fixés par Pignet, ne sont applicables qu'aux jeunes gens en âge de milice — de 19 à 21 ans. A partir de 25 ans, les éléments constitutifs de sa formule perdent de leur fixité biologique.

Sous l'influence de l'âge, le poids corporel, surtout, augmente en règle générale, ce pour diverses raisons d'ailleurs : adipose — développement des organes abdominaux en relation avec le régime et les fréquentes lésions de l'appareil digestif — densité plus grande de certains tissus organiques.

Le périmètre varie moins : la surcharge graisseuse des parois thoraciques peut exagérer de 2 à 3 cm. le pourtour de la poitrine. Notons-le en passant, dans les cas d'adipose l'amplitude respiratoire diminue en général, d'où compensation relative de ces modifications apportées par l'âge, tout au moins pour le périmètre thoracique à l'inspiration.

La taille rétrocède peu avant l'âge de 50 ans ; nous avons vu qu'elle s'accroît encore — en moyenne de 10 à 12 mm. — de la 21e à la 34e année.

Somme toute, des trois éléments seul le poids corporel est à retenir. Aussi l'indice de Robusticité ne sera-t-il applicable aux individus dont l'âge dépasse 25 ans qu'à condition d'effectuer une correction des chiffres de la pesée, dont il nous reste à déterminer l'importance.

A en juger par l'indice moyen que nous fournit la sériation des 831 détenus de Forest, cette correction devrait être de 3 kgs pour les sujets de 25 à 29 ans ; il faudrait y ajouter 1 à 2 kgs de 30 à 45 ans et 2 kgs pour les hommes plus âgés.

Mais nos recherches sur les variations du poids corporel sous l'influence de l'âge ont démontré que dans un cas particulier une correction de l'espèce est fort difficile à déterminer, en raison de l'extrême amplitude des variations individuelles.

On ne peut pour ce motif calculer quelle serait la correction moyenne à apporter à l'échelle numérique de Pignet en raison de l'âge du sujet. Celle-ci doit rester individuelle, ce qui restreint la portée de la méthode à partir de la 25e année.

2. Influence de la race.

L'influence de la race se dégage à toute évidence des chiffres ci-dessus ; l'indice moyen des Flamands correspond à la robusticité la meilleure ; celle des Wallons est la moins bonne ; les Bruxellois — et, en général, les sujets de race mixte — ont une élévation d'indice intermédiaire entre ceux des sujets d'origine flamande ou wallonne. *(Voir tableau, page 187).*

Les proportions centésimales renforcent cette constatation et la précisent ; ce qui fait la supériorité des Flamands, c'est surtout une forte proportion de sujets un peu au-dessus de la normale, 20 % au lieu de 13 chez les Wallons. Ce qui accentue l'infériorité constitutive de ces derniers, c'est la fréquence relativement plus grande des indices très élevés (31 à 47) : chez les Wallons 22 %, au lieu de 13 chez les Flamands.

Les détenus Bruxellois se caractérisent surtout par une proportion assez forte des indices de robusticité 10 à 20, mais ils comptent peu de sujets très vigoureux.

Chez les détenus d'origine mixte, les fluctuations sont fort irrégulières.

Une remarque générale se dégage de la sériation ethnique ; on ne devra accepter qu'avec beaucoup de circonspection, pour le recrutement militaire belge, les chiffres d'indices tels que Pignet les a fixés pour la France. Il ne semble pas en principe que les indices subnormaux par insuffisance (26 à 30) doivent être considérés, en Belgique du moins, comme correspondant à des constitutions faibles ou très médiocres ; c'est ce qui explique les résultats défavorables que donnèrent en 1913 les expériences de contrôle faites parmi les soldats d'un régiment de ligne caserné à Bruxelles. L'application de l'échelle de Pignet eût entraîné l'élimination de 19 % des recrues jugées, d'après l'examen médical, aptes au service militaire et incorporées.

Influence du facteur ethnique

ROBUSTICITÉ	Indice de Pignet	RACE											
		NOMBRE DE CAS						PROPORTIONS CENTÉSIMALES					
		Wallons	Flamands	Bruxellois	Mixtes	Étrangers	Totaux	Wallons	Flamands	Bruxellois	Mixtes	Étrangers	Totaux
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*
Anormaux	—15, +10	29	70	10	18	4	131	16,86	16,75	9,80	16,98	12,12	*15,8*
Surnormaux	11/15	24	64	23	9	4	124	13,95	15,31	22,54	8,49	12,12	*14,9*
Normaux { +	16/20	23	85	24	26	6	164	13,37	20,33	23,53	24,53	18,18	*19,7*
—	21/25	31	80	15	17	8	151	18,02	19,14	14,71	16,04	24,24	*18,2*
Subnornaux	26/30	27	62	15	16	6	126	15,70	14,83	14,71	15,09	18,18	*15,1*
Anormaux	31-47	38	57	15	20	5	135	22,10	13,64	14,71	18,87	15,16	*16,3*
TOTAUX :		172	418	102	106	33	831	%	%	%	%	%	%
Fréquence % des Races		*20^{7}*	*50^{3}*	*12^{3}*	*12^{7}*	*4^{-}*	%						
Indice de Pignet moyen		21^{2}	19^{1}	20^{5}	20^{8}	$20^{\prime}$	20^{1}						

Conclusion. — Les caractères anthropologiques et constitutionnels des populations belges imposent une révision de l'échelle de robusticité proposée par Piguet pour le recrutement militaire pour que ses chiffres soient applicables en Belgique.

3. Influence du tempérament. *(Voir tableau, page 189).*

Nous retrouvons ici les constatations que nous avons déjà faites bien souvent : le Sanguin-Nerveux est le tempérament moyen par excellence. Son indice ne dépasse en effet que de 3/10es d'unité l'indice moyen. Le tempérament Sanguin est le plus vigoureux. Les proportions centésimales sont ici des plus intéressantes à suivre (¹).

En principe, l'influence du tempérament est à peu près négligeable, sauf pour les deux extrêmes, le Sanguin et le Bilieux, qui s'écartent tous deux de plus de 5 unités de la moyenne, le premier par excès et le second par défaut.

Nous en retiendrons que le barème de l'indice de Robusticité de Pignet devrait être modifié lorsqu'il y aura lieu de l'appliquer à un sujet sanguin ou à tendances bilieuses ; on peut évaluer à 5 la correction à apporter de ce chef ; ce chiffre est à ajouter à l'indice pour les Sanguins et à en retrancher pour les Bilieux.

4. Influence de la constitution.

Le tableau (page 190) dénote un écart de 8 unités entre l'indice moyen des constitutions bonnes et mauvaises, le degré de robusticité des bonnes dépassant de 2 unités la moyenne générale, celle des mauvaises lui demeurant inférieure de 6 unités.

Il est intéressant de voir confirmer aussi nettement par l'examen médical la valeur réelle de l'indice de Pignet. On peut observer, en effet, avec quelle fidélité le coefficient numérique suit la vigueur constitutionnelle du sujet. Il est d'autant plus élevé que la constitution de l'individu est plus faible, ainsi que le démontre sans

---

(¹) Notons chez les sanguins une proportion énorme — plus du tiers — des indices de + 10 à — 15 ; le chiffre de ceux-ci est à peine du huitième pour les autres tempéraments ; chez les bilieux il dépasse un peu le 20^{e} ; les autres écarts proportionnels n'offrent pas moins d'intérêt.

Influence du Tempérament

ROBUSTICITÉ	INDICE DE PIGNET	TEMPÉRAMENT															
		NOMBRE DE CAS								PROPORTIONS CENTÉSIMALES							
		N	SN	N	LN	L	B & BN	Divers	Totaux	S	SN	N	LN	L	B & BN	Divers	Totaux
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*
Anormaux +	—15/+10	55	15	26	10	20	3	2	131	36,19	12,30	10,74	11,41	12,42	5,36	—	*15,8*
Surnormaux	+11/+15	27	21	33	12	25	6	.	124	17,76	17,21	13,64	13,33	15,53	10,71	—	*14.9*
Normaux +	+16/+20	28	28	56	20	24	8	.	164	18 42	22,95	23,14	22,22	14,91	14,28	—	*19.7*
Normaux —	+21/+25	18	28	42	15	34	10	4	151	11,84	22,95	17,36	16,67	21,42	17,86	—	*18.2*
Subnormaux	+26/+30	11	19	41	15	27	12	1	126	7,24	15,57	16.94	16,67	16,77	21,43	—	*15.1*
Anormaux —	+31/+47	13	11	44	18	31	17	1	135	8,55	9,02	18,18	20,—	19,25	30,36	—	*16,3*
		152	122	242	90	161	56	8	831	100,—	100.	100,—	100.—	100.	100.—	—	%
Fréquence % des Tempéraments :		18,3	14,7	29,1	10,8	19,3	6,8	1,—	%								
Indice de Pignet moyen :		14,2	19,8	21,3	21,6	21,5	25,5	—	20,1								

Influence de la Constitution

ROBUSTICITÉ	Indice de Pignet	CONSTITUTION					
		NOMBRE DE CAS			PROPORTIONS CENTÉSIMALES		
		bonnes ou moyennes	faibles ou mauvaises	Totaux	+	—	Totaux
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Anormaux +	−15/+10	119	12	131	19,23	5,66	*15,8*
Surnormaux	+11/+15	107	17	124	17,29	8,02	*14,9*
Normaux +	+16/+20	144	20	164	23,26	9,43	*19,7*
Normaux —	+21/+25	112	39	151	18,09	18,40	*18,2*
Subnormaux	+26/+30	77	49	126	12,44	23,11	*15,1*
Anormaux —	+31/+47	60	75	135	9,69	35,38	*16,3*
Totaux :		619	212	831	100 —	100 —	%
Fréquence % des constitutions		74^5	25^5	%			
Indice de Pignet moyen		18^1	26^1	20^1			

conteste le tableau page 191, consacré à l'analyse des constitutions médicalement appréciées comme « défavorables ».

Les colonnes 6 et 8, et surtout 9 et 11, sont très caractéristiques à cet égard : l'indice de Pignet correspond à une proportion d'autant plus grande de constitutions mauvaises qu'il est plus élevé. Cette constatation ressortait très nettement d'ailleurs des proportions centésimales du premier tableau.

Cette démonstration est encore plus évidente dans la classe de détenus de 20 à 25.

5. Influence de l'état de Santé.

La même démonstration peut être faite pour l'état de santé ; la déchéance organique et constitutionnelle qui accompagne la

L'indice de Pignet et la répartition des constitutions mauvaises

Nombre de cas		Fréquence %		ROBUSTICITÉ		Indice de Pignet	Constitution mauvaise		Écart entre les échelons successifs	Écart de chaque échelon avec la moyenne générale	Sériation en 5 groupes		
							Nombre de cas	Fréquence % de la const. mauv. par rapport à la bonne			Fréquence % de la const. mauv. par rapport à la bonne	Écart entre les échelons successifs	Écart de chaque échelon avec la moyenne générale
1		2		3		4	5	6	7	8	9	10	11
131	33	15,8	4,	*An. excessifs*	*Très forte*	*0 et —*	2	6,1	+ 4.1	— 19,4	9,2		— 16,3
	98		11,8		*Forte*	*1 à 10*	10	10,2	+ 3,5	— 15,3		4,5	
	124		14,9	*Surnormaux :*	*Bonne*	*11 à 15*	17	13,7	— 1,5	— 11,8	13,7		— 11,8
315	164	37,9	19,7	*Normaux :*	*Moyenne*	*16 à 20*	20	12,2	+ 13,6	— 13,3	18,7	5 »	— 6,8
	151		18,2			*21 à 25*	39	25,8	+ 5,2	+ 0,3		12,3	
	126		151,	*Subnormaux :*	*Faible*	*26 à 30*	49	31 »	+ 23 »	+ 5,5	31 »		+ 5,5
135	87	16,3	10,5	*An. insuffis.*	*Très faible*	*31 à 35*	17	54 »	+ 28,5	+ 28,5	55,5	21,5	+ 30 »
	48		5,8		*Mauvaise*	*36 et plus*	28	58,3	+ 4,3	+ 32,8			
831		*100*		*Moyenne*			*212*	*25,5*			25,5		

maladie — il ne s'agit pas ici d'affections graves, ces sujets ayant été écartés de nos recherches — se traduit toujours par une élévation de l'indice de Robusticité. Une remarque s'impose : c'est presque exclusivement le facteur Poids qui nous en rend compte ; dans quelques cas, il est vrai, le Périmètre thoracique moyen s'est trouvé réduit de 1 ou 2 unités à la suite de lésions des organes respiratoires ou d'un processus de prétuberculose, mais cette influence reste ici sans importance ; même alors, c'est l'amaigrissement surtout qui explique l'élévation de l'indice.

Voici nos chiffres.

ROBUSTICITÉ		Indice de Pignet	SANTÉ					
			NOMBRE DE CAS			PROPORTIONS CENTÉSIMALES		
			Bonne ou moyenne	Faible ou mauvaise	Totaux	+	—	Totaux
1		2	3	4	5	6	7	8
Anormaux +		+15/+10	106	25	131	15,94	15,06	*15,8*
Surnormaux		11/15	104	20	124	15,64	12,05	*14,9*
Normaux	+	16/20	145	19	164	21,81	11,45	*19,7*
	—	21/25	122	29	151	18,34	17,47	*18,2*
Subnormaux		26/30	99	27	126	14,89	16,26	*15,1*
Anormaux —		31/47	89	46	135	13,38	27,71	*16,3*
TOTAUX			665	166	831	100	100	%
Fréquence % des Constitutions			80	20	%			
Indice de Pignet moyen			19^5	22^5	20^1			

Notons d'abord que l'indice moyen des détenus dont la santé a été jugée mauvaise est plus élevé de 3 unités que celui des bien portants. Si nous analysons les proportions centésimales, nous voyons que les grands écarts s'observent au niveau de la série : 16 à 20, et en sens inverse à la série : 31 à 47. Nous interprétons comme suit ces deux constatations dont la résultante est identique. La réduction, parmi les santés jugées mauvaises, du nombre de sujets légèrement au-dessus de la normale, semble tenir à des débilitations passagères et curables où le régime pénitentiaire joue vraisemblablement quelque rôle. En revanche, l'augmentation parmi elles des indices très défavorables correspondrait aux vrais malades, atteints de lésions organiques, du tube digestif le plus souvent.

Conclusion. — L'état de maladie ou de dénutrition du sujet au moment de son examen influence sensiblement son indice de robusticité. Offrent surtout de l'intérêt à ce point de vue les débilitations passagères de l'état constitutionnel.

Influence de la Taille.

L'influence de la Taille au point de vue de l'indice de robusticité est considérable ; ceci résulte de toutes les recherches qui ont été faites dans le milieu militaire : l'importance de ce facteur a paru telle que l'on s'est trouvé d'accord pour admettre une bien plus grande tolérance pour l'admission à l'armée des recrues dont la stature dépassait 1,70 m.

On a proposé — notamment Du Roselle — de faire bénéficier d'une certaine indulgence les sujets à indice théoriquement trop faible, parce que, en général, les grands et les très grands de 18 à 21 ans n'ont pas grossi en proportion de l'élévation de leur taille ; ce déficit peut atteindre 5, 10, 15 et même 20 kgs. Il n'est pas douteux qu'un « tassement » de 5 à 10 unités de l'indice de robusticité peut s'admettre, mais à condition que le périmètre thoracique reste satisfaisant ; en effet, les individus de haute stature pourront grossir et s'élargir ; après 20 ans ils ne parviendront plus guère à étendre leur périmètre thoracique. Si celui-ci est bien proportionné, et surtout si l'amplitude respiratoire est suffisante, on pourra se montrer très large pour l'indice de robusticité.

La même opinion est défendue par Besson (¹) dans son intéressante étude de l'indice de Pignet : « ... lorsque, le périmètre » restant bon, le poids seul fléchit légèrement, il n'est pas dou» teux qu'il faut, soit dans la zone discutable, soit même au seuil » de la zone médiocre, faire bénéficier le sujet d'une cote plus » favorable » (page 449).

Cet auteur admet aussi une correction en sens inverse pour les petites tailles — ce qui est parfaitement justifié à notre sens, si l'on ne descend pas en dessous de la taille 1,51 m. qui paraît être, d'après nos recherches personnelles, la limite inférieure des tailles admissibles. Au-dessous de ce chiffre on peut, en général, conclure à l'anormalité biologique du sujet. *(Voir tableau, page 195).*

A s'en rapporter à l'indice de Pignet moyen, on serait tenté de n'accorder à l'élément Taille qu'une influence bien minime sur le degré de Robusticité constitutionnelle ; mais les écarts très faibles existant ici entre les diverses catégories s'expliquent avant tout par l'âge de nos détenus (831 condamnés de 20 à 50 ans) qui, sauf 85 sujets de 20 et 21 ans, dépasse de plusieurs années l'époque du service militaire à laquelle se rapportent en réalité les chiffres de Pignet. Au surplus, les moyennes générales sont souvent sujettes à caution, les chiffres extrêmes arrivant à se neutraliser très exactement dans certains groupes ; aussi une sériation bien ordonnée doit-elle toujours assurer le contrôle des moyennes.

Or, nous le constatons ici, les proportions centésimales renseignent d'intéressantes fluctuations des indices dans les diverses catégories de tailles.

Chez les petits dominent les indices normaux (de 16 à 25) ; leur proportion y est exactement de 50 °/₀ au lieu de 38 °/₀, chiffre de la moyenne générale. Les 4 autres groupes d'indices ont une valeur égale, soit 1/8ᵉ.

(¹) « De l'évaluation de l'aptitude physique au service militaire des jeunes sujets », résumé d'un important mémoire avec 23 graphiques, déposé aux Archives et Documents du Service de Santé, au Val de Grâce — (Besson, médecin-major : *Archives de médecine et de pharmacie militaires*, LXIX, n° 3). — Paris, 1918. Cet intéressant travail vient d'être publié séparément à Paris chez Morel, et a été analysé dans la Revue des Questions scientifiques, avril 1921.

ROBUSTICITÉ	INDICE DE PIGNET	TAILLE											
		NOMBRE DE CAS						PROPORTIONS CENTÉSIMALES					
		α 1m325 à 1m60	1m605 à 1m65	1m655 à 1m70	1m705 à 1m75	1m755 à ω 1m80	TOTAUX	α 1m525 à 1m60	1m605 à 1m65	1m655 à 1m70	1m705 à 1m75	1m755 à ω 1m80	TOTAUX
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*
Anormaux +	— 15/+ 10	14	30	55	27	5	131	12,07	13,70	19,86	16,67	8,77	15,8
Surnormaux	+ 11/+ 15	14	40	32	27	11	124	12,07	18.26	11.55	16.67	19,30	14,9
Normaux +	+ 16/+ 20	34	42	46	25	17	164	29,31	19,18	16,61	15,43	29,82	19,7
Normaux —	+ 21/+ 25	24	42	56	22	7	151	20,69	19,18	20,22	13,58	12,28	18,2
Subnormaux	+ 26/+ 30	14	34	44	26	8	126	12,07	15,53	15,88	16,04	14.04	15,1
Anormaux —	+ 31/+ 47	16	31	44	35	9	135	13,79	14,15	15,88	21,61	15,79	16,3
TOTAUX :		116	219	277	162	57	831	100 —	100 —	100 —	100 —	100 —	%
FRÉQUENCE % DES TAILLES		*14 —*	*26,3*	*33,3*	*19,5*	*6,9*	%						
INDICE DE PIGNET MOYEN		20^6	20^1	19^7	20^5	20^5	20^1						

Chez les sujets de 1,60 m. à 1,65 m., nous relevons une courbe presque régulière, courbe très voisine de celle de la moyenne générale.

Chez les sujets de 1,65 à 1 m. 70, le maximum est à peu près atteint par les indices les plus bas (19,86) ; les indices les plus élevés sont en proportion normale ; les indices intermédiaires « oscillent » fortement.

Parmi les détenus de taille élevée (1,70 m. à 1,75), nous relevons des fluctuations bizarres qui ne peuvent, à notre sens, s'expliquer que par l'âge. Augmentation des indices extrêmes — 33,34 °/₀ et 37,65 °/₀ respectivement — ; les indices intermédiaires en comptent à peine 29 °/₀, au lieu de 38 °/₀ que donne la moyenne générale.

Mêmes irrégularités dans le groupe des très grands.

La constatation importante qui se dégage de l'étude de l'influence de la taille sur l'indice de robusticité, est que ce facteur n'est à retenir que chez les jeunes sujets ; au delà de 25 ans les modifications imprimées par l'âge viennent fortement contrebalancer l'intervention de l'élément « taille ».

Influence du Poids. *(Voir tableau, page 197).*

L'indice moyen augmente constamment avec le poids, et l'accroissement de ces deux données est à peu près du même ordre de grandeur. On peut dire à cet égard que chaque augmentation de poids de 1 kg. entraîne une augmentation de la robusticité de une unité.

Concluons : l'indice de Pignet traduit nettement les variations du poids absolu.

D'autre part, nous savons que le poids moyen est lui-même lié à la taille par une formule mathématique fort simple que nous avons pu déterminer avec une approximation très suffisante.

Il est dès lors d'un grand intérêt d'étudier les relations entre l'indice de Pignet et l'écart entre le poids et les décimales de la

Influence du Poids

ROBUSTICITÉ	INDICE DE PIGNET	POIDS ABSOLU																	
		NOMBRE DE CAS									PROPORTION CENTÉSIMALE								
		α à 47	48 à 52	53 à 57	58 à 62	63 à 67	68 à 72	73 à 77	78 à ω	Totaux	α à 47	48 à 52	53 à 57	58 à 62	63 à 67	68 à 72	73 à 77	78 à ω	Totaux
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Anormaux +	— 15 à + 10	—	—	1	5	22	47	28	28	131	—	—	0,69	2,35	10,23	37,29	57,14	90,32	15,8
Surnormaux	+ 11 à + 15	—	—	5	21	46	35	14	3	124	—	—	3,50	9,86	21,40	27,78	28,57	9,68	14,9
Normaux +	+ 16 à + 20	—	1	22	36	70	29	6	—	164	—	2,44	15,39	16,90	32,56	23,02	12,25	—	19,7
Normaux —	+ 21 à + 25	—	7	28	62	44	10	—	—	151	—	17,08	19,58	29,11	20,46	7,94	—	—	18,2
Subnormaux	+ 26 à + 30	—	7	39	50	25	4	1	—	126	—	17,08	27,27	23,47	11,63	3,18	2,04	—	15,1
Anormaux —	+ 31 à + 47	13	26	48	39	8	1	—	—	135	—	63,40	33,57	18,31	3,72	0,79	—	—	16,3
TOTAUX :		13	41	143	213	215	126	49	31	831	—	100 —	100 —	100 —	100 —	100 —	100 —	100 —	100
Indice de Pignet moyen		38^7	33^1	27^2	24	18^3	13	8^6	-3^1	20^1									

taille. Exemple : Si la taille est de 1,70 m. et le poids de 64 kgs, l'écart envisagé ici sera de 6 (¹).

Le tableau (page 199) répond à la question.

Conclusion : L'indice de Pignet suit très fidèlement la valeur de l'écart entre le poids et les décimales de la taille.

La réciproque peut être posée. En d'autres termes, un indice donné correspond-il à une évaluation physiologique du poids en fonction de la taille ?

Le tableau (page 200) dans lequel nous avons les proportions centésimales maxima de chaque groupe d'indices, fixe cette relation.

Conclusion. — Les chiffres établissent à toute évidence les corrélations étroites qui existent entre notre classification des degrés de la normalité biologique et l'échelle de robusticité de Pignet.

(¹) Nous avons tenté de déterminer d'après notre documentation personnelle les limites habituelles des divers degrés de la normalité biologique, en prenant comme critérium l'écart entre le poids et la taille.

TAILLE	RÉPARTITION D'APRÈS L'ÉCART ENTRE LE POIDS ET LES DÉCIMALES DE LA TAILLE				
	Anormaux insuffisants	Subnormaux	Normaux	Surnormaux	Anormaux exagérés
	ÉCART ENTRE LE POIDS ET LES DÉCIMALES DE LA TAILLE				
$1^{m}525$ à $1^{m}55$	— 8 et moins	— 3 à — 7	— 2, — 1, — 0	1 à 5	6 et plus
$1^{m}555$ à $1^{m}60$	— 9 et moins	— 4 à — 8	— 3, — 2, — 1	0 à 5	7 et plus
$1^{m}605$ à $1^{m}65$	— 10 et moins	— 5 à — 9	— 4, — 3, — 2	— 1 à + 6	7 et plus
$1^{m}655$ à $1^{m}70$	— 11 et moins	— 6 à — 10	— 5, — 4, — 3	— 2 à + 6	7 et plus
$1^{m}705$ à $1^{m}75$	— 12 et moins	— 7 à — 11	— 6, — 5, — 4	— 3 à + 7	8 et plus
$1^{m}755$ à $1^{m}80$	— 12 et moins	— 8 à — 11	— 7, — 6, — 5	— 4 à + 7	8 et plus

ROBUSTICITÉ	INDICE DE PIGNET	POIDS : ÉCART AVEC LES DÉCIMALES DE LA TAILLE											
		NOMBRE DE CAS						PROPORTIONS CENTÉSIMALES					
		Anormaux insuffisants	Subnormaux insuffisants	Normaux	Surnormaux exagérés	Anormaux exagérés	TOTAUX	Anormaux insuffisants	Subnormaux insuffisants	Normaux	Surnormaux exagérés	Anormaux exagérés	TOTAUX
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*
Anormaux +	— 15 à + 10	—	—	—	86	45	131	—	—	—	35,98	—	15,8
Surnormaux	+ 11 à + 15	—	—	16	108	—	124	—	—	8,84	45,19	—	14,9
Normaux +	+ 16 à + 20	—	17	107	40	—	164	—	7,23	59,12	16,74	—	19,7
Normaux —	+ 21 à + 25	2	91	53	5	—	151	1,52	38,72	29,28	2,09	—	18,2
Subnormaux	+ 26 à + 30	22	99	5	—	—	126	16,80	42,13	2,76	—	—	15,1
Anormaux —	+ 31 à + 47	107	28	—	—	—	135	81,68	11,92	—	—	—	16,3
TOTAUX :		131	235	181	239	45	831	100 —	100 —	100 —	100 —	100 —	%
Indice de Pignet moyen		34^4	26 —	19^1	11^7	— 2^7	20^1						

ROBUSTICITÉ		INDICE DE PIGNET	ÉCART ENTRE LE POIDS ET LES DÉCIMALES DE LA TAILLE											
			NOMBRE DE CAS						PROPORTION CENTÉSIMALE					
			Anormaux insuffisants	Subnormaux	Normaux	Surnormaux	Anormaux exagérés	TOTAUX	Anormaux insuffisants	Subnormaux	Normaux	Surnormaux	Anormaux exagérés	TOTAUX
1		*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*
Anormaux excessifs	Très forte	0 et moins	—	—	—	2	31	33	—	—	—	6,1	*93,9*	100
	Forte	1 à 10	—	—	—	84	14	98	—	—	—	*85,7*	14,3	100
Surnormaux =	Bonne	11 à 15	—	—	16	108	—	124	—	—	12,9	*87,1*	—	100
Normaux =	Moyenne	16 à 20	—	17	107	40	—	164	—	10,4	*65,2*	24,4	—	100
		21 à 25	2	91	53	5	—	151	1,3	*60,3*	35,1	3,3	—	100
Subnormaux =	Faible	26 à 30	22	99	5	—	—	126	17,4	*78,6*	4 »	—	—	100
Anormaux insuffisants	Très faible	31 à 35	61	26	—	—	—	87	*70 »*	30 »	—	—	—	100
	Mauvaise	36 et plus	46	2	—	—	—	48	*95,8*	4,2	—	—	—	100
TOTAUX		....	131	235	181	239	45	831	15,8	*28,3*	*21,8*	*28,7*	5,4	100

Influence du développement thoracique.

Il nous reste à étudier l'influence du développement du thorax au point de vue de la formule de Robusticité.

Nous envisagerons successivement, dans cet ordre d'idées, le Périmètre thoracique, l'amplitude respiratoire et l'Indice thoracique.

Rappelons-le : nos recherches ont été faites sur le Périmètre xyphoïdien, tandis que l'échelle de Robusticité de Pignet est basée sur le Périmètre sous-pectoral.

1. Périmètre thoracique.

Les chiffres du tableau p. 203 confirment nettement que l'indice de Robusticité traduit très fidèlement les variations du périmètre thoracique ; on peut même dire que, toutes conditions égales, c'est l'élément primordial de la formule la moins sujette aux fluctuations sous l'influence des facteurs étrangers.

Déjà l'examen des indices moyens établit combien l'élévation du périmètre entraîne une rapide diminution numérique de l'indice. L'analyse des proportions centésimales des sériations basées sur le Périmètre thoracique en fournit une démonstration, dont la netteté ne laisse place à aucun doute.

2. L'amplitude respiratoire.

D'après les chiffres du tableau p. 203, il n'existerait aucune relation certaine entre l'amplitude respiratoire et l'indice de robusticité.

L'abaissement de celui-ci, coïncidant avec les plus mauvaises amplitudes (1 à 2 cm.), doit être interprété comme étant la conséquence d'une augmentation anormale du poids corporel dans une vingtaine de cas ; contrôle fait, il s'agissait de sujets obèses, souvent lymphatiques, à fonction respiratoire ralentie. Nous touchons ici à l'un des écueils de la méthode de Pignet : l'abondance du tissu adipeux peut vicier sa formule et déterminer un indice très bas chez des sujets peu vigoureux et peu résistants.

Une correction s'impose donc, en principe, dans les cas d'obésité excessive ; elle peut atteindre un chiffre élevé — 10 à 15 même — chez des jeunes gens de 19 à 21 ans.

L'examen des proportions centésimales confirme pleinement

I. Influence du Périmètre thoracique

ROBUSTICITÉ	Indice de Pignet	PÉRIMÈTRE EXPIRATOIRE XYPHOÏDIEN											
		NOMBRE DE CAS						PROPORTIONS CENTÉSIMALES					
		α 66/72	73/77	78/84	85/89	90/ω 99	Totaux	α 66/72	73/77	78/84	85/89	90/ω 99	Totaux
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*
Anormaux +	− 15 à + 10	—	—	10	69	52	131	—	—	2,34	42,33	98,10	15,8
Surnormaux	+ 11 à + 15	—	—	60	63	1	124	—	—	14,02	38,65	1,90	14,9
Normaux +	+ 16 à + 20	—	—	138	26	—	164	—	—	32,24	15,95	—	19,7
Normaux −	+ 21 à + 25	—	17	129	5	—	151	—	11,18	30,14	3,07	—	18,2
Subnormaux	+ 26 à + 30	2	58	66	—	—	126	5,71	38,16	15,42	—	—	15,1
Anormaux —	+ 31 à + 47	33	77	25	—	—	135	94,29	50,66	5,84	—	—	16,3
TOTAUX		35	152	428	163	53	831	100 —	100 —	100 —	100 —	100 —	100 —
Fréquence °/o des Périmètres expiratoires xyphoïdiens		*4^2*	*18^3*	*51^5*	*19^6*	*6^4*	°/o						
Indice de Pignet moyen		39	30^7	20^9	11^1	− 1	20^1						

II. Influence de l'Amplitude respiratoire

ROBUSTICITÉ	Indice de Pignet	AMPLITUDE RESPIRATOIRE XYPHOÏDIEN (¹)													
		NOMBRE DE CAS							PROPORTIONS CENTÉSIMALES						
		1 et 2 cm.	3 cm.	4 cm.	5 cm.	6 cm.	7 à 11 cm.	Totaux	1 et 2 cm.	3 cm.	4 cm.	5 cm.	6 cm.	7 à 11 cm.	Totaux
Anormaux +	+ 15 à + 10	25	30	31	28	9	8	131	29,07	14,78	12,40	20,44	9	14,55	15,8
Surnormaux	+ 11 à + 15	9	31	42	22	11	9	124	10,46	15,27	16,80	16,06	11	16,36	14,9
Normaux +	+ 16 à + 20	13	38	49	23	24	17	164	15,12	18,72	19,60	16,79	24	30,91	19,7
Normaux —	+ 21 à + 25	14	38	41	28	21	9	151	16,28	18,72	16,40	20,44	21	16,36	18,2
Subnormaux	+ 26 à + 30	16	29	42	16	17	6	126	18,61	14,28	16,80	11,68	17	10,91	15,1
Anormaux —	+ 31 à + 47	9	37	45	20	18	6	135	10 46	18,23	18,00	14,59	18	10,91	16,3
TOTAUX		86	203	250	137	100	55	831	100—	100—	100—	100—	100	100—	100—
Fréquence °/₀ des amplitudes respiratoires xyphoïdiennes		18^{4}	24^{4}	30^{1}	16^{5}	12	6^{6}	°/₀							
Indice de Pignet moyen		17^{2}	20.	21^{2}	19^{2}	22^{1}	19^{5}	20^{1}							

(¹) Les chiffres indiquent l'écart en centimètres entre les circonférences expiratoire et inspiratoire.

cette interprétation. 29 °/₀ des amplitudes thoraciques, à caractère nettement anormal ou morbide, s'observent chez des sujets classés comme les plus robustes — soit presque le double de la moyenne générale ; la diminution porte sur tous les autres groupes d'indices (26 à 30 exceptés).

Aux amplitudes respiratoires de 3 cm. — peu satisfaisantes en somme — correspondent des proportions d'indices de robusticité normales ; quant aux autres groupes, aucune régularité n'y préside.

Dans ces conditions, nous devons conclure à l'absence de relations régulières entre l'amplitude respiratoire et l'indice de robusticité.

En serait-il de même pour la capacité respiratoire déterminée par la spirométrie ? Nous manquons d'éléments pour répondre à cette question.

Quoi qu'il en soit, nous devons déduire de ce qui précède que l'amplitude respiratoire n'apporte aucune donnée positive relativement à la vigueur constitutionnelle ; elle est un précieux moyen de contrôle pour déterminer le caractère physiologique de certains poids excessifs.

3. Influence de l'Indice thoracique.

Le tableau page 205 démontre que l'indice s'accroît à mesure que le coefficient de robusticité s'améliore ; mais cette indication générale ne se trouve guère corroborée par les proportions centésimales de la sériation ; il est à noter à cet égard que les deux groupes médians de celle-ci, qui correspondent aux variations dans l'ordre physiologique, comprennent plus de 87 °/₀ des cas. La relation de l'indice thoracique manque donc de netteté ; nos recherches nous l'ont démontré d'ailleurs, cet élément anthropométrique est d'ordre secondaire et ne peut fournir de présomption sérieuse de normalité ou de vigueur du développement du thorax.

Dans la seconde partie de ce travail nous avons tenté de dégager successivement l'influence des divers facteurs anthropométriques et biologiques, susceptibles d'influencer la robusticité constitutionnelle et partant l'indice calculé suivant la méthode de Pignet ; si certaines conclusions de nos recherches manquent de netteté, c'est

ROBUSTICITÉ	INDICE DE PIGNET	INDICE THORACIQUE									
		NOMBRE DE CAS					PROPORTIONS CENTÉSIMALES				
		α 61 à 68	69 à 76	77 à 84	85 à ω 95	TOTAUX	α 61 à 68	69 à 76	77 à 84	85 ω à 95	TOTAUX
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Anormaux +	− 15/+ 10	3	42	76	10	131	5,77	11,17	21,47	20,41	15_8
Surnormaux	+ 11/+ 15	1	48	68	7	124	1,93	12,77	19,21	14,29	14_9
Normaux { +	+ 16/+ 20	13	55	89	7	164	24,97	14,62	25,14	14,29	19_7
Normaux { −	+ 21/+ 25	16	80	47	8	151	30,83	21,28	13,28	16,32	18_2
Subnormaux	+ 26/+ 30	11	74	30	11	126	21,13	19,68	8,47	22,45	15_1
Anormaux −	+ 31/+ 47	8	77	44	6	135	15,37	20,48	12,43	12,24	16_3
	TOTAUX	52	376	354	49	831	%	%	%	%	%
Fréquence % des Indices thoraciques		6_3	45_2	42_6	5_9	%					
Indice de Pignet moyen		24^1	22^3	17^5	18^6	20^1					

avant tout parce que notre milieu d'études pénitentiaires comprenait des individus d'âges très différents; aussi avons-nous jugé nécessaire de réunir une seconde série de documentation composée exclusivement de détenus de 19 à 22 ans, seule période de la vie à laquelle s'appliquent parfaitement les chiffres de l'échelle de robusticité proposée par Pignet.

Cette série nous permettra d'étudier, pour ainsi dire expérimentalement, l'influence respective des trois éléments de l'Indice et de préciser leur valeur d'élimination dans la formule qui le constitue.

Nous avons réuni 243 observations criminologiques de sujets âgés de 19 à 22 ans, après avoir écarté tous ceux qui étaient atteints de lésions organiques et ceux dont la taille était inférieure à 1,525 ou supérieure à 1,80 m.; ces éliminations avaient pour but d'éviter les causes d'erreur dues à l'élément pathologique et à l'anormalité anthropologique de la stature.

Les 243 détenus de ce groupe, bien homogène, ont été successivement sériés en trois catégories au point de vue de la taille, du périmètre thoracique et du poids corporel ; dans un premier tableau général nous avons indiqué la répartition obtenue pour les différentes gradations adoptées par Pignet ; mais en vue d'en simplifier l'interprétation, nous les avons ramenées à la qualification de normalité biologique ; nous en avons déduit un second tableau où les Indices de Robusticité ont été condensés dans les trois groupes suivants :

Normaux — Subnormaux — Surnormaux.

Avant d'envisager dans cette série l'influence respective qu'exercent la Taille, le Poids et le Périmètre thoracique dans le calcul « Indice de Robusticité », constatons en thèse générale que l'examen du tableau ci-dessus confirme nettement les données acquises déjà. Le périmètre et le poids corporel diminuent proportionnellement à l'élévation de la taille, mais cette diminution n'est pas égale ; elle s'accentue plus rapidement pour le Poids que pour le Périmètre ; nous pouvons en conclure aussi que l'Indice de Robusticité chez les moyens et les grands est surtout influencé par le Poids corporel.

La constitution anthropologique de l'Indice de Pignet

(243 Délinquants âgés de 19 à 22 ans)

I

	TAILLE →	1m525 à 1m595									1m60 à 1m695									1m70 à 1m80									TOTAUX
	POIDS →	< 53			53 à 57			> 57			< 58			58 à 67			> 80			< 68			68 à 72			> 72			
	PÉRIMÈTRE →	< 76	76 à 80	> 80	< 76	76 à 80	> 80	< 76	76 à 80	> 80	< 76	76 à 80	> 80	< 76	76 à 80	> 80	< 76	76 à 80	> 80	< 76	76 à 80	> 80	< 76	76 à 80	> 80	< 76	76 à 80	> 80	
ROBUSTICITÉ Anormale +	INDICE DE PIGNET − 15 / + 10	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—		5	—	—	2	—	—	—	—	—	2	—	—	3	13
Surnormale	+ 11 / + 15	—	—	—	—	—	1	—	—	4	—	—	—	—	—	12	—	—	2	—	—	—	—	—	4	—	—	4	27
Normale +	+ 16 / + 20	—	—	—	—	1	4	—	1	5	—	—	—	—	—	19	—	—	3	—	—	4	—	—	7	—	—	2	46
Normale −	+ 21 / + 25	—	3	1	—	3	—	—	—	—	—	—	6	—	7	20	—	—	—	—	—	11	—	—	4	—	—	—	55
Subnormale	+ 26 / + 30	—	2	1	—	1	—	—	—	—	—	9	4	—	15	2	—	—	—	—	8	9	—	—	—	—	—	—	51
Anormale —	+ 31 / + 47	6	2	—	—	—	—	—	—	—	15	10	—	—	3	—	—	—	—	1	9	5	—	—	—	—	—	—	51
	TOTAUX →	6	7	2	—	5	5	—	1	10	15	19	10	—	25	58	—	—	7	1	17	29	—	—	17	—	—	9	↓
		15			10			11			44			83			7			47			17			9			
		36									134									73									
		243																											243

Même tableau à sériations condensées

II

	TAILLE ⟶	1m525 à 1m595									1m60 à 1m695									1m70 à 1m80									TOTAUX
	POIDS ⟶	< 53			53 à 57			> 57			< 58			58 à 67			> 67			< 68			68 à 72			> 72			
	PÉRIMÈTRE ⟶	< 76	76 à 80	> 80	< 76	76 à 80	> 80	< 76	76 à 80	> 80	< 76	76 à 89	> 80	< 76	76 à 80	> 80	< 76	76 à 80	> 80	< 76	76 à 80	> 80	< 76	76 à 80	> 80	< 76	76 à 80	> 80	
ROBUSTICITÉ Surnormale	IND. PIGNET − 15 / + 15	—	—	—	—	—	1	—	—	5	—	—	—	—	—	17	—	—	4	—	—	—	—	—	6	—	—	7	40
Normale	+ 16 / + 25	—	3	1	—	4	4	—	1	5	—	—	6	—	7	39	—	—	3	—	—	15	—	—	11	—	—	2	101
Subnormale	+ 26 / + 47	6	4	1	—	1	—	—	—	—	15	19	4	—	18	2	—	—	—	1	17	14	—	—	—	—	—	—	102
		6	7	2	—	5	5	—	1	10	15	19	10	—	25	58	—	—	7	1	17	29	—	—	17	—	—	9	↓
	TOTAUX ⟶	15			10			11			44			83			7			47			17			9			
		36									134									73									
		243																											243

Dans les tableaux suivants où nous envisageons séparément l'influence de la Taille, du Poids et du Périmètre thoracique, nous avons établi un double pourcentage : le premier (I) indique la répartition des tailles dans chaque groupe d'indices ; le second (II) est calculé d'après l'importance relative de chaque groupe d'indices chez les sujets d'une même taille.

A. *La taille*, tableau p. 210.

Conclusions. — I) Il résulte du pourcentage relatif à l'Indice de Pignet que la proportion de bons indices dépasse la moyenne générale chez les sujets de 1m60 à 1m645 et de 1m70 à 1m745 ; chez les détenus de 1m525 à 1m645 celle des indices moyens l'emporte ; au contraire, la représentation numérique des mauvais indices est relativement trop élevée chez les détenus de très haute taille et chez ceux mesurant de 1m65 à 1m695.

II) Le 2e tableau centésimal renforce cette constatation ; c'est chez les sujets de 1m70 à 1m745 et de 1m60 à 1m645 qu'il y a la proportion la plus élevée de bons indices ; le pourcentage d'indices moyens décroît régulièrement à mesure que la taille s'élève en même temps que l'augmentation des mauvais indices suit une progression parallèle.

B. *Le poids corporel*, tableau p. 211.

Conclusions. — I) Dans le premier tableau les rapports, en règle générale, s'éloignent considérablement de la moyenne d'ensemble des 243 sujets. Le maximum relatif de bons indices se rencontre chez les individus dont le poids est élevé (68 à 87 kgs). Le pourcentage des indices moyens suit une courbe binomiale comme celui de l'ensemble de la série, mais le sommet, correspondant au nombre relatif des poids de 58 à 67 kgs, en est beaucoup plus élevé ; enfin les mauvais indices sont « anormalement » nombreux chez les sujets à poids insuffisant.

II) Si nous examinons les pourcentages du second tableau, nous voyons se préciser cette relation prédominante entre le Poids et l'Indice de Robusticité : chiffre infime de bons indices parmi les poids très faibles et les poids insuffisants ; chiffre considérable chez les poids avantageux, proportion énorme quand

A. — TAILLE

ROBUSTICITÉ	INDICE DE PIGNET	NOMBRE DE CAS						PROPORTIONS CENTÉSIMALES										
								I PAR RAPPORT A L'INDICE DE ROBUSTICITÉ					II DES INDICES DANS LES DIFFÉRENTS GROUPES DE TAILLE					
		< 1^{60}	1.60 à 1.645	1.65 à 1.695	1.70 à 1.745	1.75 à 1.80	TOTAUX	< 1^{60}	1.60 à 1.645	1.65 à 1.695	1.70 à 1.745	1.75 à 1.80	< 1^{60}	1.60 à 1.645	1.65 à 1.695	1.70 à 1.745	1.75 à 1 80	MOYENNE GÉNÉRALE
Bonne (surnormaux)	— 15/+ 15	6	10	11	10	3	40	15—	25—	27,5	25—	7,5	16.6	18,2	13,9	19,3	14, 2	16,4
Moyenne (normaux)	+ 16/+ 25	18	23	32	20	8	101	17,8	22,8	31,7	19,8	7,9	50—	41,8	40,5	38,4	38,2	41,6
Mauvaise (subnormaux)	+ 26/+ 47	12	22	36	22	10	102	11,8	21,5	35,3	21,5	9,8	33,4	40—	45,6	42,3	47,6	42—
		36	55	79	52	21	243	14,8	2 2,6	32,5	21,4	8,7	100	100	100	100	100	100

B. — POIDS CORPOREL

ROBUSTICITÉ	INDICE DE PIGNET	NOMBRE DE CAS						PROPORTIONS CENTÉSIMALES										
								I					II					
								PAR RAPPORT A L'INDICE DE ROBUSTICITÉ					DES INDICES DANS LES DIFFÉRENTES CATÉGORIES DE POIDS					
		43/52	53/57	58/67	68 72	73/87	TOTAUX	43/52	53/57	58/67	68/72	73/87	43/52	53/57	58/67	68/72	73/87	MOYENNE GÉNÉRALE
Bonne (surnormaux)	— 15 / + 15	—	1	24	8	7	40	—	2,5	60—	20—	17,5	—	2,1	17,8	40—	78—	16,4
Moyenne (normaux)	+ 16 / + 25	4	16	67	12	2	101	3,9	15,9	66,4	11.9	1,9	12,1	34.8	49,7	60—	22—	41,6
Mauvaise (subnormaux)	+ 26 / + 47	29	29	44	—	—	102	28,4	28,4	43.2	—	—	87,9	63,1	32,5	—	—	42—
	TOTAUX	33	46	135	20	9	243	13,6	18,9	55,6	8,2	3,7	100	100	100	100	100	100

le poids est très élevé. Courbe binomiale irrégulière des proportions d'indices moyens ; à noter la chute du pourcentage chez les sujets très lourds. L'influence prépondérante du Poids sur l'Indice de Robusticité se marque aussi à toute évidence par les proportions rapidement décroissantes, avec l'augmentation des chiffres des pesées, des indices classés par Pignet comme très faibles ou mauvais (26 à 47).

C. *Le périmètre thoracique*, tableau p. 213.

Conclusions. — I) Le premier calcul centésimal indique que chacun des indices de Robusticité se limite nettement à trois catégories de périmètres ; les constitutions robustes ont toutes un périmètre au-dessus de 80 (72 °/₀ d'entre eux sont compris entre 86 et 90 cm.) ; les indices moyens se groupent entre les périmètres 76 et 90 avec une proportion dépassant les 2/3 dans la catégorie médiane ; enfin les mauvais indices, nombreux déjà au-dessous de 76 cm., atteignent le maximum entre 76 et 80 pour se raréfier au delà et disparaître au périmètre 84.

II) Le 2ᵉ tableau centésimal accentue considérablement la portée de la conclusion précédente ; nous voyons notamment que les trois périmètres dépassant 90 cm. se rangent parmi les bons indices ; près de 3/4 des périmètres 86 à 90 cm. appartiennent au même classement de robusticité. Quant aux indices au-dessous de la normale, ils représentent 3/4 des périmètres compris entre 76 et 80 cm. et la totalité des périmètres inférieurs à 76 cm.

Deux conclusions générales se dégagent de l'étude de cette série sélectionnée de 243 détenus de 19 à 22 ans : d'une part la prépondérance considérable prise en fait par le Poids corporel dans la constitution de l'Indice de Robusticité, puisque, en dernière analyse, il intervient presque exclusivement dans l'élimination des constitutions médiocres ou mauvaises ; d'autre part l'incontestable influence qu'exerce la Taille sur les moyennes physiologiques du Périmètre et du Poids corporel, moyennes qui varient notablement surtout entre 1 m. 60 et 1 m. 80.

Nous touchons ici à deux écueils importants de la méthode de Pignet. En effet, si l'on veut éviter des exclusions peu équitables et des diagnostics constitutionnels erronés, il importera de cor-

C. — **PÉRIMÈTRE THORACIQUE**

ROBUSTICITÉ	INDICE DE PIGNET	NOMBRE DE CAS						PROPORTIONS CENTÉSIMALES										
								I					II					
								PAR RAPPORT A L'INDICE DE ROBUSTICITÉ					DES INDICES DANS LES DIFFÉRENTS GROUPES DE PÉRIMÈTRES					
		< 76	76/80	81/85	86/90	< 90	TOTAUX	< 76	76/80	81/85	86/90	< 90	< 76	76/80	81/85	86/90	< 90	MOYENNE GÉNÉRALE
Bonne (surnormaux)	— 15 / + 15	—	—	8	29	3	40	—	—	20—	72,5	7,5	—	—	8,3	72,5	100 -	16,4
Moyenne (normaux)	+ 16 / + 25	—	19	71	11	—	101	—	18,8	70,3	10,9	—	—	23,5	74—	27,5	—	41,6
Mauvaise (subnormaux)	+ 26 / + 47	23	62	17	—	—	102	22,5	60,8	16,7	—	—	100—	76,5	17,7	—	—	42—
TOTAUX		23	81	96	40	3	243	9,5	33,3	39,5	16,5	1,2	100	100	100	100	100	100

riger l'Indice de Robusticité chaque fois que les chiffres de la pesée ou de la mensuration de la taille s'écarteront notablement de la moyenne et ce, sans cause pathologique apparente.

Afin de rendre évidente la nécessité d'apporter cette double correction aux chiffres de l'Indice de Robusticité, nous avons, dans le tableau ci-contre, sérié en trois groupes de tailles, placé en regard de la notation de Pignet, le coefficient constitutionnel que nous utilisons fréquemment pour apprécier la robusticité dans un cas individuel ; il est constitué par la somme des quotients obtenus en divisant les chiffres respectifs du Poids et du Périmètre thoracique par celui de la Taille, soit :

$$\text{Coefficient de Robusticité} = \frac{\text{P}}{\text{T}} + \frac{\text{Pér}}{\text{T}}$$

Nous avons ainsi un coefficient assez constant, de nature à donner des indications précieuses sur la vigueur constitutionnelle ; il oscille, dans notre milieu de recherches, entre 75 et 100 ; d'une manière absolue le degré de Robusticité est d'autant plus favorable que ce coefficient est plus élevé ; à chiffre égal, celui-ci comporte une signification meilleure de résistance organique chez les sujets de petite taille que chez les grands.

Il est intéressant de comparer entre elles ces deux notations numériques de la Robusticité constitutionnelle.

En règle générale notre coefficient suit assez fidèlement l'Indice de Pignet ; il arrive cependant qu'il y ait dans une même sériation de tailles des discordances entre les deux coefficients, mais elles n'ont en général que la valeur d'un ou deux échelons de l'échelle de Pignet; ex. : pour les tailles petites et moyennes, les indices 25 et 34 ; pour les hautes tailles, l'indice 30.

Il en est tout autrement si l'on compare entre elles les notations obtenues dans les trois sériations de tailles pour des sujets dont l'Indice de Pignet est identique ; ici la différence est constante et régulière; il y a un écart de 2 degrés en moyenne entre les notations constitutionnelles des détenus de petite taille et celles des détenus dont la stature dépasse 1 m. 70, le chiffre des sujets moyens restant intermédiaire.

Si l'on subdivise d'ailleurs notre coefficient de Robusticité en ses 2 composants $\frac{\text{P}}{\text{T}}$ et $\frac{\text{Pér}}{\text{T}}$, nous constatons que la même remarque

Relations existant entre l' « Échelle de Pignet » et le Coefficient de Robusticité $\frac{P}{T} + \frac{Pt}{T}$

(243 détenus de 19 à 22 ans dont la taille est comprise entre 1m52 et 1m80)

INDICE DE PIGNET	< 1m60			1m60 à 1m695			1m70 à 1m80		
	Oscillations du quotient $\frac{P}{T}$	Oscillations du quotient $\frac{Pt}{T}$	Oscillations du Coefficient	Oscillations du quotient $\frac{P}{T}$	Oscillations du quotient $\frac{Pt}{T}$	Oscillations du Coefficient	Oscillations du quotient $\frac{P}{T}$	Oscillations du quotient $\frac{Pt}{T}$	Oscillations du Coefficient
0	—	—	—	—	—	—	45,5 — 47,6	52,3 — 54,7	99,9 — 100,2
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	—	—	—	43,2	54,9	98,1	—	—	—
4	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	40 — 40,6	53,3 — 55	95,3 — 95,6	—	—	—
8	—	—	—	—	—	—	42,8	52,2	95
9	—	—	—	40,3	53,9	94,2	—	—	—
10	37,9	55,1	93	39,6 — 40,8	52,9 — 54,1	93,5 — 93,7	41,4 — 42	52 — 52,6	94
11	40,1	52,8	92,9	39,9 — 40 4	52,8 — 53,5	92,9 — 93,4	—	—	—
12	—	—	—	36,9 — 39.2	53,2 — 55,4	92,1 — 92,4	42,9	50	92.9
13	38,5	53,2	91,5	39,1 — 40	51.3 — 52,7	90,4 — 92	42,2	50,4	92,6
14	—	—	—	38,9 — 40,4	51,3 — 52,5	91.2 — 91,7	40,4 — 41,9	49,7 — 51,1	91,5 — 91.8
15	34.6 — 37,8	52,2 — 55,8	90 — 90,4	38,2	52,2	90,4	38,5 — 41,8	49,4 — 52,6	91,1 — 91,2
16	35,3 — 38,9	50,6 — 53,8	89,1 — 89,5	37 — 40,8	49,3 — 52,6	89,6 — 90,3	38,9	51,4	90,3
17	36,3	52,6	88,9	36,9 — 39,4	50,3 — 52,5	89.3 — 89,8	38.1 — 42,1	48 — 51,8	89.6 — 90,1
18	36,2 — 37,2	51,1 — 52,3	88,2 — 88,5	37,5 — 39,1	49,6 — 51,3	88,4 — 89	37,9 — 41,6	48,1 — 51,4	89,3 — 89,7
19	35	52,4	87,4	37,1 — 39,2	49,4 — 51,3	87.7 — 88.6	39.4 — 40 3	48.2 — 49,4	88,5 — 89,1
20	34,5	52,8	87,3	38,4	50,1	88,5	38,8	49,7	88,5
21	—	—	—	34,4 — 37,9	49,5 — 52,2	86,6 — 87.4	37,6 — 37,9	49.7 — 50,1	87,6 — 87,7
22	33,1	52,4	85,5	36,3 — 36,9	49,2 — 50	86,1 — 86,3	37,3 — 39	48,1 — 49,4	86,7 — 87,1
23	35 — 36	49,3 — 50,1	85,1 — 85,3	35 — 38,5	47,4 — 50,6	85,5 — 86,1	37,1 — 39,1	47,1 — 49,4	86,2 — 86,6
24	33,5	50,9	84,4	34 — 36,8	47.7 — 50,9	84,9 — 85.7	37 — 37,8	47,7 — 49	85,5 — 86
25	31 — 33,7	50,4 — 51,8	82,8 — 84.1	34,2 — 36.3	48,1 — 50,3	84 2 — 85,4	39,4	46,2	85,6
26	35,5	48,1	83.6	34.5 — 36,6	47,3 — 48,9	83,4 — 84,3	36,1 — 37,5	47,1 — 49,1	84,3 — 85,2
27	31,6	51,2	82,8	32,1 — 36,7	47,1 — 49	82,7 — 83,8	34,5 — 34,7	49,4 — 49,7	84,1 — 84,2
28	33,2	48,7	81,9	34,8 — 36 9	46,1 — 48,4	82.6 — 83,3	37,1	46,2	83,3
29	—	—	—	32,8 — 36	46,4 — 49,2	81.8 — 82,4	35,9 — 37,9	45,2 — 47,1	82,6 — 83.2
30	32	49	81	31,6 — 34,8	46,7 — 49,5	81,1 — 81,9	33,8 — 37,6	45 — 48,2	81,7 — 83.2
31	29,5	50	79.5	32,9 — 35,2	45,9 — 48,1	80.9 — 81,6	35,5 — 36,6	45,5 — 46	81,5 — 82.1
32	28,1	50,8	78,9	33,5 — 35,2	45,4 — 47,3	80.5 — 80,8	33,3 — 34,4	47,1 — 47,8	81,1 — 81 5
33	32,2	46,3	78,5	31,3	47,7	79	35,1	45,3	80,4
34	30,8 — 35,4	45,3 — 46,7	77,5 — 80,7	30,9 — 33.5	46,1 — 47,5	78,4 — 79,6	32,8 — 34,4	46,1 — 47,3	80,1 — 80,5
35	—	—	—	31,9 — 32,2	45,6 — 46,6	77,8 — 78,5	34	46	80
36	—	—	—	30,7 — 32,4	45,7 — 46,7	77,4 — 78,1	—	—	—
37	27,7 — 29,1	46,7 — 47,7	75,4 — 75,8	32.1 — 33,3	44,5 — 45,2	77,3 — 77,8	33,1	45	78,1
38	30	45,4	75,4	30.3 — 33,2	43,7 — 46	76,3 — 77,2	—	—	—
39	—	—	—	30,2	45,8	76	—	—	—
40	—	—	—	29,7	45,3	75	30,4 — 33,8	43,4 — 45,8	76,2 — 77,2
41	—	—	—	—	—	—	—	—	—
42	—	—	—	—	—	—	32,6 — 33,3	42,8 — 43,1	75,7 — 76,1
43	—	—	—	—	—	—	31,6	43	74,6
44	—	—	—	—	—	—	32,3	42,7	75
45	—	—	—	28,3 — 31,2	41,4 — 43,8	72,1 — 72,6	—	—	—
46	—	—	—	29,1	42,3	71,4	—	—	—

se justifie pour chacun d'eux, quoiqu'à un degré plus marqué pour le Poids $\frac{P}{T}$.

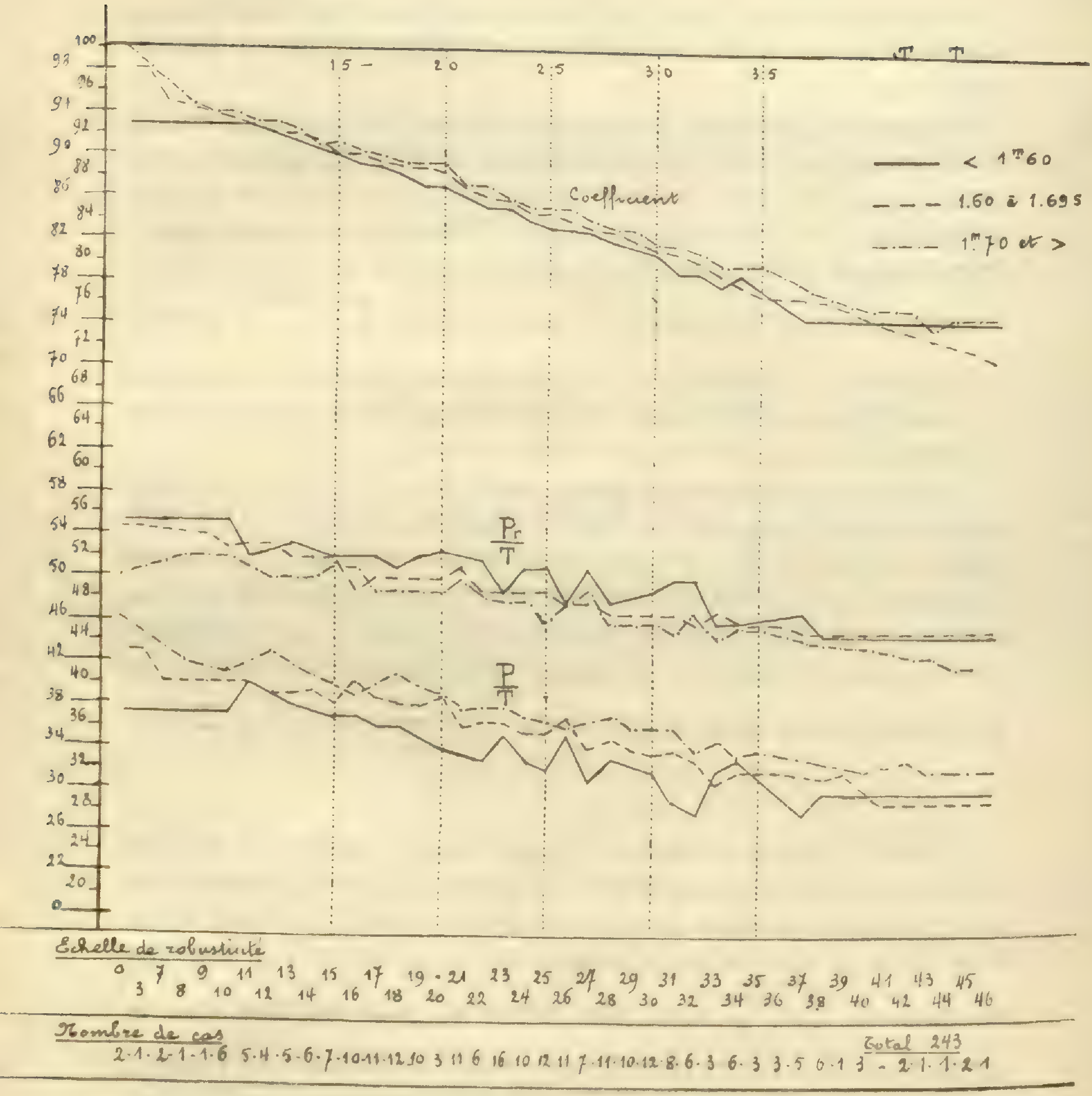
Les graphiques suivants mettent en évidence l'importance et la régularité de cet écart des notations constitutionnelles de Robusticité.

Le premier graphique indique les fluctuations du coefficient et de ses composants chez les 243 détenus de 19 à 22 ans que nous avons examinés ; dans les trois tracés suivants nous avons éliminé les accidents de la courbe dus à l'insuffisance de certaines séries, ce qui nous a permis de déterminer l'amplitude de la décroissance du coefficient de Robusticité et des quotients $\frac{P}{T}$ et $\frac{Pér}{T}$ à mesure que l'Indice de Pignet s'élève ; ces graphiques montrent nettement le parallélisme et les écarts qui existent entre les courbes de ces quotients dans les trois grands groupes de tailles.

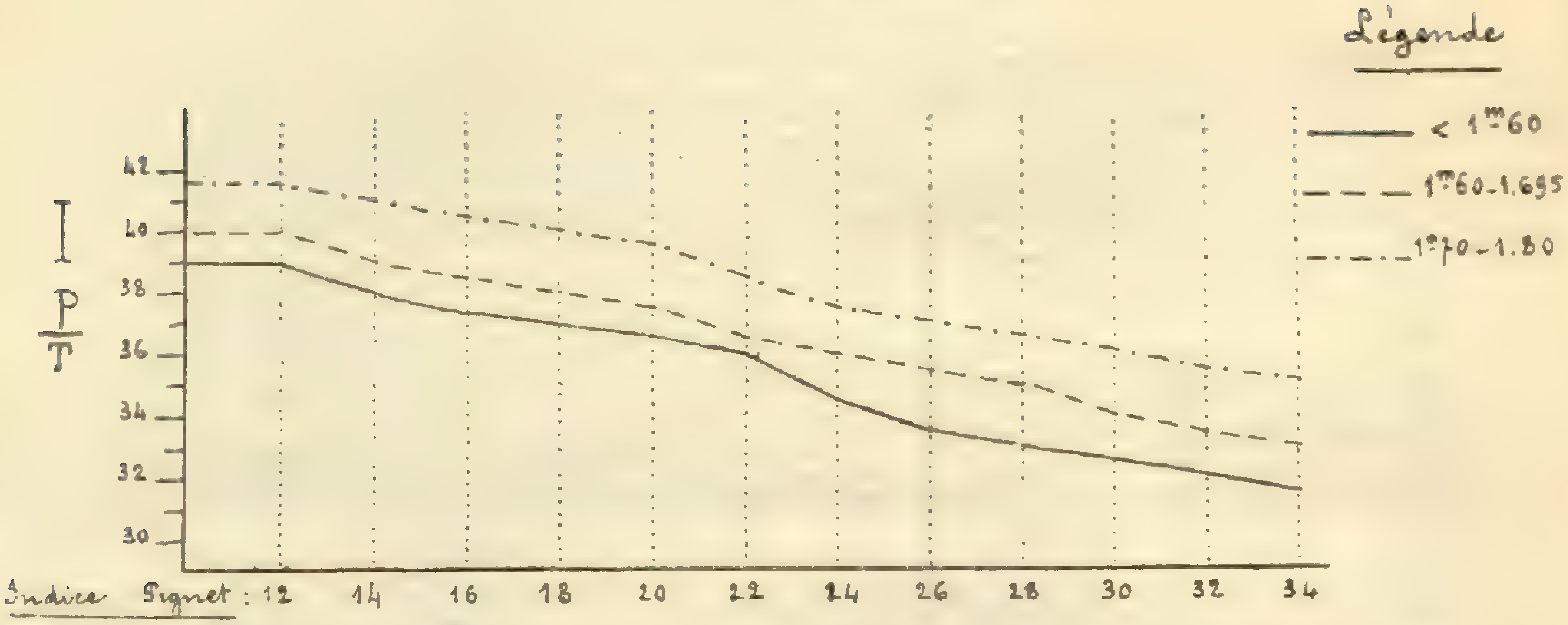
Malheureusement nous n'avons pu établir ces tracés avec certitude qu'entre les indices de Pignet 12 et 34, en raison de l'insuffisance numérique des groupes de détenus classés dans les autres échelons. Ces graphiques correspondent aux chiffres du tableau suivant (page 218) que nous considérons, d'après nos recherches personnelles, comme les moyennes physiologiques du coefficient de Robusticité et de ses composants : $\frac{P}{T}$ et $\frac{Pér}{T}$ entre 19 et 22 ans.

Il résulte nettement de la comparaison des chiffres du tableau suivant (page 218) qu'une correction pour la taille est indispensable pour pouvoir apprécier la valeur constitutionnelle du Poids et du Périmètre et surtout de la somme de leurs chiffres ; en principe les quotients $\frac{P}{T}$ et $\frac{Pér}{T}$ sont plus précis et plus certains que la simple soustraction en laquelle se résume la formule de Pignet ; quoi qu'il en soit, celle-ci doit être corrigée suivant l'élévation de la taille ; peut-être suffirait-il dans ce but de faire varier l'échelle de Robusticité de quelques unités pour les individus au-dessous et au-dessus de la moyenne.

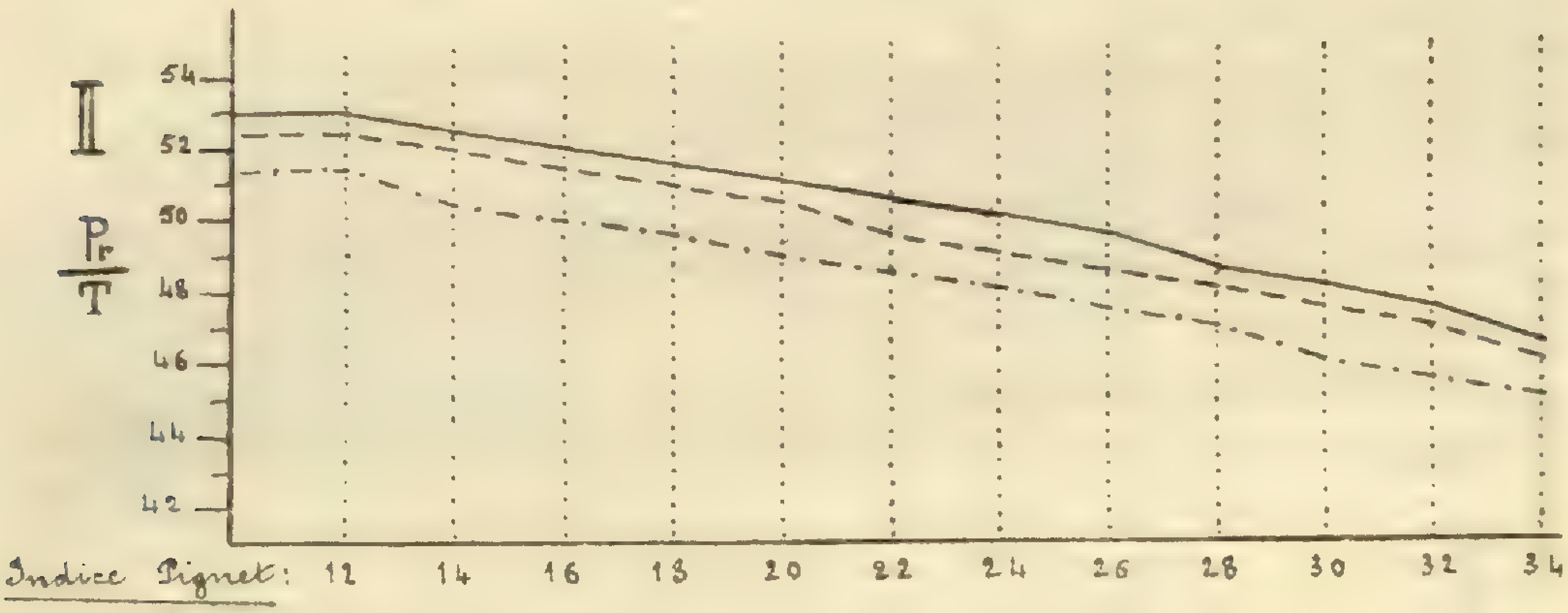
D'intéressantes déductions peuvent, au surplus, être faites des


100
98
96
94
92
90
88
86
84
82
80
78
76
74
72
70
68
66
64
62
60
58
56
54
52
50
48
46
44
42
40
38
36
34
32
30
28
26
24
22
20
0
15
20
25
30
35
< 1m60
1.60 à 1.695
1m70 et >
Coefficient
Pr/T
P/T
Echelle de robusticité
0 3 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 - 21 20 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46
Nombre de cas
2·1·2·1·1·6 5·4·5·6·7·10·11·12 10 3 11 6 16 10 12 11 7·11·10·12·8·6·3 6·3 3·5 0·1 3 - 2·1·1·2 1
Total 243

I. *Quotient* $\frac{\textit{Poids}}{\textit{Taille}}$

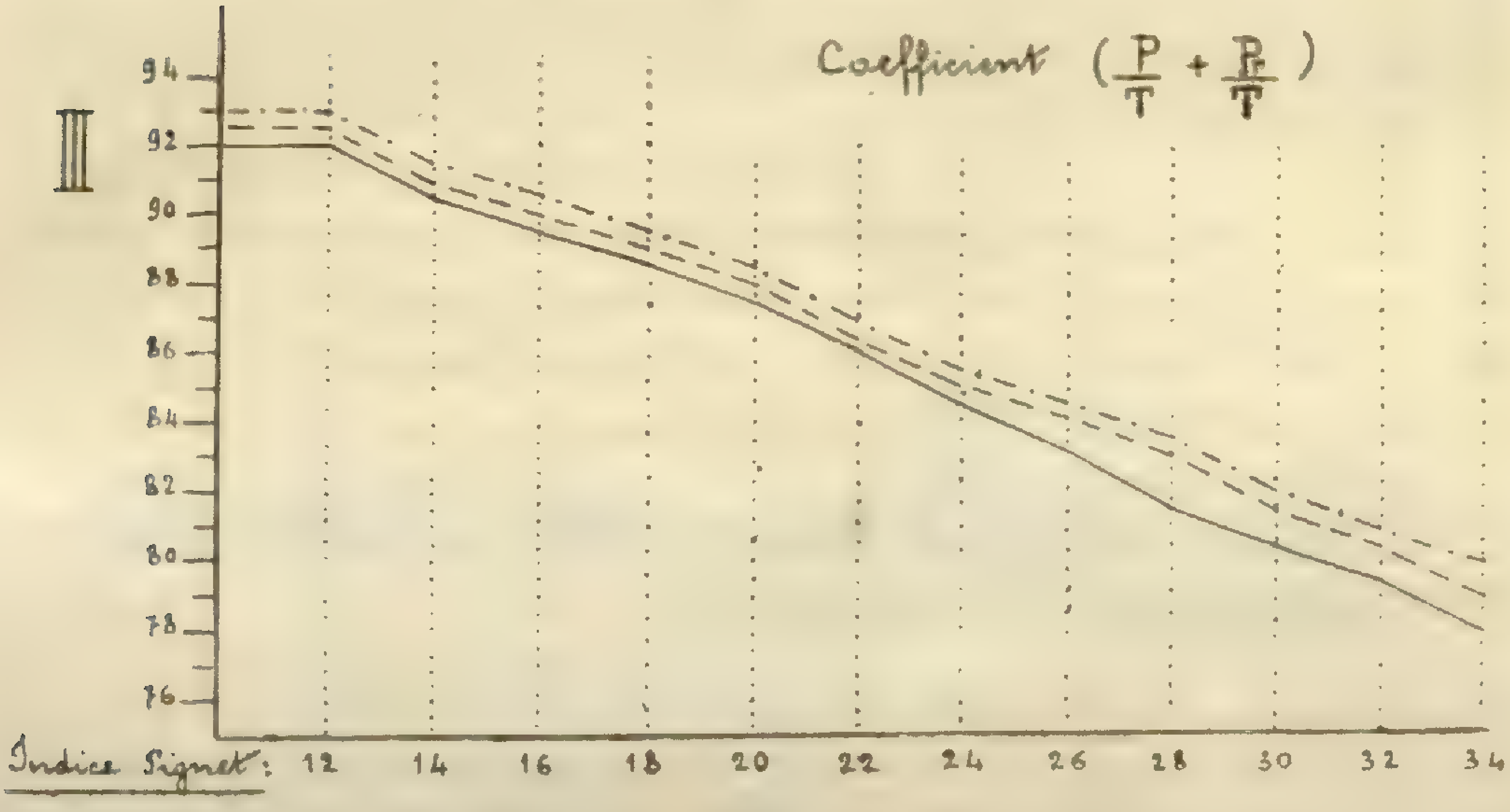


II. *Quotient* $\frac{\textit{Pér. Thoracique}}{\textit{Taille}}$



III. *Coefficient de Robusticité*

$\frac{\textit{Poids}}{\textit{Taille}} + \frac{\textit{Pér. Thor.}}{\textit{Taille}}$



78.

Moyennes physiologiques du Coefficient de Robusticité à l'âge de 20 ans en relation avec l'Indice de Pignet.

I. — Quotient $\frac{P}{T}$				II. — Quotient $\frac{P_t}{T}$				III. — Coefficient $\left(\frac{P}{T} + \frac{Pér.}{T}\right)$			
Indice Pignet	$> 1^m60$	1^m60 à 1^m70	$> 1^m70$	Indice Pignet	$< 1^m60$	1^m60 à 1^m70	$> 1^m70$	Indice Pignet	$< 1^m60$	1^m60 à 1^m70	$> 1^m70$
12	39	40	41,5	12	53	52,5	51,5	12	92	92,5	93
14	38	39	41	14	52,5	52	50,5	14	90,5	91	91,5
16	37,5	38,5	40,5	16	52	51,5	50	16	89,5	90	90,5
18	37	38	40	18	51,5	51	49,5	18	88,5	89	89,5
20	36,5	37,5	39,5	20	51	50,5	49	20	87,5	88	88,5
22	36	36,5	38,5	22	50,5	49,5	48,5	22	86,5	86	87
24	34,5	36	37,5	24	50	49	48	24	84,5	85	85,5
26	33,5	35,5	37	26	49,5	48,5	47,5	26	83	84	84,5
28	33	35	36,5	28	48,5	48	47	28	81,5	83	83,5
30	32,5	34	36	30	48	47,5	46	30	80,5	81,5	82
32	32	33,5	35,5	32	47,5	47	45,5	32	79,5	80,5	81
34	31,5	33	35	34	46,5	46	45	34	78	79	80

chiffres et des graphiques ci-dessus ; elles confirment en thèse générale nos constatations antérieures.

Bornons-nous à signaler que le coefficient de Robusticité *80* obtenu par les quotients $\frac{P}{T}$ et $\frac{Pér}{T}$ nous paraît devoir être considéré comme la limite inférieure admissible pour l'aptitude militaire, en Belgique du moins ; cette limite correspond assez exactement à l'Indice de Pignet :

30 chez les sujets de petite taille,
32 » » de taille moyenne,
34 » » de grande taille.

D'autre part nous voyons combien fréquemment intervient dans la formule de Pignet l'action compensatrice du quotient Périmètre pour améliorer un chiffre insuffisant du quotient Poids ; il serait bien intéressant à cet égard de pouvoir préciser dans quelle mesure cette compensation se justifie au point de vue constitutionnel ; en effet, l'anomalie anthropométrique d'un périmètre disproportionné, d'origine peut-être pathologique (ex. : emphysème) ne peut en rien contrebalancer une insuffisance notable du Poids corporel souvent due, elle aussi, à des causes morbides ou tout au moins à une nutrition défectueuse. Nous posons la question, sans chercher à la résoudre en ce moment, pour en signaler le grand intérêt médical.

Quoi qu'il en soit, on peut se demander si la méthode de Pignet n'échapperait pas à certaines critiques justifiées, en établissant ses échelons de Robusticité sur les quotients $\frac{P}{T}$ et $\frac{Pér}{T}$ au lieu de se baser sur l'écart qui existe entre la taille et la somme de ces deux autres éléments anthropométriques ; elle gagnerait beaucoup, pensons-nous, en précision scientifique ; dans la pratique il suffirait de posséder un tableau général de ces quotients pour effectuer rapidement l'opération arithmétique qu'exige la formule que nous proposons pour le coefficient de Robusticité $\frac{P}{T} + \frac{Pér}{T}$.

On pourrait encore, dans le même ordre d'idées, et au point de vue anthropologique ce serait même plus logique, calculer la somme des écarts existant d'une part entre le Poids corporel et les centimètres des chiffres de la Taille, d'autre part entre le Périmètre thoracique et la demi-taille, ce qui donnerait la formule :

(Poids — 100 — T) + (Pér. th. — 1/2 taille) = Coefficient de Robusticité.

Ce procédé aboutit en somme à additionner les excédents, à signification constitutionnelle éminemment favorable de ces deux écarts.

Le tableau ci-contre indique les relations existant entre l'échelle de Robusticité de Pignet et cette notation anthropologique ; elle met en évidence, elle aussi, les différences sensibles obtenues régulièrement par la sériation des tailles ; en effet elle permet de constater qu'un même indice de Pignet correspond souvent à des résultats divergents de 4 à 5 unités de la notation anthropologique de Robusticité.

Encore une fois nous en déduirons que la méthode de Pignet, soumise à certaines corrections, gagnerait notablement en précision scientifique.

On le voit, plusieurs variétés de la formule de Robusticité de Pignet sont réalisables ; toutes peuvent aboutir au but recherché : une notation constitutionnelle qui soit méthodique, graduée et comparable chez différents sujets.

Seule l'expérience sur une vaste échelle dans le milieu militaire permettrait d'étudier leur supériorité relative ; en signalant les modifications que l'on peut apporter à la conception de notation constitutionnelle que Pignet a eu le grand mérite de proposer, nous avons eu pour but essentiel d'insister sur la valeur de son procédé et sur ses perfectionnements possibles.

Vaut-il mieux introduire directement dans la formule primitive la correction imposée par la taille notamment, ou adopter pour les diverses catégories de sujets des échelons différents? Cette question n'est soluble que par l'expérience ; une chose est certaine, il est nécessaire d'apporter à la formule de Pignet les corrections qu'imposent la taille, les poids excessifs et peut-être certains tempéraments.

Enfin, si l'on voulait étendre la portée de l'Indice de Pignet au delà de 25 ans ou à la période juvénile, il importerait aussi de

Relations entre l'Échelle de Robusticité de Pignet et la somme des écarts entre le Poids et les centimètres de la taille d'une part, le Périmètre et la 1/2 taille d'autre part.

243 DÉTENUS DE 19 A 22 ANS

INDICE PIGNET	< $1^{m}60$	$1^{m}60$ à $1^{m}695$	$1^{m}70$ à $1^{m}80$
0			+ 13,5 à + 15,5
1			
2			
3			
4		+ 15,5	
5			
6			
7		+ 11,25	
8			+ 6,25
9		+ 8	
10	+ 12	+ 9,25 à + 5	+ 5
11	+ 10	+ 6,75 à + 5	
12		+ 5,25 à + 4	+ 2,5
13	+ 7,25	+ 5 à + 0,25	— 1,25
14		+ 3,25 à + 1,25	— 1 à — 2,75
15	+ 6,25 à + 4,75	+ 2,75	— 0,5 à — 4,5
16	+ 6,5 à + 3,5	+ 3,25 à — 1,25	— 3
17	+ 3,75	+ 1,75 à — 0,75	— 2,75 à — 6,5
18	+ 5 à + 2,25	+ 1 à — 3,25	— 3 à — 6,25
19	+ 2,75	+ 0,5 à — 3,75	— 4,5 à — 9
20	+ 0,5	— 4,75	— 7,5
21		— 1,25 à — 6	— 6 à — 7,25
22	+ 1,75	— 2,5 à — 3,75	— 7,5 à — 10,25
23	— 2 à — 2,75	— 3 à — 8	— 7,75 à — 10,75
24	— 1,5	— 4 à — 9,25	— 9,75 à — 12.25
25	+ 1,75 à — 4,75	— 6 à — 10	— 12
26	— 5,5	— 6,75 à — 10,5	— 12,5 à — 15.5
27	— 6	— 7,5 à — 10,75	— 12 à — 12,5
28	— 7,5	— 10,25 à — 13,25	— 14
29		— 11 à — 13,5	— 15 à — 16
30	— 9,5	— 10 à — 12,75	— 15 à — 19,5
31	— 8,5	— 12,5 à — 15,5	— 16 à — 18,25
32	— 9,75	— 14,5 à — 15,5	— 18,75 à — 19
33	— 13,75	— 17,25	— 19,5
34	— 8,25 à — 11,5	— 16,5 à — 17,5	— 16 à — 21,75
35		— 16 à — 16,5	— 22,5
36		— 17,75 à — 18,25	
37	— 14 à — 15,5	— 18,75 à — 22,25	— 23,5
38	— 15,5	— 20 à — 23,25	
39		— 20,75	
40		— 22	— 26 à — 28
41			
42			— 28,5 à — 31,75
43			— 29,5
44			— 32,25
45		— 26 à — 29	
46		— 26,75	

modifier sa formule en tenant compte des moyennes physiologiques qui varient selon l'âge du sujet examiné.

Ces réserves formulées, nous serons entièrement d'accord avec le Docteur Besson qui, dans son beau travail sur le coefficient de Pignet, a parfaitement mis en lumière la valeur scientifique et pratique de cette méthode.

Avec lui nous dirons qu'elle constitue un critérium d'une sûreté indiscutable pour l'évaluation de l'aptitude physique des jeunes gens.

Conclusions.

I. L'Indice de Robusticité, calculé par la formule Pignet,

Taille — (Poids + Périmètre thoracique)

constitue un excellent moyen de contrôle de l'examen médical pour déterminer le degré de vigueur constitutionnelle. Toutefois cette méthode ne peut en aucun cas remplacer celui-ci. Elle offre de grands avantages pratiques pour le dépistage des malades, des faibles et des anormaux anthropométriques, ces derniers toujours suspects d'infériorité organique.

Elle est le meilleur critérium pour subdiviser un groupe important de sujets, en séries de valeur constitutionnelle croissante ; elle paraît être le procédé de choix pour le recrutement militaire.

II. L'échelle de Robusticité, préconisée par Pignet, n'est exacte que pour les individus de 19 à 22 ans ; tout au plus est-elle acceptable jusqu'à l'âge de 25 ans ; au delà, les variations du Poids corporel sont telles, qu'une correction préalable de son chiffre s'impose, en raison de la diversité des facteurs, tant physiologiques que morbides, qui peuvent l'influencer ; cette correction ne saurait être qu'individuelle.

III. L'échelle de Robusticité, déduite par Pignet de ses recherches dans le milieu militaire français, n'est pas applicable aux recrues belges ; au préalable, une révision de la qualification de ses indices est nécessaire.

D'après nos recherches, le chiffre de *35* nous paraît en principe pouvoir être accepté comme limite extrême de l'aptitude militaire en Belgique ; encore faudrait-il être plus rigoureux pour les conscrits de petite taille et adopter pour eux l'échelon *31* comme limite d'admission ; nous estimons toutefois que des expériences de contrôle devraient être faites dans les divers régiments de l'armée belge ; elles serviraient de base pour fixer l'échelle de Robusticité à adopter pour l'incorporation des recrues.

IV. Il est préférable de substituer le Périmètre xyphoïdien expiratoire au Périmètre mamelonnaire ou sous-pectoral ; il est en moyenne inférieur à celui-ci de 3 à 4 centimètres.

V. Pour être rigoureusement exacte, l'échelle de Robusticité proposée par Pignet devra subir une correction dans un certain nombre de cas :

1° — *Tailles inférieures à 1,60 m.* = Abaissement de 5 unités de la limite physiologique qui correspond en pratique à celle de l'aptitude militaire.

2° — *Tailles supérieures à 1,70 m.* = Tolérance plus grande pour les cas-limites, si le périmètre pectoral est normal ; le minimum admissible peut être relevé de 5 unités.

3° — *Tempérament* = Pour les sujets de tempérament nettement sanguin, abaissement de 5 unités ; une tolérance de même importance (relèvement de 5 unités) doit être acquise aux sujets de tempérament bilieux ou bilieux-nerveux.

4° — *Poids corporel* = Les indices négatifs ou voisins de *0*, obtenus à l'aide d'un poids corporel élevé et s'expliquant par l'obésité et le lymphatisme du sujet, n'expriment nullement une présomption de Robusticité ; l'examen médical devrait être particulièrement rigoureux dans ces cas dont le caractère est souvent morbide ou anormal.

VI. Il existe des corrélations étroites et régulières entre les données de l'examen médical, relatives à l'état constitutionnel et à l'état de santé, et les renseignements fournis par l'Indice de Robusticité ; celui-ci possède donc une réelle valeur de contrôle.

VII. L'importance du périmètre thoracique dans le coefficient de Robusticité est relativement considérable ; au contraire l'amplitude respiratoire et l'indice thoracique ne varient pas parallèlement à l'Indice de Pignet. Il y a lieu de remarquer, ainsi que nous l'avons établi également pour le Poids corporel, que certains chiffres excessifs de Périmètre n'ont pas dans certains cas (emphysème par exemple) la signification favorable qu'en général on peut accorder à cet élément ; aussi convient-il d'examiner attentivement les sujets dont la forte insuffisance du Poids corporel est compensée par d'excellents chiffres périmétriques.

VIII. La méthode de notation constitutionnelle proposée par Pignet ne tient pas suffisamment compte de l'influence de la taille ; à cet égard on pourrait heureusement substituer à sa formule Indice $= T - (P + \text{Pér.})$ la somme des quotients $\frac{P}{T} + \frac{\text{Pér}}{T}$; la comparaison des chiffres obtenus par les deux procédés démontre que les résultats du second sont sensiblement plus réguliers.

IX. Dans le même ordre d'idées, il serait plus conforme aux principes de l'anthropologie métrique de comparer le Poids au chiffre des centimètres de la taille et le Périmètre à la demi-taille ; la somme de leurs écarts arithmétiques donne également un coefficient de Robusticité intéressant à mettre en parallèle avec celui de Pignet.

X. Somme toute, l'Indice de Robusticité est un excellent moyen de classement constitutionnel ; il offre de grands avantages pratiques au point de vue militaire pour fixer les limites de l'aptitude au service et pour assurer une répartition rationnelle des incorporés dans les différentes armes ; car la méthode de Pignet assure automatiquement l'élimination des recrues faibles, malades ou anormalement constituées et elle permet de classer, suivant leur vigueur constitutionnelle, les sujets reconnus aptes au service.

Sur des Névroptères nouveaux ou critiques

PAR

le R. P. Longin NAVAS, S. J.

TROISIÈME SÉRIE (1)

Famille MYRMÉLÉONIDES

27. **Sogra distincta** Ramb. var. **obliqua** nov.

Abdomen fuscum, vix pallido notatum.

Ala anterior stigmate distincte interne fusco limitato ; area procubitali striis 5 fuscis elongatis, subcontiguis ; alia stria minus visibili subapicali, longitudinali, inter primum et secundum ramum sectoris radii ; ultra angulum cubiti, ramo obliquo cubiti parallela et proxima, illum ultra medium contingente, ante marginem posteriorem obsoleta.

Ala posterior immaculata.

Cetera ut in typo.

Long. corp. ♀	30 mm.
— al. ant.	41 »
— — post.	34,5 »

Patrie. Colonie du Cap, Steynsburg, Dr F. Ellenberger, 1910 (Mus. de Paris).

28. **Sogra mordax** Nav. Mem R. Acad. Cienc. Barcelona, 1912, X, p. 151, f. 7.

---

(1) Voir la première série dans ces ANNALES, 1920, p. 17 et la deuxième IBID., p. 189.

Centroclisis distincta. Petersen (nec Rambur). Arkiv för Zoologi, 1916, p. 14 (separata).

Petersen (loc. cit.) écrit : « I am sure that several of the Navasian species from Africa, f. inst. *difficilis* (¹), *perversa, mordax* and *iracunda,* are only synonyms of *C. distincta.* » Je suis très loin d'avoir cette sûreté de Petersen. Dans une autre occasion j'ai fait ressortir la diversité de la *perversa;* à présent l'occasion me vient d'affirmer celle de la *mordax.*

Le type de l'espèce est ♂. Un échantillon ♀ que j'ai vu postérieurement me servira pour ajouter des caractères, quelques-uns propres du sexe.

Pedes femoribus subfuscis, tibiis ferrugineo-testaceis, fusco punctatis et lineatis ; calcaribus parte apicali tenui, nigra.

Alæ linea plicata anteriore a ramo posteriore sectoris radii incipiente, posteriore fere tribus cellulis ultra ramum obliquum cubiti.

Ala anterior area costali fere 8 venulis gradatis citra stigma ; area radiali 8 venulis internis ; sectore radii 9 ramis.

Ala posterior area apicali paucis (fere 2) venulis gradatis ; area radiali 6 venulis internis, prima et sexta rectis, intermediis geniculatis ; umbra exigua fusca intra angulum cubiti, anteriori respondente.

Long. corp. ♀	34 mm.	
— al. ant.	46	»
— — post.	40	»

Patrie. Rhodesia. N. O., pays des Marotsé, V. Ellenberger, 1910 (Mus. de Paris).

29. **Nelees** Nav. Broteria, 1912, p. 31.

Banks (Bull. Amer. Mus. of Nat. Hist. 1920, XLIII, p. 26, fait

---

(¹) Pour dire la vérité avec exactitude, je n'ai jamais décrit aucune espèce de *Sogra* sous le nom de *difficilis.* Seulement, après avoir amplié la description que Rambur donna de sa *distincta,* j'ai ajouté (Mem. R. Acad. Cienc. Barcelona, 1912, X, p. 147) : « Obs. Para el caso no imposible de que no fuera ésta la verdadera *distincta* de Rambur, propongo para esta especie suficientemente determinada por lo dicho, el nombre de *difficilis.* » Ce qui est très différent de ce que Petersen semble signifier.

ce genre synonyme du genre *Hagenomyia* Banks, en l'effaçant par conséquent. Ainsi il écrit : « *Hagenomyia imperator* (Navás), *indistincta* (Navás), etc. » L'identification des deux genres n'est pas possible. Sans tenir compte d'autres caractères, pour le genre *Hagenomyia* Banks établit (Ann. Entom. Soc. of America, 1911, p. 8) : « several crossveins before the radial sector in the hind wings ; the spurs are no longer than the first tarsal joint. » Par contre, pour le *Nelees* je dis : « una (venula radiali ante sectorem radii) in ala posteriore... calcaribus anterioribus duos primos tarsorum articulos superantibus ».

Les deux genres *Hagenomyia* Banks et *Nelees* Nav. diffèrent si largement, qu'il faut les placer dans deux tribus diverses, le premier dans celle des *Myrmeleonini*, le second dans les *Neuroleini*.

Banks écrit également : *Hagenomyia lyncea* Fabr. Je place cette espèce dans le genre *Macroleon* Banks. Par conséquent, des quatre espèces attribuées par Banks (loc. cit.) au genre *Hagenomyia* il en reste une seulement, *H. tristis* Hag.

N. B. La liste que je viens de mentionner a été rédigée par le D^r^ Bequaert, d'après l'introduction de Banks, mais je suis convaincu que la partie de synonymie est due exclusivement à Banks.

30. **Formicaleo Mesmini** sp. nov.

Similis *tetragrammico* F.

Caput flavidum, stria transversa ante antennas, alia pone antennas, aliis in vertice et occipite ex punctis, nigris ; oculis fuscis ; antennis fuscis, apice articulorum fulvo-ferrugineo, duobus primis articulis subtotis flavis ; palpis flavidis, ultimo articulo labialium fortiter inflato, medio nigro, apice acuto, flavido.

Thorax fuscus, fusco pilosus, superne tribus lineis longitudinalibus parum definitis, interruptis, maxime lateralibus, fulvis. Prothorax latior quam longior, pilis lateralibus et anterioribus albidis. Pili marginis posterioris meso- et metanoti albidi.

Abdomen fusco-nigrum, albido breviter rareque pilosum, elongatum, longius in ♂, segmento tertio longiore primo et secundo simul sumptis, quarto paulo longiore quinto, macula testacea ad basim tergitorum 4, 5, 6, ad apicem 6, 7 ; cercis valvæformibus, nigro pilosis ; lamina subgenitali brevi, nigro pilosa.

Pedes flavidi, albido pilosi, fusco punctati et setosi ; femoribus anterioribus superne subtotis fuscis; apice tibiarum et articulorum tarsorum fusco ; calcaribus testaceis, leviter arcuatis, tres primos tarsorum articulos æquantibus aut superantibus.

Alæ angustæ, hyalinæ, acutæ ; margine externo leviter sub apicem concavo ; linea plicata haud distincta ; area apicali serie venularum gradatarum instructa ; reticulatione fusca, pallido varia ; stigmate albido, interne fusco limitato.

Ala anterior 8 venulis radialibus internis ; 10 ramis sectoris radii ; venis striis pallidis brevibus, crebris in subcosta, raris longioribusque in radio ; aliquot venulis anguste fusco limbatis, striolas parum distinctas formantibus ; 3-4 venulis radialibus externis, aliquot in disco, ad rhegma, striola distinctiore ad anastomosim rami obliqui cubiti.

Ala posterior nullis venulis limbatis, nisi umbra parum distincta fuscescente præter angulum posticum ; sectore radii 12 ramis.

	♂	♀
Long. corp.	38 mm.	35 mm.
— al. ant.	36 »	36'5 »
— — post.	35 »	36 »

Patrie. Caucase, Prov. d'Elisabethpol, Gook Tapa, L. Mesmin, 1910 (Mus. de Paris).

La comparaison de cette espèce avec des échantillons typiques du *F. tetragrammicus* F. lui fait ressembler beaucoup, semblant plus pâle aux ailes ; mais la forme de l'abdomen, plus allongé, surtout chez le ♂, et en particulier le segment troisième, qui arrive à mesurer lui seul 9'5 mm., est un caractère décisif pour la séparer.

31. **Feinerus umbratus** Nav. Insecta, 1919, p. 191, fig. 17.

La vue d'échantillons complets me permettra d'ajouter à la description.

Abdomen fusco-nigrum, superne pluribus segmentis macula grandi testacea notatis, majore in ♂.

Ala posterior umbra rhegmatica minore in ♀ ; area cubitali externa plerumque triareolata, in tertio apicali biareolata ; in ♀ aliquot areolis ad medium areæ in quatuor divisis.

	♂	♀
Long. corp.	32 mm.	36 mm.
— al. ant.	34 »	43 »
— — post.	32'5 »	42 »

Patrie. Haut Plateau Yunnam (Ta-Tchoung, Distr. de Yunnam Fou, 1850-2000 m., 25° lat. N.), 13-29 avril 1914, 13 mai 1914, Dr. Legendre (Mus. de Paris).

32. **Creoleon latens** Nav.

Creagris latens. Navas, Rev. Zool. Afric., 1911, p. 242, fig. 7.

Esben Petersen (Arkiv för Zoologi, 1916, p. 19, separata) a prétendu identifier cette espèce avec le *Nemoleon* (erroné pour *Neuroleon*) *alcidice* Banks (Ann. Entom. Soc. Amer. 1911, p. 20), qu'il rapporte à présent à mon genre *Gandulus*.

Je ne m'explique pas comment Petersen a pu confondre ces deux espèces appartenant à deux genres et deux tribus différents.

En effet le *Gandulus alcidice* Banks, de l'Erythræa, appartient à la tribu des *Neuroleini*, tandis que le *Cr. latens* Nav., étant un vrai *Creoleon*, genre type de la tribu des *Creoleini* (auparavant *Creagris* et *Creagrini* respectivement) doit être inclus dans cette tribu tout à fait différente. Petersen avoue (loc. cit.) que le genre *Creagris* est caractérisé principalement « by the different shape of 1A. In *Creagris* the 1A in the forewing is running rather far away for the hind margin ». Or ce caractère et le parallélisme des deux rameaux ou branches du cubitus sont très clairs chez l'échantillon type que je possède dans ma collection et peuvent aussi être aisément distingués dans la figure qui accompagne ma description.

Famille Chrysopides

33. **Ancylopteryx pallida** Banks. Psyche, 1910, vol. XVII, p. 104.

Je rapporte à cette espèce de Nord Keensland, Australie, deux échantillons que j'ai sous les yeux ; mais la description de Banks étant très courte, je vais la refaire en l'accommodant à mon système.

Fulvo-flava, pilis flavis.

Caput flavum ; palpis flavis, ultimo articulo fusco ; antennis gracilibus, flavis, ala anteriore brevioribus.

Thorax superne ad latera leviter fuscescente varius. Prothorax paulo latior quam longior, antrorsum leviter angustatus.

Abdomen pilis longiusculis, nec densis.

Pedes pilis longiusculis ; apice tarsorum fusco ; tibiis I et II medio fusco annulatis, posterioribus leviter compressis, linea impressa longitudinali parum profunda.

Alæ fortiter irideæ ; stigmate insensibili, venulis costalibus in regione stigmatica distinctis, similibus ceteris ; subcosta et radio usque ad regionem stigmaticam proximis, inde sensim divergentibus ; radio ultra subcostæ apicem fere tres venulas antrorsum ad marginem costalem emittente ; pilis fimbriisque longiusculis.

Ala anterior puncto fusco ad radium ; venula prima radiali externa seu ultra sectoris ortum fusco limbata ; aliis præterea venulis ferrugineo-fulvo limbatis, præcipue 5-6 ultimis radialibus, gradatis 7/8, primis intermediis et procubitalibus, prima et tertia cubitalibus, aliquot ad marginem posticum ; 4 venulis intermediis ; tertia cellula procubitali indivisa.

Ala posterior brevior angustiorque, paucis venulis in tertio vel quarto posteriore et aliquot ex gradatis (5/7) vix sensibiliter ferrugineo-fulvo limbatis.

Long. corp.	9'5 mm.
— al. ant.	12 »
— — post.	11'2 »

Patrie. Nouvelles-Hébrides, de Joannis ded. (coll. m.).

Famille Berothides

34. Aux caractères proposés par Tillyard (Proc. Linn. Soc. N. S. Wales, 1916, XLI, p. 315) on peut ajouter :

Venulæ aliquot discales in seriem gradiformem dispositæ.

35. **Tribus des Berothides.** On peut diviser cette famille dans les tribus suivantes, nouvelles.

Berothini, trib. nov.

Alæ una serie venularum gradatarum instructæ ; venula intermedia interna prope divisionem procubiti (citra vel ultra) inserta.

Ala anterior area costali basi angusta, sine ramo recurrente cellulam formante.

Ala posterior duabus venulis radialibus, inter sectorem et radium.

Le type est le genre *Berotha* Walk.

Naizemini trib. nov.

Alæ area costali ramo recurrente dotata ad basim, cellulam oblongam formante.

Ala anterior venulis gradatis in duas series dispositas ; venula obliqua seu recurrente a basi sectoris radii ad furcam procubiti, seu ad ejus ramum anteriorem prope divisionem.

Ala posterior paucis venulis gradatis.

Le type est le genre *Naizema* Nav.

Spermophorellini trib. nov.

Alæ apice rotundatæ sive ellipticæ, margine externo convexo ; una serie venularum gradatarum ; sectore radii pluribus ramis ; area costali basi angusta, sine ramo recurrente cellulam efficiente.

Ala anterior una venula radiali interna, seu citra ortum sectoris sita, tribus vel pluribus externis.

Ala posterior duabus venulis radialibus ; venis plerisque in ♀ squamulis utrimque ornatis.

Le type est le genre *Spermophorella* Till.

Voici donc la clé dichotomique des tribus des Bérothides.

1. Ailes elliptiques ou arrondies au bout ; marge extérieure convexe ; une série de veinules en gradins ; champ costal étroit à la base, sans rameau récurrent ; aile antérieure avec une veinule radiale interne ; aile postérieure avec presque toutes les veines de la ♀ ornées de squamules à l'un côté et l'autre . . . . 3. **Spermophorellini** Nav.

— Ailes aiguës au bout, triangulaires, la marge extérieure plus ou moins convexe ; sans squamules aux veines, ou tout au plus près de la marge postérieure chez la ♀ 2

2. Champ costal à rameau récurrent à la base ; aile antérieure avec deux séries de veinules en gradins ; sans veinule radiale interne . . . . 1. **Naizemini** Nav.

— Champ costal des ailes étroit à la base, sans rameau récurrent ; une série de veinules en gradins aux deux ailes . . . . 2. **Berothini** Nav.

36. **Genres des Berothini.**

Les caractères des genres appartenant aux Berothini étant quelque peu fluctuants, il est utile de les préciser davantage.

On a décrit trois genres : *Berotha* Walker, 1860, *Isoscelipteron* Costa, 1863 et *Lomamyia* Banks, 1906. Ils sont tellement semblables entre eux, qu'on peut les identifier aisément. Si on veut les maintenir séparés, voici les différences que je trouve :

1. Secteur du radius à 5 rameaux ; 7 veinules entre lui et le radius ; à l'aile antérieure aucune veinule radiale interne. . . . . 3. **Lomamyia** Banks.

Plus de 5 rameaux au secteur du radius ; une veinule radiale interne, allant du radius au pédoncule du procubitus. . 2

2. Aile antérieure avec environ 7 rameaux du secteur du radius ; 3 veinules entre le radius et son secteur ; aile postérieure sans squamules aux rameaux de la marge postérieure chez la ♀ . . . . 2. **Berotha** Walk.

— Aile antérieure avec 8 ou 9 rameaux du secteur ; 4 veinules ou davantage entre lui et le radius ; aile postérieure ordinairement avec 7 rameaux du secteur, et chez la ♀ plusieurs squamules bordant les rameaux du bord postérieur. 1. **Isoscelipteron** Costa.

SESSION DES 6 ET 7 AVRIL 1921

A BRUXELLES

SÉANCES DES SECTIONS

Première Section

Jeudi, 7 avril. — La Section constitue son Bureau comme il suit :

Président : M. Ch.-J. de la Vallée Poussin.
Vice-Présidents : R. P. Bosmans, S. J.
M. Alliaume.
Secrétaire : M. Dutordoir.

Elle arrête comme suit la question à mettre au concours :

Exposer et améliorer, si possible, l'état actuel de nos connaissances concernant le Principe de Relativité, spécialement au point de vue de la Mécanique et de l'Astronomie.

M. Alliaume entretient la Section *de la réfraction géodésique et de la réfraction astronomique dans une atmosphère dont les surfaces équiréfringentes ne sont qu'approximativement planes ou sphériques.*

1. L'atmosphère étant isotrope, l'indice de réfraction μ en chacun de ses points n'est fonction que des coordonnées de ce point. Soient (q_1, q_2, q_3) ces coordonnées dans un système quelconque. Si le rayon lumineux passe d'une source A à un observateur B, et si ds,

$$ds = f(q_1, q_2, q_3, dq_1, dq_2, dq_3),$$

est un élément d'arc le long de ce rayon au point (q_1, q_2, q_3), la durée du parcours de la lumière de A à B est proportionnelle à

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mu ds = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mu(q_1, q_2, q_3)\, f(q_1, q_2, q_3, dq_1, dq_2, dq_3).$$

La courbe lumineuse est la ligne le long de laquelle

$$\delta \mathrm{I} = 0.$$

On lui trouve ainsi les équations différentielles du second ordre

$$d\left(\mu \frac{\partial f}{\partial dq_1}\right) - f\frac{\partial \mu}{\partial q_1} - \mu \frac{\partial f}{\partial q_1} = 0,$$

$$d\left(\mu \frac{\partial f}{\partial dq_2}\right) - f\frac{\partial \mu}{\partial q_2} - \mu \frac{\partial f}{\partial q_2} = 0,$$

$$d\left(\mu \frac{\partial f}{\partial dq_3}\right) = f\frac{\partial \mu}{\partial q_3} - \mu \frac{\partial f}{\partial q_3} = 0,$$

dont deux seulement sont distinctes (¹).

Si l'on fait usage des coordonnées rectangulaires (x, y, z), les équations différentielles de la trajectoire sont :

$$\frac{d}{ds}\left(\mu \frac{dx}{ds}\right) - \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{d}{ds}\left(\mu \frac{dy}{ds}\right) - \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{d}{ds}\left(\mu \frac{dz}{ds}\right) - \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0,$$

(¹) Cette utilisation du principe de Fermat à la recherche des équations de la trajectoire lumineuse est connue depuis W. R. Hamilton, qui l'a appliqué immédiatement aux coordonnées rectangulaires : *Supplement to an Essay on the Theory of Systems of Rays*, dans les TRANSACTIONS OF THE ROYAL IRISH ACADEMY, t. XVI et XVII, 1830 et 1837. — On retrouve la même application restreinte dans les mémoires de R. Radau : *Recherches sur la Théorie des Réfractions atmosphériques*, ANNALES DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS, Mémoires, t. XVI, 1882, et *Essai sur les Réfractions atmosphériques*, même recueil, t. XIX, 1889. — La note actuelle a pour objet de présenter une méthode générale dans le cas des petites déformations des surfaces équiréfringentes, alors que les mémoires de Radau n'abordent cette étude que d'une manière fragmentaire.

dans lesquelles

$$\frac{d\mu}{ds} = \frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{dz}{ds}.$$

A ces équations on ajoutera

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

pour avoir, sous forme différentielle, les équations paramétriques de la courbe lumineuse, moyennant le paramètre s (¹).

2. Les *surfaces équiréfringentes* ont des équations de la forme

$$\varphi(x, y, z, \lambda) = 0,$$

écrite au moyen du paramètre λ dont μ est une fonction ; et les équations différentielles de la courbe lumineuse sont

$$\frac{d}{ds}\left(\mu\frac{dx}{ds}\right) + \frac{d\mu}{d\lambda}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right) = 0,$$

$$\frac{d}{ds}\left(\mu\frac{dy}{ds}\right) + \frac{d\mu}{d\lambda}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} : \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right) = 0,$$

$$\frac{d}{ds}\left(\mu\frac{dz}{ds}\right) + \frac{d\mu}{d\lambda}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} : \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right) = 0.$$

3. Il sera utile d'exprimer les coordonnées (x, y, z) d'un point de la ligne lumineuse au moyen d'un autre paramètre que l'arc s, soit au moyen d'une variable θ définie par

$$\mu = \frac{ds}{d\theta}:$$

(¹) Appliquées aux coordonnées polaires (ρ, α, δ), les équations différentielles en (q_1, q_2, q_3) se transforment dans les suivantes :

$$\frac{d}{ds}\left(\mu\frac{d\rho}{ds}\right) - \frac{\partial\mu}{\partial\rho} - \mu\rho^2\cos^2\delta\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 - \mu\rho\left(\frac{d\delta}{ds}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d}{ds}\left(\mu\rho^2\cos^2\delta\frac{d\alpha}{ds}\right) - \frac{\partial\mu}{\partial\alpha} = 0,$$

$$\frac{d}{ds}\left(\mu\rho^2\frac{d\delta}{ds}\right) - \frac{\partial\mu}{\partial\delta} + \mu\rho^2\sin\delta\cos\delta\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 = 0.$$

θ a la dimension d'un temps ; c'est un temps mesuré de manière que μ soit égal à l'inverse de la vitesse de la lumière. — Les équations différentielles du rayon lumineux deviennent

$$\mu \frac{d}{d\theta}\left(\mu^2 \frac{dx}{d\theta}\right) + \frac{d\mu}{d\lambda}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right) = 0,$$

$$\mu \frac{d}{d\theta}\left(\mu^2 \frac{dy}{d\theta}\right) + \frac{d\mu}{d\lambda}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} : \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right) = 0,$$

$$\mu \frac{d}{d\theta}\left(\mu^2 \frac{dz}{d\theta}\right) + \frac{d\mu}{d\lambda}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} : \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right) = 0,$$

où

$$\frac{d\mu}{d\theta} = -\left(\frac{d\mu}{d\lambda} : \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{d\theta} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{d\theta}\right),$$

et auxquelles on joindra :

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{\mu^2}.$$

4. Par hypothèse, pour des surfaces équiréfringentes données

$$\varphi(x, y, z, \lambda) = 0$$

et pour une loi donnée de μ en fonction de λ, on a pu intégrer ces équations, et on a trouvé

$$x = \psi_1(\theta), \quad y = \psi_2(\theta), \quad z = \psi_3(\theta),$$

renfermant quatre constantes arbitraires que l'on déterminera dans chaque cas particulier, par exemple par les conditions que le rayon lumineux passe par le point d'observation et y soit tangent à la ligne de visée. Ces fonctions satisfont aux équations

$$\mu^3 \frac{d^2\psi_1}{d\theta^2} - \left(\frac{d\mu}{d\lambda} : \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)\left(2\mu^2 \frac{d\psi_1}{d\theta} \sum \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{d\psi_1}{d\theta} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\mu^3 \frac{d^2\psi_2}{d\theta^2} - \left(\frac{d\mu}{d\lambda} : \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)\left(2\mu^2 \frac{d\psi_2}{d\theta} \sum \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{d\psi_1}{d\theta} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0,$$

$$\mu^3 \frac{d^2\psi_3}{d\theta^2} - \left(\frac{d\mu}{d\lambda} : \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)\left(2\mu^2 \frac{d\psi_3}{d\theta} \sum \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{d\psi_1}{d\theta} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 0.$$

Que l'on considère encore des surfaces équiréfringentes

$$\varphi(x', y', z', \lambda) + \varphi'(x', y', z', \lambda) = 0$$

peu différentes des premières en ce sens que, pour tout groupe numérique (x', y', z'), φ' est une quantité petite vis-à-vis de φ. Par hypothèse, on garde la même expression de μ en fonction du nouveau paramètre λ. Si, en particulier, le terme principal φ étant de la forme $-\lambda + f(x', y', z')$, le terme complémentaire φ' est indépendant de (x', y', z'), c'est que la perturbation atmosphérique laisse intacte la famille des surfaces équiréfringentes, et ne fait qu'y déplacer l'échelle des indices de réfraction. — Dans la nouvelle atmosphère les équations paramétriques de la courbe lumineuse sont de la forme

$$x' = \psi_1(\theta) + \psi'_1(\theta),$$

$$y' = \psi_3(\theta) + \psi'_2(\theta),$$

$$z' = \psi_3(\theta) + \psi'_3(\theta),$$

avec, ensuite, les conditions suivantes : 1° pour toute valeur de θ, le rapport de chaque terme complémentaire $(\psi'_1, \psi'_2, \psi'_3)$ au terme principal correspondant (ψ_1, ψ_2, ψ_3) est une quantité petite, à savoir, par définition, du premier ordre ; 2° les dérivées successives des termes complémentaires sont des quantités petites du deuxième ordre au moins ; 3° les quantités petites sont négligeables à partir du deuxième ordre. — Ces conditions excluent une constitution primitive de l'atmosphère telle que par chacun de ses points puisse passer un rayon situé dans un plan parallèle à l'un des plans coordonnés, comme il arriverait pour des surfaces équiréfringentes cylindriques et parallèles à l'un des axes ; car, pour ce rayon, on aurait constamment, par exemple, $\frac{d\psi_1}{d\theta} = 0$ vis-à-vis de quoi $\frac{d\psi'_1}{d\theta}$, quelque petit soit-il, ne serait pas négligeable.

A cette approximation, les équations différentielles en (x', y', z') sont

$$\mu^3 \frac{d^2\psi_1}{d\theta^2} - \left[\frac{d\mu}{d\lambda} : \frac{\partial(\varphi + \varphi')}{\partial\lambda}\right] \left[2\mu^2 \frac{d\psi_1}{d\theta} \sum \frac{\partial(\varphi + \varphi')}{\partial x'} \frac{d\psi_1}{d\theta} - \frac{\partial(\varphi + \varphi')}{\partial x'}\right] = 0,$$

$$\mu^3 \frac{d^2\psi_2}{d\theta^2} - \left[\frac{d\mu}{d\lambda} : \frac{\partial(\varphi + \varphi')}{\partial\lambda}\right] \left[2\mu^2 \frac{d\psi_2}{d\theta} \sum \frac{\partial(\varphi + \varphi')}{\partial x'} \frac{d\psi_1}{d\theta} - \frac{\partial(\varphi + \varphi')}{\partial y'}\right] = 0,$$

$$\mu^3 \frac{d^2\psi_3}{d\theta^2} - \left[\frac{d\mu}{d\lambda} : \frac{\partial(\varphi + \varphi')}{\partial\lambda}\right] \left[2\mu^2 \frac{d\psi_3}{d\theta} \sum \frac{\partial(\varphi + \varphi')}{\partial x'} \frac{d\psi_1}{d\theta} - \frac{\partial(\varphi + \varphi')}{\partial z'}\right] = 0.$$

Rapprochées du système correspondant pour les surfaces équiréfringentes $\varphi = 0$, elles laissent, à l'approximation actuelle, le système

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial(\varphi + \varphi')}{\partial\lambda} - \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} \frac{\partial(\varphi + \varphi')}{\partial x'} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial(\varphi + \varphi')}{\partial\lambda} - \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} \frac{\partial(\varphi + \varphi')}{\partial y'} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{\partial(\varphi + \varphi')}{\partial\lambda} - \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} \frac{\partial(\varphi + \varphi')}{\partial z'} = 0,$$

duquel on tirera les fonctions inconnues $(\psi'_1, \psi'_2, \psi'_3)$, indépendamment de la manière dont μ varie avec λ. Les expressions résultantes (x', y', z') s'exprimeront ainsi au moyen de quatre constantes dont il faudra calculer de nouvelles valeurs pour définir, parmi toutes les courbes possibles, celle qui passe par le point d'observation et y est tangente à la ligne de visée.

5. Dans l'étude de la réfraction atmosphérique telle qu'elle est utile *en géodésie*, où les surfaces équiréfringentes sont considérées comme planes et horizontales, le plus simple est de diriger l'axe des z verticalement. Mais, en vue d'une déformation de ces surfaces, nous devons, au contraire, éviter cette orientation des axes. — Pour une orientation quelconque, les plans parallèles équiréfringents ont des équations de la forme

$$\varphi \equiv -\lambda + ax + by + cz = 0$$

et les équations différentielles du rayon lumineux sont

$$\mu \frac{d}{d\theta}\left(\mu^2 \frac{dx}{d\theta}\right) - a \frac{d\mu}{d\lambda} = 0,$$

$$\mu \frac{d}{d\theta}\left(\mu^2 \frac{dy}{d\theta}\right) - b \frac{d\mu}{d\lambda} = 0,$$

$$\mu \frac{d}{d\theta}\left(\mu^2 \frac{dz}{d\theta}\right) - c \frac{d\mu}{d\lambda} = 0.$$

Leur ordre s'abaisse au premier,

$$b \frac{dz}{dt} - c \frac{dy}{dt} = A,$$

$$c \frac{dx}{dt} - a \frac{dz}{dt} = B,$$

$$a \frac{dy}{dt} - b \frac{dx}{dt} = C,$$

au moyen de trois constantes d'intégration telles que

$$aA + bB + cC = 0,$$

et elles définissent une courbe appartenant au plan

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

(x_0, y_0, z_0) étant, par exemple, les coordonnées du point d'observation. Leur intégration se termine eu égard à l'expression attribuée à μ en fonction de λ.

Pour une modification atmosphérique qui transforme les plans équiréfringents dans les surfaces quasi-planes

$$\varphi + \varphi' \equiv -\lambda + ax' + by' + cz' + \varphi'(x' y' z' \lambda) = 0,$$

les équations aux corrections se réduisent à

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'} + a \frac{\partial\varphi'}{\partial\lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial y'} + b \frac{\partial\varphi'}{\partial\lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial z'} + c \frac{\partial\varphi'}{\partial\lambda} = 0.$$

Si on désire que φ' soit indépendant de λ, aucune modification atmosphérique n'est compatible avec les hypothèses actuelles, sauf, pour chaque plan équiréfringent, une même variation apportée à son paramètre λ. Quant à la transformation des plans équiréfringents dans d'autres plans, la seule modification compatible avec les hypothèses actuelles équivaut à un déplacement des plans primitifs parallèlement à eux-mêmes, moyennant un glissement convenable des indices de réfraction.

Pour étudier une déformation symétrique par rapport à une perpendiculaire aux plans équiréfringents primitifs, inclinons les axes également sur ces plans, de façon que $a = b = c = 1$, et soit une modification atmosphérique définie par

$$\varphi + \varphi' = -\lambda + x' + y' + z' + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{h-\lambda}{\rho h}\left(x'^2 + y'^2 + z'^2 - \frac{\lambda^2}{3}\right).$$

Chaque surface équiréfringente nouvelle de paramètre λ appartient à une sphère tangente au plan équiréfringent primitif de même indice, en un point de la perpendiculaire menée à ce plan par l'origine des coordonnées. Les coordonnées de son centre sont égales et valent $-\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\rho h}{h-\lambda}$; le rayon est $\left(\frac{\rho h}{h-\lambda} + \frac{\lambda}{\sqrt{3}}\right)$, se réduit à ρ pour $\lambda = 0$, et augmente indéfiniment quand λ tend vers h, qu'il faut considérer comme la hauteur utile de l'atmosphère, vis à vis de quoi ρ est une quantité grande.

Les équations aux corrections sont

$$2\frac{h-\lambda}{h}\left(x' - \frac{\lambda}{3}\right) - \left(x'^2 + y'^2 + z'^2 - \frac{\lambda^2}{3}\right) = 0,$$

$$2\frac{h-\lambda}{h}\left(y' - \frac{\lambda}{3}\right) - \left(x'^2 + y'^2 + z'^2 - \frac{\lambda^2}{3}\right) = 0,$$

$$2\frac{h-\lambda}{h}\left(z' - \frac{\lambda}{3}\right) - \left(x'^2 + y'^2 + z'^2 - \frac{\lambda^2}{3}\right) = 0;$$

elles seront rendues linéaires en $(\psi'_1, \psi'_2, \psi'_3)$ au moyen des valeurs approchées (ψ_1, ψ_2, ψ_3) des inconnues finales (x', y', z') :

$$\left(\psi_1 - \frac{h-\lambda}{h}\right)\psi'_1 + \psi_2\psi'_2 + \psi_3\psi'_3 = \frac{h-\lambda}{h}\left(\psi_1 - \frac{\lambda}{3}\right) +$$

$$-\frac{1}{2}\left(\psi_1{}^2 + \psi_2{}^2 + \psi_2{}^3 - \frac{\lambda^2}{3}\right),$$

et deux équations semblables, constituant un système qui a pour déterminant des coefficients des inconnues

$$\left(\frac{h-\lambda}{h}\right)^2\left(\psi_1+\psi_2+\psi_3-\frac{h-\lambda}{h}\right).$$

6. Dans l'étude de la *réfraction astronomique,* à l'approximation habituelle, les surfaces équiréfringentes sont des sphères concentriques

$$\varphi\equiv-\lambda+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right),$$

et les équations différentielles du rayon lumineux sont

$$\mu\frac{d}{d\theta}\left(\mu^2\frac{dx}{d\theta}\right)-x\frac{d\mu}{d\lambda}=0,$$

$$\mu\frac{d}{d\theta}\left(\mu^2\frac{dy}{d\theta}\right)-y\frac{d\mu}{d\lambda}=0,$$

$$\mu\frac{d}{d\theta}\left(\mu^2\frac{dz}{d\lambda}\right)-z\frac{d\mu}{d\lambda}=0\ (^1).$$

Leur combinaison deux-à-deux abaisse leur ordre au premier :

$$y\frac{dz}{d\theta}-z\frac{dy}{d\theta}=\frac{A}{\mu^2},$$

$$z\frac{dx}{d\theta}-x\frac{dz}{d\theta}=\frac{B}{\mu^2},$$

$$x\frac{dy}{d\theta}-y\frac{dx}{d\theta}=\frac{C}{\mu^2};$$

---

(1) Dans le cas actuel où μ n'est fonction que du rayon vecteur ρ, l'emploi des coordonnées polaires est particulièrement indiqué. Deux des équations différentielles en (ρ, α, δ) se réduisent aux suivantes :

$$\frac{d}{ds}\left(\mu\rho^2\cos^2\delta\frac{d\alpha}{ds}\right)=0,$$

$$\frac{d}{ds}\left(\mu\rho^2\frac{d\delta}{ds}\right)+\mu\rho^2\sin\delta\cos\delta\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2=0,$$

équivalentes à

$$\frac{d\alpha}{ds}=0,\qquad \frac{d}{ds}\left(\mu\rho^2\frac{d\delta}{ds}\right)=0.$$

dans lesquelles on retrouve les équations du rayon lumineux sous la forme habituelle.

les constantes d'intégration sont liées par l'égalité

$$Ax + By + Cz = 0$$

qui montre que la courbe lumineuse est dans un plan passant par le centre des sphères équiréfringentes.

L'intégration des équations différentielles se termine pour chaque expression attribuée à μ en fonction de λ : on a obtenu ainsi

$$x = \psi_1(\theta), \qquad y = \psi_2(\theta), \qquad z = \psi_3(\theta),$$

et on voudrait retoucher ces résultats de manière à les transformer dans les équations du rayon lumineux pour des surfaces équiréfringentes quasi-sphériques

$$\varphi + \varphi' \equiv -\lambda + \frac{1}{2}\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right) + \varphi'\left(x', y', z', \lambda\right).$$

Les équations aux corrections sont

$$x' = x\left(1 - \frac{\partial\varphi'}{\partial\lambda}\right) - \frac{\partial\varphi'}{\partial x'},$$

$$y' = y\left(1 - \frac{\partial\varphi'}{\partial\lambda}\right) - \frac{\partial\varphi'}{\partial y'},$$

$$z' = z\left(1 - \frac{\partial\varphi'}{\partial\lambda}\right) - \frac{\partial\varphi'}{\partial z'}.$$

Par exemple, si les sphères équiréfringentes se sont déformées dans des *ellipsoïdes homothétiques* quasi-sphériques,

$$\varphi + \varphi' \equiv -\lambda + \frac{1}{2}\left(\frac{x'^2}{1+\alpha} + \frac{y'^2}{1+\beta} + \frac{z'^2}{1+\gamma}\right)$$

où (α, β, γ) sont petits vis-à-vis de l'unité, de façon que

$$\varphi' \equiv -\frac{1}{2}\left(\alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma z'^2\right),$$

les équations paramétriques du nouveau rayon sont

$$x' = (1 + \alpha)\,\psi_1(\theta),$$
$$y' = (1 + \beta)\,\psi_2(\theta),$$
$$z' = (1 + \gamma)\,\psi_3(\theta).$$

Le rayon ne cesse pas, à cette approximation, d'être plan, et son plan renferme encore le centre commun aux ellipsoïdes équiréfringents.

Conformément à un rapport de M. de la Vallée Poussin, la Section décide l'impression de la note ci-après.

Sur la Théorie élémentaire de la Fonction Gamma, par le R. P. M.-F. Egan, S. J.

Dans les pages qui suivent je m'occupe des faits principaux de la théorie élémentaire de la fonction Gamma : relation entre les deux intégrales eulériennes, expression de la deuxième par un produit infini, formules d'approximation de Stirling et Gauss.

D'ordinaire on établit ces théorèmes par des calculs assez disparates et parfois très artificiels ; en particulier, on s'appuie sur les propriétés des intégrales doubles à limites infinies. Il me semble que l'ordre que j'ai suivi ici met plus d'unité et de simplicité dans la théorie. Comme on le verra, les intégrales doubles n'interviennent qu'au dernier paragraphe.

En dehors du paragraphe 3 *a*, les variables sont partout supposées réelles.

1. Posons :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt,$$

$$\mathrm{B}(z, x) = \int_0^1 u^{z-1}(1-u)^{x-1}\, du = \int_0^\infty \frac{v^{x-1}}{(1+v)^{x+z}}\, dv,$$

z et x étant *réels et positifs*. On vérifie sans peine que

$$\mathrm{B}(z, x) = \mathrm{B}(x, z),$$

$$\mathrm{B}(z, x) = \mathrm{B}(z+1, x) + \mathrm{B}(z, x+1),$$

$$\mathrm{B}(z, x+1) = \frac{x}{z}\,\mathrm{B}(z+1, x),$$

d'où

$$\mathrm{B}(z, x) = \left(1 + \frac{x}{z}\right)\mathrm{B}(z+1, x).$$

Enfin, n étant un entier, l'intégration successive par parties donne :

$$B(n, x) = \frac{\overline{n-1}\,!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} = \frac{\Gamma(n)\,\Gamma(x)}{\Gamma(n+x)}.$$

2. Théorème I. — *Lorsque z tend vers l'infini, z^x B (z, x) tend vers $\Gamma(x)$.*

En effet,

$$B(z, x) = \left(1 + \frac{x}{z}\right) B(z+1, x)$$

$$= \left(1 + \frac{x}{z}\right) \int_0^1 (1-u)^z u^{x-1}\, du.$$

Or,

$$1 - u < e^{-u}, \quad 1 + \frac{x}{z} < e^{\frac{x}{z}},$$

donc

$$B(z, x) < e^{\frac{x}{z}} \int_0^1 e^{-uz} u^{x-1}\, du.$$

Posons $t = zu$, il vient :

$$z^x B(z, x) < e^{\frac{x}{z}} \int_0^z e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

$$< e^{\frac{x}{z}} \Gamma(x).$$

D'autre part,

$$B(z, x) = \int_0^\infty \frac{v^{x-1}}{(1+v)^{x+z}}\, dv.$$

Or,

$$1 + v < e^v,$$

d'où

$$B(z, x) > \int_0^\infty e^{-(x+z)v} v^{x-1}\, dv.$$

Posons $t = (z + x)v$, on trouve :

$$z^x B(z, x) > \left(1 + \frac{x}{z}\right)^{-x} \Gamma(x)$$

$$> e^{\frac{-x^2}{z}} \Gamma(x).$$

On a donc

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \frac{x}{z} > x \log z + \log \mathrm{B}(z, x) - \log \Gamma(x) > \frac{-x^2}{z},$$

Ce qui démontre le théorème énoncé.

3. Remplaçons z par l'entier n dans le théorème I ; il s'ensuit que $\Gamma(x)$ est la limite pour n infini du produit

$$\frac{n^x (n-1)\,!}{x(x+1) \cdots\cdots (x+n-1)},$$

ou, ce qui revient au même, que (¹)

$$\Gamma(n+x) \sim n^x \, \Gamma(n).$$

3 *a*. Il est facile d'étendre le résultat du paragraphe 3 au cas où $x = \xi + i\eta$, la partie réelle ξ étant positive. Il suffit évidemment de montrer que la fonction

$$\Phi_n(x) = \int_0^n \left\{ e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right\} t^{x-1} \, dt$$

tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Or, le facteur

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

est réel et positif, et le module de t^{x-1} est $t^{\xi-1}$. Il s'ensuit que

$$\Phi_n(\xi) = \int_0^n \left| \left\{ e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right\} t^{x-1} \right| dt$$

$$\geqslant | \, \Phi_n(x) \, | \, .$$

Or, $\Phi_n(\xi)$ tend vers zéro avec $1 : n$, d'après le paragraphe précédent, d'où le théorème énoncé.

4. Théorème II.

$$\mathrm{B}(z, x) = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(x)}{\Gamma(z+x)}.$$

(¹) Pour écarter toute équivoque, convenons d'entendre par cette notation que le rapport des deux membres séparés par le symbole $\sim$ tend vers l'unité.

Posons

$$R(z) = \frac{B(z, x)\,\Gamma(z + x)}{\Gamma(z)\,\Gamma(x)}.$$

On constate sans peine que

$$R(z) = R(z + 1) = \cdots = R(z + n).$$

Cherchons la limite de cette expression lorsque n tend vers l'infini. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} B(z + n, x) &\sim (z + n)^{-x}\,\Gamma(x), \\ \Gamma(z + n + x) &\sim n^{z+x}\,\Gamma(n), \\ \Gamma(z + n) &\sim n^{z}\,\Gamma(n), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\lim R(z + n) = \lim \left(\frac{n}{n + z}\right)^{x} = 1.$$

On a donc $R(z) = 1$, ce qui établit le théorème.

5. Théorème III. — *Lorsque* z *tend vers l'infini positif,* x *restant borné, la fonction*

$$q(z, x) = \operatorname{Log} \frac{z^{x}\,\Gamma(z)}{\Gamma(z + x)}$$

tend uniformément vers zéro.

En effet, si dans les inégalités (1) on remplace $B(z, x)$ par sa valeur donnée par le théorème II, on trouve

$$(2) \cdots \frac{x}{z} > q(z, x) > -\frac{x^2}{z}.$$

Jusqu'ici on a supposé x positif ; mais comme on a

$$q(z, -x) = -q(z - x, x) - x \log\left(1 + \frac{x}{z - x}\right),$$

il s'ensuit que, x étant toujours positif,

$$(2a) \cdots \frac{x^2}{z - x} > q(z, -x) > -\frac{x + x^2}{z - x}.$$

Les inégalités (2) et (2a) établissent le théorème.

6. Le théorème III montre qu'on a approximativement

$$\operatorname{Log} \Gamma(z + x) - \operatorname{Log} \Gamma(z) = x \operatorname{Log} z$$

si z a une valeur positive suffisamment grande. Autrement dit, l'accroissement de Log $\Gamma(z)$ est approximativement uniforme dans un intervalle limité. Il s'ensuit que la valeur moyenne de Log $\Gamma(\xi)$ pour l'intervalle $(z, z, +1)$ est à peu près égale soit à Log $\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$, soit à Log $\Gamma(z)+\frac{1}{2}$ Log z. Cette valeur moyenne étant donnée par l'intégrale de Raabe, on obtient ainsi les formules d'approximation de Stirling et Gauss. Soit en effet

$$M(z)=\int_{z}^{z+1} \operatorname{Log} \Gamma(\xi)\, d\xi$$

l'intégrale de Raabe ; on a

$$M'(z)=\operatorname{Log} \Gamma(z+1)-\operatorname{Log} \Gamma(z)=\operatorname{Log} z,$$

d'où, c étant une constante à déterminer,

$$\begin{aligned} z \operatorname{Log} z - z + c = M(z) & \\ &= \int_{o}^{1} \operatorname{Log} \Gamma(z+x)\, dx \\ &= \int_{o}^{1} [\operatorname{Log} \Gamma(z) + x \operatorname{Log} z - q(z, x)]\, dx \\ &= \operatorname{Log} \Gamma(z) + \frac{1}{2} \operatorname{Log} z - \int_{o}^{1} q(z, x)\, dx, \end{aligned}$$

ce qui donne la formule de Stirling

$$(4) \cdots\cdots \operatorname{Log} \Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right) \operatorname{Log} z - z + c + \Phi(z).$$

D'après les inégalités (2), la valeur absolue de la fonction

$$\Phi(z)=\int_{o}^{1} q(z, x)\, dx$$

est moindre que $1 : 2z$.

Ajoutons Log z à chaque membre de l'équation (4), il vient

$$(4a) \cdots\cdots \operatorname{Log} \Gamma(z+1)=\left(z+\frac{1}{2}\right) \operatorname{Log} z - z + c + \Phi(z).$$

De même, en remplaçant ξ par $\left(z+\frac{1}{2}\right)+x$ dans l'intégrale M (z), on trouve

$$(5) \cdots\cdots \operatorname{Log} \Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=z \operatorname{Log} z-z+c+\Psi(z),$$

la fonction

$$\Psi(z)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} q\left(z+\frac{1}{2}, x\right) d x$$

s'annulant à l'infini (formule de Gauss).

7. La constante c peut se déterminer de plusieurs façons. Le calcul suivant donne en même temps d'autres résultats.

Posons

$$\theta(z)=\frac{2^{2z} \Gamma(z+1) \Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2 z+1)}.$$

On vérifie sans peine que

$$\theta\left(z+\frac{1}{2}\right)=\theta(z),$$

d'où

$$\theta\left(\frac{n}{2}\right)=\theta(\mathrm{o})=\pi^{\frac{1}{2}},$$

n étant un entier quelconque. D'autre part, si l'on remplace $\operatorname{Log} \Gamma(z+1)$ et $\operatorname{Log} \Gamma(2z+1)$ par leurs valeurs tirées de l'équation ($4a$), et $\operatorname{Log} \Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$ par sa valeur donnée par (5), on trouve

$$\operatorname{Log} \theta(z)=c-\frac{1}{2} \operatorname{Log} 2+\Phi(z)+\psi(z)-\Phi(2z).$$

Lorsque z tend vers l'infini, le second membre de cette équation (donc le premier membre aussi), tend vers la limite $c-\frac{1}{2} \operatorname{Log} 2$. La fonction $\operatorname{Log} \theta(z)$, admettant la période $\frac{1}{2}$ et ayant une limite à l'infini, se réduit nécessairement à une constante, dont la valeur est visiblement $\frac{1}{2}$ Log π. On a donc les identités

$$(6) \cdots\cdots c = \frac{1}{2} \operatorname{Log} 2\pi,$$

$$(7) \cdots\cdots \theta(z) = \pi^{\frac{1}{2}},$$

$$(8) \cdots\cdots \Psi(z) = \Phi(2z) - \Phi(z).$$

8. *Valeurs approchées de* Φ (z) *et* Ψ (z).

Remplaçons z par $z + 1$ dans la formule (4), puis soustrayons ; il vient

$$\Phi(z) - \Phi(z+1) = \left(z + \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log} \frac{z+1}{z} - 1$$

$$= \frac{1}{2}(2z+1) \operatorname{Log} \frac{1 + \frac{1}{2z+1}}{1 - \frac{1}{2z+1}} - 1$$

$$= \frac{1}{3(2z+1)^2} + \frac{1}{5(2z+1)^4} + \cdots\cdots$$

Cette série est convergente pour toute valeur positive de z et représente une fonction positive et décroissante de z. Comme $\Phi(z+n)$ tend vers zéro avec $1 : n$, on a

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi(z+n) - \Phi(z+n+1)],$$

donc Φ (z) *est positive et décroissante pour toute valeur positive de z.*

On a visiblement

$$\Phi(z) - \Phi(z+1) < \frac{1}{3(2z+1)^2} \left[1 - \frac{1}{(2z+1)^2}\right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{12z} - \frac{1}{12(z+1)},$$

d'où, en considérant la série $\Sigma [\Phi(z+n) - \Phi(z+n+1)]$, on conclut que $\Phi(z) < 1 : 12z$.

Si l'on met

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{12z} - \Phi(z),$$

on a

$$\Phi_1(z) - \Phi_1(z+1) = \frac{2}{3\cdot5(2z+1)^4} + \frac{4}{3\cdot7(2z+1)^6} + \frac{6}{3\cdot9(2z+1)^6} + \ldots\ldots$$

$$< \frac{2}{15(2z+1)^4}\left[1 - \frac{1}{(2z+1)^2}\right]^{-2}$$

$$= \frac{1}{120(z^2+z)^2}$$

$$< \frac{1}{360}\left[\frac{1}{z^3} - \frac{1}{(z+1)^3}\right],$$

d'où

$$\frac{1}{12z} > \Phi(z) > \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3}.$$

Quant à $\psi(z)$, l'identité (8) montre que sa valeur est $-1:24z$, à des quantités de l'ordre z^{-3} près.

9. *Expression de $q(z, x)$ par une intégrale définie :* — On a

$$q(z, x) - q(z+1, x) = \text{Log}\,\frac{z+x}{z} - x\,\text{Log}\,\frac{z+1}{z}$$

Or, si a et b sont positifs, on a

$$\text{Log}\,\frac{b}{a} = \int_o^\infty (e^{-a\theta} - e^{-b\theta})\,\frac{d\theta}{\theta},$$

donc

$$q(z, x) - q(z+1, x) = \int_o^\infty e^{-z\theta}\left[1 - e^{-x\theta} - x(1 - e^{-\theta})\right]\frac{d\theta}{\theta}$$

$$= \int_o^\infty \left\{e^{-z\theta} - e^{-(z+1)\theta}\right\}\left\{\frac{1 - e^{-x\theta}}{1 - e^{-\theta}} - x\right\}\frac{d\theta}{\theta}$$

$$= \mu(z, x) - \mu(z+1, x),$$

où l'on a posé

$$\mu(z, x) = \int_o^\infty e^{-z\theta}\left\{\frac{1 - e^{-x\theta}}{1 - e^{-\theta}} - x\right\}\frac{d\theta}{\theta}$$

Il est facile de voir que cette intégrale existe, et que $\mu(z+n, x)$, comme d'ailleurs $q(z+n, x)$, s'annule pour n infini. Il s'ensuit que

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad q(z, x) = \mu(z, x) = \int_0^\infty e^{-z\theta} \left\{ \frac{1 - e^{-x\theta}}{1 - e^{-\theta}} - x \right\} \frac{d\theta}{\theta}$$

Corollaire. On a

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad \mathrm{Log}\,\Gamma(x+1) = -q(1, x) = \int_0^\infty e^{-\theta} \left\{ x - \frac{1 - e^{-x\theta}}{1 - e^{-\theta}} \right\} \frac{d\theta}{\theta}$$

10. *Expression de $\Phi(z)$ et de $\psi(z)$ par des intégrales définies :* — On a

$$\Phi(z) = \int_0^1 q(z, x)\, dx$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^\infty e^{-z\theta} \lambda(x, \theta)\, d\theta,$$

en posant

$$\lambda(x, \theta) = \frac{1}{\theta} \left\{ \frac{1 - e^{-x\theta}}{1 - e^{-\theta}} - x \right\}.$$

Intervertissons les intégrales dans le second membre ; il vient

$$(11) \quad \ldots\ldots \quad \Phi(z) = \int_0^\infty e^{-z\theta} \left\{ \frac{1}{2} \coth \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{\theta} \right\} \frac{d\theta}{\theta}.$$

Pour légitimer ce procédé, il suffit de montrer que $\lambda(x, \theta)$ est bornée pour les valeurs de x entre 0 et 1, et de θ entre 0 et ∞, ce qui est facile.

Remplaçons z par $2z$ et θ par $\frac{1}{2}\theta$, il vient

$$\Phi(2z) = \int_0^\infty e^{-z\theta} \left\{ \frac{1}{2} \coth \frac{1}{4}\theta - \frac{2}{\theta} \right\} \frac{d\theta}{\theta},$$

d'où

$$(12) \quad \ldots\ldots \quad \psi(z) = \Phi(2z) - \Phi(z)$$

$$= \int_0^\infty e^{-z\theta} \left\{ \frac{1}{2} \,\text{coséch}\, \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{\theta} \right\} \frac{d\theta}{\theta}.$$

M. le Comte de Sparre envoie un Mémoire intitulé *Théorie analytique des turbines centripètes et centrifuges à réaction. Première partie.* La Section décide l'insertion de ce mémoire dans les ANNALES (¹).

M. Thébault adresse à la Section un travail intitulé *Contributions à la Géométrie du triangle et du tétraèdre.* Sur le rapport de M. Neuberg, qui a examiné ce mémoire et le juge très intéressant, la Section en décide l'insertion dans les ANNALES (²).

M. Neuberg soumet à la Section des *Notes de Géométrie*, au nombre de trois.

I. Sur des théorèmes de Pilatte et de Prouhet.

1. Dans les ANNALES DE GERGONNE, t. II, p. 93, Pilatte a énoncé le théorème suivant (³) :

Lorsque deux triangles $A_1A_2A_3$ *et* $B_1B_2B_3$, *intérieurs l'un à l'autre, ont les côtés homologues parallèles, un triangle* $C_1C_2C_3$ *circonscrit au triangle intérieur et inscrit à l'autre a une surface moyenne proportionnelle entre celles des triangles donnés.*

Cette proposition a été étendue à deux polygones homothétiques qui sont intérieurs l'un à l'autre (Léon Anne, NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, 1844, p. 25).

Le théorème de Pilatte peut se déduire d'une formule générale. Soient : $A_1A_2A_3$ un triangle quelconque dont les côtés (limités ou indéfinis) sont désignés par a_1, a_2, a_3, et les hauteurs par h_1, h_2, h_3 ; $B_1B_2B_3$, un triangle dont les côtés indéfinis sont des parallèles b_1, b_2, b_3 à a_1, a_2, a_3 ; d_1, d_2, d_3, les distances des parallèles a_1 et b_1, a_2 et b_2, a_3 et b_3, la distance d_r étant considérée comme positive ou négative suivant que A_r et b_r sont ou non du même côté de a_r. Représentons par S, S_1, S_2, S' les aires des triangles $a_1a_2a_3$, $b_1a_2a_3$, $b_1b_2a_3$, $b_1b_2b_3$.

(¹) Voyez la partie réservée aux Mémoires.

(²) Voyez p. 233 de la partie réservée aux Mémoires.

(³) Attribué quelquefois à Gergonne.

Le rapport de similitude des triangles $a_1a_2a_3$ et $b_1a_2a_3$ a pour valeur absolue $\frac{h_1}{h_1 - d_1}$; par suite

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{h_1 - d_1}{h_1}\right)^2 = \left(1 - \frac{d_1}{h_1}\right)^2. \tag{1}$$

La hauteur du triangle $b_1a_2a_3$ relative au côté a_2 étant égale à $h_2\left(1 - \frac{d_1}{h_1}\right)$, on a

$$\frac{S_2}{S_1} = \left\{1 - \frac{d_2}{h_2\left(1 - \frac{d_1}{h_1}\right)}\right\}^2. \tag{2}$$

Des égalités (1) et (2) on conclut

$$\frac{S_2}{S} = \left(1 - \frac{d_1}{h_1} - \frac{d_2}{h_2}\right)^2.$$

En continuant ainsi on trouve

$$\frac{S'}{S} = \left(1 - \frac{d_1}{h_1} - \frac{d_2}{h_2} - \frac{d_3}{h_3}\right)^2. \tag{3}$$

Si l'on remplace h_r par $\frac{2S}{a_r}$ et que l'on pose

$$S'' = S - \frac{1}{2}a_1d_1 - \frac{1}{2}a_2d_2 - \frac{1}{2}a_3d_3, \tag{4}$$

on a

$$S''^2 = SS'. \tag{5}$$

2. Soient C_1, C_2, C_3 des points quelconques des côtés B_2B_3, B_3B_1, B_1B_2 du triangle $B_1B_2B_3$, et menons les droites C_1A_2, C_1A_3, C_2A_3, C_2A_1, C_2A_1, C_3A_2 ; nous aurons

$$S'' = S - C_1A_2A_3 - C_2A_3A_1 - C_3A_1A_2, \tag{6}$$

pourvu que l'on applique la règle des signes des aires.

Cela posé, si le triangle $B_1B_2B_3$ est extérieur à $A_1A_2A_3$, les aires des triangles $C_1A_2A_3$, $C_2A_3A_1$, $C_3A_1A_2$ sont négatives et S'' est l'aire de l'hexagone $A_2C_1A_3C_2A_1C_3A_2$; en particulier, si C_1, C_2, C_3 sont les sommets d'un triangle circonscrit à $A_1A_2A_3$ et inscrit à $B_1B_2B_3$, l'égalité (5) démontre le théorème de Pilatte.

Supposons ensuite le triangle $B_1B_2B_3$ intérieur à $A_1A_2A_3$; les aires $C_1A_2A_3$, $C_3A_2A_1$, $C_3A_1A_2$ étant positives, S'' est l'aire de l'hexagone à angles rentrants $A_2C_1A_3C_2A_1C_3A_2$.

Si le centre d'homothétie des triangles $A_1A_2A_3$ et $B_1B_2B_3$ n'est pas intérieur à ces triangles, l'expression (6) de S'' ne donne plus un polygone de forme simple.

3. En 1913 j'ai publié dans le journal japonais THE TOHOKU JOURNAL, vol. IV, le théorème suivant, l'analogue de celui de Pilatte :

Soient V, V' *les volumes de deux tétraèdres* ABCD, A'B'C'D', *intérieurs l'un à l'autre et ayant les faces homologues parallèles. Prenons dans les faces de* A'B'C'D' *quatre points quelconques* A'', B'', C'', D'' *et appelons* V'' *la somme des volumes des tétraèdres* ABCD, A''BCD, AB''CD, ABC''D, ABCD''.

On a la relation

$$V'' = \sqrt[3]{V^2V'}. \quad (^1) \qquad (7)$$

J'ai donné, dans le même journal, une démonstration géométrique (²) de l'égalité (7), une démonstration analytique qui est applicable à toutes les positions relatives des tétraèdres ABCD et A'B'C'D', enfin une démonstration basée sur la formule

$$\frac{V'}{V} = \left(1 - \frac{d_1}{h_1} - \frac{d_2}{h_2} - \frac{d_3}{h_3}\right)^3; \qquad (8)$$

dans celle-ci, h_1, h_2, h_3, h_4 représentent les hauteurs de ABCD, et d_1, d_2, d_3, d_4 sont les distances des plans des faces homologues de

---

(¹) Dans une note au bas de la page, j'ai dit qu'on peut prendre pour A'', B''. C', D' les sommets d'un tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ circonscrit à ABCD et inscrit à A'B'C'D' ; ceci est exact, mais ferait croire qu'on peut substituer à V' le volume $A_1B_1C_1D_1$. Cette note m'a fâcheusement entraîné à proposer dans *Mathesis*, 1914, p. 32, la fausse formule

$$A_1B_1C_1D_1 = \sqrt[3]{\overline{ABCD}^2 . \ AB'C'D'} .$$

(²) Elle renferme une faute d'impression ; au lieu de

$$\frac{\text{vol. MCA'B}}{\text{vol. MCA'B}}, \text{ lire : } \frac{\text{vol. MC A'B'}}{\text{vol. MCA'B}}.$$

ABCD et A'B'C'D'. Si f_1, f_2, f_3, f_4 désignent les aires des faces de ABCD et A'B'C'D', la formule (8) revient à

$$V^2V' = \left(V - \frac{1}{3} f_1 d_1 - \frac{1}{3} f_2 d_2 - \frac{1}{3} f_3 d_3 - \frac{1}{3} f_4 d_4\right)^3.$$

4. Ce n'est que récemment que j'ai eu connaissance du théorème suivant de Prouhet (¹) (NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, 1863, p. 368) :

Soient P *et* P' *deux polyèdres convexes, semblables et semblablement placés, le premier intérieur au second. Prenons sur chaque face de* P' *un point et joignons-le aux sommets de la face homologue de P. Nous formons ainsi un polyèdre* Q, *à faces triangulaires, inscrit dans* P' *et circonscrit à* P.

Soit Q' *un quatrième polyèdre formé en joignant un point sur chaque face de* P *aux sommets de la face homologue de* P'. *En désignant par* P, P', Q, Q' *les volumes des quatre polyèdres, on aura*

$$Q = \sqrt[3]{P^2P'}, \quad Q' = \sqrt[3]{PP'^2},$$

d'où l'on déduira

$$QQ' = PP', \quad \frac{Q'}{Q'} = \sqrt[3]{\frac{P}{P'}}.$$

Ce théorème étant pour ainsi dire tombé dans l'oubli, je vais en donner une démonstration assez simple qui se rapproche de celle des NOUVELLES ANNALES.

Soient : S le centre de similitude des polyèdres P et P' ; ABC... et A'B'C'..., deux faces homologues quelconques ; N et N', deux points de ces faces ; u et u', les volumes des pyramides SABC... et S'A'B'C'...; ρ, le rapport de similitude SA : SA' ; w et w', les volumes des pyramides N'ABC... et NA'B'C'... Si h et h' sont les

---

(¹) Ce théorème m'a été signalé par M. V. Thébault. Mon honorable correspondant cherchait pour les tétraèdres l'analogue de la relation

$$ABC \cdot \alpha'\beta'\gamma' = A'B'C' \cdot \alpha\beta\gamma$$

qu'il avait trouvée pour les triangles (ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES. 1920, p. 153) ; ma question de MATHESIS ne lui donnait pas la solution désirée.

distances de S aux plans ABC et A'B'C', la distance h'' de ces plans a pour expression

$$h'' = h' - h = h'(1-\rho) = h\left(\frac{1}{\rho} - 1\right).$$

On en conclut aisément

$$w = u\,\frac{h''}{h} = u\left(\frac{1}{\rho} - 1\right), \qquad w' = u'\,\frac{h''}{h'} = u'(1-\rho)\,;$$

par suite

$$u + w = \frac{u}{\rho}, \qquad u' - w' = u'\rho.$$

En faisant la somme de toutes les égalités analogues on obtient

$$Q = \frac{P}{\rho}, \qquad Q' = \rho P'.$$

Mais $\rho = \sqrt[3]{\frac{P}{P'}}$, donc

$$Q = \sqrt[3]{P^2P'}, \quad Q' = \sqrt[3]{PP'^2}.$$

II. **Sur l'hyperbole équilatère.**

1. Soient A, B, C, D quatre points quelconques d'une hyperbole équilatère U. Convenons de représenter par (ABCD) le rapport anharmonique du faisceau qui projette ces points à partir d'un point quelconque de U et désignons par λ, μ, ν les droites qui joignent les milieux des côtés opposés AB et CD, BC et DA, CA et BD du quadrangle complet ABCD. On doit à R. Russel (¹) les formules

$$(ABCD) = \frac{\lambda^2 - \nu^2}{\lambda^2 - \mu^2}, \quad (ADBC) = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\mu^2 - \nu^2}, \quad (ACDB) = \frac{\nu^2 - \mu^2}{\nu^2 - \lambda^2}.$$

J'ignore s'il en a déjà paru des démonstrations. La suivante est assez simple.

Soient $xy = 1$ l'équation de U, et $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$

(¹) PROCEDINGS OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY, 1890.

les coordonnées de A, B, C, D. En projetant ces points à partir du point à l'infini de l'une ou l'autre asymptote on trouve

$$(\mathrm{ABCD}) = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)} = \frac{(y_3 - y_1)(y_4 - y_2)}{(y_3 - y_2)(y_4 - y_1)}. \quad (1)$$

Si l'on transforme les produits au moyen de l'identité $4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$, il vient

$$\begin{aligned}(\mathrm{ABCD}) &= \frac{(x_3 - x_1 + x_4 - x_2)^2 - (x_3 - x_1 - x_4 + x_2)^2}{(x_3 - x_2 + x_4 - x_1)^2 - (x_3 - x_2 - x_4 + x_1)^2} \\ &= \frac{(y_3 - y_1 + y_4 - y_2)^2 - (y_3 - y_1 - y_4 + y_2)^2}{(y_3 - y_1 + y_4 - y_2)^2 - (y_3 - y_2 - y_4 + y_1)^2}.\end{aligned}$$

On peut prendre pour (ABCD) le rapport de la somme des numérateurs des deux dernières fractions à la somme des dénominateurs ; alors en remarquant que les coordonnées des milieux des droites CD,.. sont $\frac{1}{2}(x_4 + x_4)$,... on obtient la première égalité de Russel. Les autres s'établissent de la même manière ou se déduisent de la première au moyen des relations connues entre les divers rapports anharmoniques d'un même faisceau.

2. L'hyperbole U passe par les orthocentres A′, B′, C′, D′ des triangles BCD, CDA, DAB, ABC. Les coordonnées de ces points sont

$$x'_1 = mx_1 \text{ et } y' = ny_1, \quad x'_2 = mx_2 \text{ et } y'_2 = ny_2, .. \quad (2)$$

où $$m = -\frac{1}{x_1x_2x_3x_4}, \qquad n = -\frac{1}{y_1y_2y_3y_4}.$$

On a $$(\mathrm{A'B'C'D'}) = \frac{(x'_3 - x'_1)(x'_4 - x'_2)}{(x'_3 - x'_2)(x'_4 - x'_1)} = \frac{(y'_3 - y'_1)(y'_4 - y'_2)}{(y'_3 - y'_2)(y'_4 - y'_1)}.$$

En substituant les valeurs (2) de x'_1, y'_1..., on voit que

$$(\mathrm{A'B'C'D'}) = (\mathrm{ABCD}) = \frac{\lambda^2 - \nu^2}{\lambda^2 - \mu^2}.$$

Remarquons aussi que nous pouvons écrire immédiatement

$$(\mathrm{A'B'C'D'}) = \frac{\lambda'^2 - \nu'^2}{\lambda'^2 - \mu'^2},$$

où λ', μ', ν' désignent les droites qui joignent les milieux des côtés opposés du quadrangle complet A'B'C'D'.

3. Dans Mathesis, 1882, p. 122, j'ai proposé de démontrer que les triangles A'B'C' et ABC, BCD et B'C'D',... sont équivalents. Les formules (2) donnent une démonstration facile de ce théorème. En effet, par exemple

$$2A'B'C' = \begin{vmatrix} mx'_1 & ny'_1 & 1 \\ mx'_2 & ny'_2 & 1 \\ mx'_3 & ny'_3 & 1 \end{vmatrix} = mn \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 2ABC,$$

car $mn = 1$. Mathesis a publié plusieurs démonstrations élémentaires du même théorème.

III. Sur les triangles et les tétraèdres homologiques et orthologiques.

Les développements suivants m'ont été suggérés par les remarquables recherches de M. Thébault relatives à des triples de cercles et à des quadruples de sphères. Il peut être intéressant de rappeler ici certaines méthodes de démonstration basées sur la théorie des axes, plans et centres radicaux. Pour abréger je désignerai les tétraèdres ABCD, A'B'C'D', A''B''C''D'', par T, T', T'', et les cercles et les sphères par leurs centres.

1. Des sommets du tétraèdre T comme centres décrivons quatre sphères quelconques, et de leur centre radical S abaissons les perpendiculaires p_a, p_b, p_c, p_d sur les faces de T ; ces droites sont les axes radicaux des triples de sphères (B, C, D), (C, D, A), (D, A, B), (A, B, C). Soient A', B', C', D' quatre points quelconques de ces axes. A' est le centre d'une sphère orthogonale aux sphères (B, C, D), B' celui d'une sphère orthogonale aux sphères (C, D, A), etc. La sphère A coupant orthogonalement les sphères (B', C', D'), son centre est sur l'axe radical de ces dernières sphères ; on verrait de même que les points B, C, D appartiennent respectivement aux axes radicaux des triples de sphères (C', D', A'), (D', A', B'), (A', B', C'). On en conclut que les perpendiculaires abaissées des sommets de T respectivement sur les faces correspondantes de T' concourent en un point S', centre radical des quatres sphères A', B', C', D'. Les points S et S' sont respective-

ment les *centres d'orthologie* des couples de tétraèdres T'T et TT'.

Prenons sur les droites p_a, p_b, p_c, p_d un second quadruple de points A'', B'', C'', D'', desquels comme centres nous décrivons des sphères coupant orthogonalement les triples de sphères (B, C, D), (C, D, A), (D, A, B), (A, B, C) ; soit S'' le centre d'orthologie des tétraèdres T et T''.

Les points S' et S'' sont les centres de deux sphères coupant orthogonalement, la première les sphères A', B', C', D' et l'autre les sphères A'', B'', C'', D'',

Les sphères B', C', D' sont orthogonales aux sphères A et S', donc le plan B'C'D' est le plan radical des sphères A et S'. Semblablement le plan B''C''D'' est le plan radical des sphères A et S'' ; par suite l'intersection des plans B'C'D', B''C''D'' appartient au plan radical des sphères S' et S''. En continuant ainsi on constate que ce dernier plan contient toutes les intersections de deux faces homologues des tétraèdres T' et T'' ; autrement dit, le plan d'homologie des deux tétraèdres T' et T'' est perpendiculaire à la droite joignant les centres d'orthologie des couples TT' et TT''.

Ainsi se trouve démontré un théorème de Steiner, JOURNAL DE CRELLE, t. II. p. 92. M. Thébault a considéré le cas particulier où les sphères A, B, C, D se coupent, trois à trois, en des couples de points (A', A''), (B', B''), (C', C''), (D', D'').

2. Étant donné un triangle quelconque ABC, il existe une infinité d'autres triangles $A_1B_1C_1$ qui sont à la fois homologiques et orthologiques avec ABC. Car on peut prendre arbitrairement le centre d'homologie P et les sommets B_1, C_1 sur les droites BP et CP ; alors si les perpendiculaires abaissées de B_1 sur AC et de C_1 sur AB se coupent en O, la perpendiculaire à BC par O rencontre la droite AP au troisième sommet A_1.

Pour abréger je dirai que les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont *bilogiques*, ce néologisme rappelant les deux qualificatifs qui se terminent en *logiques*.

Deux triangles bilogiques jouissent de la propriété que le centre d'homologie et les deux centres d'orthologie sont sur une même perpendiculaire à l'axe d'homologie. Ce théorème est dû à M. P. Sondat, qui en avait une démonstration analytique très compliquée, mais en désirait une démonstration géométrique ;

celle-ci à été donnée par M. Sollertinsky (Voir INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS, 1894, pp. 16 et 44 (¹).

3. Deux tétraèdres $ABCD \equiv T$ et $A_1B_1C_1D_1 \equiv T_1$ peuvent être bilogiques. Le centre d'homologie et les deux centres d'orthologie sont sur une même perpendiculaire au plan d'homologie. Si l'un des tétraèdres est donné, on ne peut choisir arbitrairement le centre d'homologie ou l'un des centres d'orthologie.

Le BULLETIN DE LA CLASSE DES SCIENCES DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, février 1921, vient de publier une magistrale étude sur les tétraèdres bilogiques. L'auteur, M. Cl. Servais, professeur à l'Université de Gand, s'en était occupé à la suite d'une correspondance avec M. Thébault et m'avait communiqué quelques résultats de ses recherches. La présente note, d'un caractère plus élémentaire, est en quelque sorte une introduction au mémoire de M. Servais.

Appelons α, β, γ, δ les plans des faces de T et h_a, h_b, h_c, h_d les hauteurs de T ; O, le centre d'homologie de T et T_1 ; p_a, p_b, p_c, p_d, les perpendiculaires abaissées des sommets A_1, B_1, C_1, D_1, de T_1 respectivement sur les plans α, β, γ, δ. Les deux tétraèdres étant supposés bilogiques, les droites p_a, p_b, p_c, p_d concourent en un même point O_1, centre d'orthologie. Les côtés homologues des triangles perspectifs $A_1B_1C_1$ et ABC se rencontrent en trois points collinéaires A′, B′, C′, qui appartiennent aussi aux plans p_bp_c, p_cp_a, p_ap_b, plans perpendiculaires aux arêtes DA, DB, DC de T. On conclut de là cette condition caractéristique du point O_1 :

Les plans menés par O_1 perpendiculairement aux arêtes DA,

(¹) J'ai proposé d'appeler *orthohomologiques* deux triangles homologiques dont les côtés correspondants sont perpendiculaires.

On doit également à M. Sondat la proposition que l'*axe d'homologie de tels triangles divise en deux parties égales la distance de leurs orthocentres.* (INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS, 1894, p. 268). MATHESIS, 1905, pp. 265-268, a publié de ce théorème trois démonstrations géométriques par MM. Haerens, Meurice et J. N.

Plus généralement, l'axe d'homologie de deux triangles métaparallèles passe au milieu de la distance des deux centres de métaparallélisme. Ce dernier théorème et celui des triangles bilogiques ont été démontrés analytiquement par Fuhrmann *(Programme scolaire de Königsberg,* 1902*)*.

DB, DC issues d'un même sommet de T rencontrent les arêtes opposées BC, CA, AB en trois points collinéaires A', B', C'.

Soient maintenant (X, Y, Z), (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2),... des coordonnées rectangulaires des points O_1, A, B,... Le plan $p_b p_c$ perpendiculaire à la droite DA a pour équation

$$(x - X)(x_1 - x_4) + (y - Z)(y_1 - y_4) + (z - Z)(z_1 - z_4) = 0$$

ou, en abrégé, $\Sigma(x - X)(x_1 - x_4) = 0$. Les coordonnées de A' sont de la forme $(lx_2 + l'x_3) : (l + l')$; en les substituant dans l'équation précédente on trouve

$$l\Sigma(x_2 - X)(x_2 - x_4) + l'\Sigma(x_3 - X)(x_1 - x) = 0. \qquad (1)$$

Si l'on représente les coordonnées de B' par $(mx_3 + m'x_1) : (m + m')$,..., et celles de C' par $(nx_1 + n'x_2) : (n + n')$,..., on a

$$m\Sigma(x_3 - X)(x_2 - x_4) + m'\Sigma(x_1 - X)(x_2 - x_4) = 0, \qquad (2)$$
$$n\Sigma(x_1 - X)(x_3 - x_4) + n'\Sigma(x_2 - X)(x_3 - x_4) = 0. \qquad (3)$$

Comme les points A', B', C' sont collinéaires, ont doit avoir

$$\frac{l}{l'} \cdot \frac{m}{m'} \cdot \frac{n}{n'} = -1\,;$$

cette condition donne

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma(x_2 - X)(x_1 - x_4) \cdot \Sigma(x_3 - X)(x_2 - x_4) \cdot \Sigma(x_1 - X)(x_3 - x_4) \\ &= \Sigma(x_3 - X)(x_1 - x_4) \cdot \Sigma(x_1 - X)(x_2 - x_4) \cdot \Sigma(x_2 - X)(x_3 - x_4). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Posons

$$L = \Sigma x_2(x_1 - x_4),\ \lambda = \Sigma X(x_1 - x_4),\ L' = \Sigma x_3(x_1 - x_4),$$
$$M = \Sigma x_3(x_2 - x_4),\ \mu = \Sigma X(x_2 - x_4),\ M' = \Sigma x_1(x_2 - x_4),$$
$$N = \Sigma x_1(x_3 - x_4),\ \nu = \Sigma X(x_3 - x_4),\ N' = \Sigma x_2(x_3 - x_4)\,;$$

l'équation (4) deviendra

$$(L - \lambda)(M - \mu)(N - \nu) = (L' - \lambda)(M' - \mu)(N' - \nu). \qquad (5)$$

Comme les coordonnées courantes entrent seulement dans les quantités λ, μ, ν, l'équation (5) représente une quadrique. On peut l'écrire ainsi :

$$[B, DA] \times [C, DB] \times [A, DC] = [C, DA] \times [A, DB] \times [B, DC], \qquad (6)$$

en convenant de représenter par l'équation $[B, DA] = 0$ le plan mené par B perpendiculairement à la droite DA et en attribuant une signification analogue aux équations [C, DB] = 0, [A, DC] = 0,...

L'équation (6) admet les solutions

$$\begin{cases}[B, DA] = 0,\\ [B, DC] = 0;\end{cases}\quad \begin{cases}[C, DB] = 0,\\ [C, DA] = 0;\end{cases}\quad \begin{cases}[A, DC] = 0,\\ [A, DA] = 0;\end{cases}$$

donc la surface (6) passant par les hauteurs h_b, h_c, h_a, le lieu du point O_1 est l'hyperboloïde réglé ($h_a h_b h_c h_d$). On a aussi les solutions

$$\begin{cases}[B, DA] = 0,\\ [A, DB] = 0;\end{cases}\quad \begin{cases}[C, DB] = 0,\\ [B, DC] = 0;\end{cases}\quad \begin{cases}[A, DC] = 0,\\ [C, DA] = 0,\end{cases}$$

qui indiquent les perpendiculaires aux faces γ, α, β par les orthocentres de ces faces

La hauteur h_a étant parallèle à la droite A_1O_1 rencontre la droite OO_1 ; on verrait de même que les hauteurs h_b et h_c rencontrent la droite OO_1. Il résulte de là que la droite OO_1 est une génératrice du second mode de l'hyperboloïde $h_a h_b h_c h_d$.

J'ai établi, par une autre méthode, l'équation précédente de l'hyperboloïde ($h_a h_b h_c h_d$) dans l'ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK, *série* III, t. XI, p. 233. Elle m'y a servi à démontrer un théorème remarquable de M. Zeeman, mais je n'en ai pas déduit le théorème de M. Servais.

4. D'après ce qui précède, *les six plans menés par un point quelconque de l'hyperboloïde des hauteurs d'un tétraèdre* ABCD *perpendiculairement à une arête de* ABCD *rencontrent l'arête opposée en six points d'un même plan.*

Il est intéressant de démontrer directement cette proposition élémentaire : *Les plans* π_a, π_b, π_c *menés par un point quelconque* M *de la hauteur* DH *d'un tétraèdre* ABCD *perpendiculairement aux arêtes* DA, DB, DC *rencontrent les arêtes opposées* BC, CA, AB *en trois points collinéaires.*

Les droites HA, HB, HC rencontrent les parallèles menées par M aux arêtes DA, DB, DC en des points A', B', C', et les traces des plans π_a, π_b, π_c sur le plan ABC en des points A'', B'', C'' ; d'ailleurs elles sont perpendiculaires à ces traces. Les triangles A'M'A', B'MB'', C'MC'' étant rectangles en M, on a

$$\overline{MH}^2 = HA' \cdot HA'' = HB' \cdot HB'' = HC' \cdot HC'' ;$$

comme

$$\frac{HA'}{HA} = \frac{HB'}{HB} = \frac{HC'}{HC} = \frac{HM}{HD},$$

on voit que les produits HA · HA'', HB · HB'', HC · HC'' sont égaux. Il en résulte que les traces de π_a, π_b, π_c forment un triangle polaire réciproque de ABC par rapport à un cercle de centre H et de rayon imaginaire, etc.

Cette démonstration rappelle celle que j'ai donnée d'un théorème de M. Schenker (Mathesis, 1909, p. 126).

M. l'Abbé De Neyer fait une communication sur *La loi des densités à l'intérieur de la Terre.* M. Alliaume est nommé rapporteur pour l'examen de ce travail.

M. Bertrand envoie un mémoire *Sur la théorie des marées et le calcul des variations.* MM. Lecat et Alliaume sont nommés commissaires pour l'examen de ce mémoire.

Le R. P. Bosmans entretient la Section du XIVe volume des *Œuvres complètes de Christiaan Huygens.* Cette communication est publiée dans la Revue des Questions scientifiques (1).

M. Goedseels expose des *Considérations méthodologiques* sur l'enseignement des sciences mathématiques pures et appliquées. Cette communication donne lieu à une discussion à laquelle prennent part MM. Pasquier, Alliaume et Verriest.

---

(1) 20 avril 1921, pp. 466-471.

Deuxième Section

La Section renouvelle son bureau et élit

comme *Président :* le R. P. de Greeff, S. J.
comme *Vice-Présidents :* MM. Bruylants et Goubau.
Secrétaire : le R. P. J. D. Lucas, S. J.

Elle adopte la question de concours suivante : *On demande des recherches originales, théoriques ou expérimentales, sur les spectres de haute fréquence.*

M. de Hemptinne détaille quelques-uns de ses *résultats quantitatifs relatifs à l'action réductrice de l'effluve électrique sur le peroxyde de plomb.*

M. Alliaume présente un *Complément à un schéma d'étude générale des aberrations chromatiques.*

1. Le *schéma* que ce titre rappelle a été présenté à la Deuxième Section de la Société Scientifique pendant la Session de janvier 1921 (t. XL, 1ère partie, p. **168**). Un commencement d'application aux systèmes optiques centrés a montré l'utilité de la notion qui fait l'objet de la communication d'aujourd'hui.

D'une part, une grandeur a été proposée comme mesure de l'aberration chromatique en un point du milieu-image considéré comme point principal d'une ligne colorée. D'autre part, il y a, en un pareil point, achromatisme du premier ordre lorsque les points de la ligne colorée correspondant à deux longueurs d'onde données (λ_1, λ_2) se confondent.

L'aberration chromatique n'est pas nulle en un point où il y a achromatisme du premier ordre ; elle ne serait nulle qu'aux points où il y aurait achromatisme d'ordre infini, achromatisme parfait. C'est pourquoi une grandeur va être définie qui s'annule aux points principaux présentant un achromatisme du premier ordre et en ces points seulement.

2. *L'aberration chromatique relative du premier ordre,* pour les longueurs d'onde données λ_1 et λ_2, en un point du milieu-image

considéré comme point principal d'une ligne colorée, est le carré de la distance des points de cette courbe correspondant à ces deux longueurs d'onde. C'est une fonction ρ^2 des coordonnées (x, y, z) du point principal du milieu-image (¹) :

$$\rho^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

où

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi(X, Y, Z, \lambda_1), & x_2 &= \varphi(X, Y, Z, \lambda_2), \\ y_1 &= \psi(X, Y, Z, \lambda_1), & y_2 &= \psi(X, Y, Z, \lambda_2), \\ z_1 &= \theta(X, Y, Z, \lambda_1), & z_2 &= \theta(X, Y, Z, \lambda_2), \end{aligned}$$

tandis que (X, Y, Z) sont des fonctions des coordonnées (x, y, z) du point principal définies par les égalités

$$\begin{aligned} x &= \varphi(X, Y, Z, \lambda_0), \\ y &= \psi(X, Y, Z, \lambda_0), \\ z &= \theta(X, Y, Z, \lambda_0). \end{aligned}$$

Il y a achromatisme du premier ordre en chacun des points dont les coordonnées (x, y, z) satisfont aux trois équations

$$x_1 = x_2, \qquad y_1 = y_2, \qquad z_1 = z_2,$$

et en ces points seulement. Chacune de ces équations définit une surface dans le milieu-image, de sorte que les points (réels ou imaginaires) où il y a achromatisme du premier ordre sont généralement en nombre fini. Les conditions ont été écrites pour qu'il y ait une infinité de pareils points, distribués d'une manière continue soit le long d'une ligne, soit sur une surface.

Toute équation de la forme

$$\rho^2 = \text{constante}$$

représente une surface lieu des points qui, considérés comme points principaux, présentent la même aberration chromatique relative du premier ordre. Deux surfaces quelconques de cette famille ne peuvent pas avoir de point commun.

(¹) Les notations sont reprises de l'article rappelé dans les premières lignes de celui-ci, sauf que, pour simplifier les écritures, on a fait perdre leurs indices aux coordonnées (x_0, y_0, z_0) du point principal.

3. Par un point quelconque (x, y, z) du milieu-image, menons la droite dont les cosinus directeurs sont (a, b, c), et considérons, en ce point, la dérivée de ρ^2 dans cette direction,

$$a \frac{\partial \rho^2}{\partial x} + b \frac{\partial \rho^2}{\partial y} + c \frac{\partial \rho^2}{\partial z}$$

Les dérivées partielles de ρ^2 qui entrent dans cette expression se tirent des équations de correspondance ; par la notation suivante du jacobien de trois fonctions quelconques (U, V, W) de (X, Y, Z),

$$\mathrm{J}\,(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}) = \frac{\partial\,(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W})}{\partial\,(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{X}} & \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{Y}} & \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{Z}} \\ \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{X}} & \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{Y}} & \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{Z}} \\ \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathrm{X}} & \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathrm{Y}} & \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathrm{Z}} \end{vmatrix},$$

on trouve :

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial x} = \frac{\mathrm{J}\,(\rho^2, y, z)}{\mathrm{J}\,(x, y, z)},$$

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial y} = \frac{\mathrm{J}\,(x, \rho^2, z)}{\mathrm{J}\,(x, y, z)},$$

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial z} = \frac{\mathrm{J}\,(x, y, \rho^2)}{\mathrm{J}\,(x, y, z)}\ (^1).$$

Sur chacune des droites dirigées issues du point (x, y, z), portons, à partir de ce point, un segment que mesure la dérivée de ρ^2 dans la direction de cette droite. Le lieu des extrémités (ξ, η, ζ) de ces segments a pour équation

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 - \frac{\partial \rho^2}{\partial x}(\xi - x) + \\ - \frac{\partial \rho^2}{\partial y}(\eta - y) - \frac{\partial \rho^2}{\partial z}(\zeta - z) = 0.$$

---

(1) Car, par exemple,

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial x} = \frac{\partial(\rho^2, y, z)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial(\rho^2, y, z)}{\partial(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})} : \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})}.$$

C'est une sphère passant par le point (x, y, z) : elle a pour centre et pour rayon, respectivement,

$$\left(x + \frac{1}{2}\frac{\partial\rho^2}{\partial x},\ y + \frac{1}{2}\frac{\partial\rho^2}{\partial y},\ z + \frac{1}{2}\frac{\partial\rho^2}{\partial z}\right),$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\partial\rho^2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho^2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho^2}{\partial z}\right)^2},$$

et le double de ce rayon mesure le maximum de l'aberration chromatique relative au point (x, y, z). La gerbe des directions issues de ce point est coupée par le plan tangent à la sphère en ce point, à savoir par le plan

$$(\xi - x)\frac{\partial\rho^2}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial\rho^2}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial\rho^2}{\partial z} = 0,$$

de façon que, le long des directions situées de part et d'autre de ce plan, la dérivée de ρ^2 est positive pour les unes, négative pour les autres. Ce plan lui-même est le lieu des droites le long desquelles l'aberration chromatique relative est constante : c'est nécessairement le plan tangent à la surface

$$\rho^2 = \text{constante}$$

passant par le point considéré.

Lorsque l'aberration chromatique est nulle en un point, ne pouvant pas devenir négative, elle y passe par un minimum, et la sphère de ses dérivées premières est réduite à ce point.

4. Au point (x, y, z) du milieu-image, considérons encore la dérivée seconde de ρ^2 dans la direction (a, b, c) :

$$a^2\frac{\partial^2\rho^2}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial^2\rho^2}{\partial y^2} + c^2\frac{\partial^2\rho^2}{\partial z^2} + 2bc\frac{\partial^2\rho^2}{\partial y\,\partial z} + 2ca\frac{\partial^2\rho^2}{\partial z\,\partial x} + 2ab\frac{\partial^2\rho^2}{\partial x\,\partial y}.$$

Sur chacune des droites dirigées issues de ce point, portons, à partir de celui-ci, un segment ayant pour mesure l'inverse de la racine carrée de la valeur absolue de la dérivée seconde de ρ^2

dans cette direction. Le lieu des extrémités (ξ, η, ζ) de ces segments a pour équation

$$\left\{\begin{array}{l} (\xi - x)^2 \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial x^2} + (\eta - y)^2 \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial y^2} + (\zeta - z)^2 \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial z^2} + \\ 2(\eta - y)(\zeta - z) \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial y\partial z} + 2(\zeta - z)(\xi - x) \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial z\partial x} + \\ \qquad\qquad 2(\xi - x)(\eta - y) \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial x\partial y} = \pm 1. \end{array}\right.$$

C'est l'ensemble de deux surfaces du second ordre dont l'une au moins est réelle, et dont le point (x, y, z) est un centre. [Si la fonction ρ^2 ne dépendait que de deux variables (x, y), cette équation représenterait la projection sur le plan des xy de l'indicatrice des courbures de la surface ρ^2 au point (x, y, ρ^2)]. — En particulier, en chacun des points où ρ^2 est nul, et par conséquent minimum, une seule de ces surfaces est réelle ; c'est

1° un ellipsoïde si le déterminant

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial x\partial z} \\ \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial y\partial z} \\ \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial z\partial x} & \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial z\partial y} & \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

(qui est le hessien de la fonction ρ^2) est différent de zéro ;

2° un cylindre (admettant une droite de centres) si le déterminant H est égal à zéro sans que tous ses premiers mineurs soient nuls ;

3° l'ensemble de deux plans parallèles (admettant un plan de centres) si les premiers mineurs du déterminant H sont nuls, c'est-à-dire si

$$\frac{\dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial y\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial x\partial y}}{\dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial y^2}} = \frac{\dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial x\partial z}}{\dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial y\partial z}},$$

$$\frac{\dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial y\partial x}}{\dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial z\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial\rho^2}{\partial z\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial y\partial z}}{\dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial z^2}}.$$

Dans le deuxième cas, des paramètres directeurs de la droite des centres sont les déterminants du deuxième ordre tirés, par exemple, du tableau

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial x\partial z} \\ \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial y\partial z} \end{matrix} \right\|$$

et, dans le troisième cas, des paramètres directeurs de la normale au plan des centres sont, par exemple,

$$\frac{\partial^2\rho^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2\rho^2}{\partial x\partial y}, \quad \frac{\partial^2\rho^2}{\partial x\partial z}.$$

5. Les paramètres d'un système optique en projet ont reçu des valeurs telles que l'aberration chromatique relative du premier ordre est nulle en un point (x, y, z), ainsi que, par conséquent, la dérivée première de cette aberration dans toutes les directions autour de ce point, — et on considère une ligne

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

passant par ce point. On ne dispose plus d'assez de paramètres optiques pour assurer un achromatisme du premier ordre en tous les points de cette ligne, et on se contenterait de ce que l'aberration chromatique du premier ordre ne reprît que lentement des valeurs différentes de zéro le long de cette ligne, de part et d'autre du point considéré.

En d'autres termes, on demande la condition pour que cette aberration ait sa dérivée seconde nulle en ce point dans la direction tangente à cette ligne. — Pour qu'il en soit ainsi, il suffit que l'indicatrice des dérivées secondes de ρ^2 soit cylindrique au point proposé et que la droite de ses centres soit tangente à la ligne considérée en ce point ; ou que

$$\mathrm{H} = 0$$

et

$$\frac{\dfrac{dx}{dt}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial x\partial z} \\ \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial y\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial x\partial z} & \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial y\partial z} & \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial y\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{dz}{dt}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial y^2} \end{vmatrix}}.$$

6. Enfin, dans la même hypothèse d'une aberration chromatique du premier ordre déjà nulle en un point (x, y, z) considéré sur une surface

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

on peut désirer que cette aberration ne s'éloigne que lentement de sa valeur nulle tout autour de ce point sur cette surface.

En d'autres termes, on demande la condition pour que cette aberration ait sa dérivée seconde nulle en ce point dans toutes les directions tangentes à cette surface. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'indicatrice des dérivées secondes de ρ^2 se réduise à des plans parallèles au point proposé et que le plan de ses centres soit tangent à la surface considérée en ce point ; ou que

$$\text{premiers mineurs de } H = 0$$

et

$$\frac{\dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial x^2}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial x \partial y}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{\partial^2\rho^2}{\partial x \partial z}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}$$

7. On pourra reprendre toute cette étude à propos de trois longueurs d'onde $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, en vue de l'achromatisme du deuxième ordre, en mesurant l'*aberration chromatique relative du deuxième ordre,* en un point principal (x, y, z), par la somme

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2$$

des carrés des côtés du triangle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), dont les sommets sont les points de la courbe colorée au point principal (x, y, z), correspondant aux trois longueurs d'onde proposées :

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2, \\ \rho_2^2 &= (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2, \\ \rho_3^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 ; \end{aligned}$$

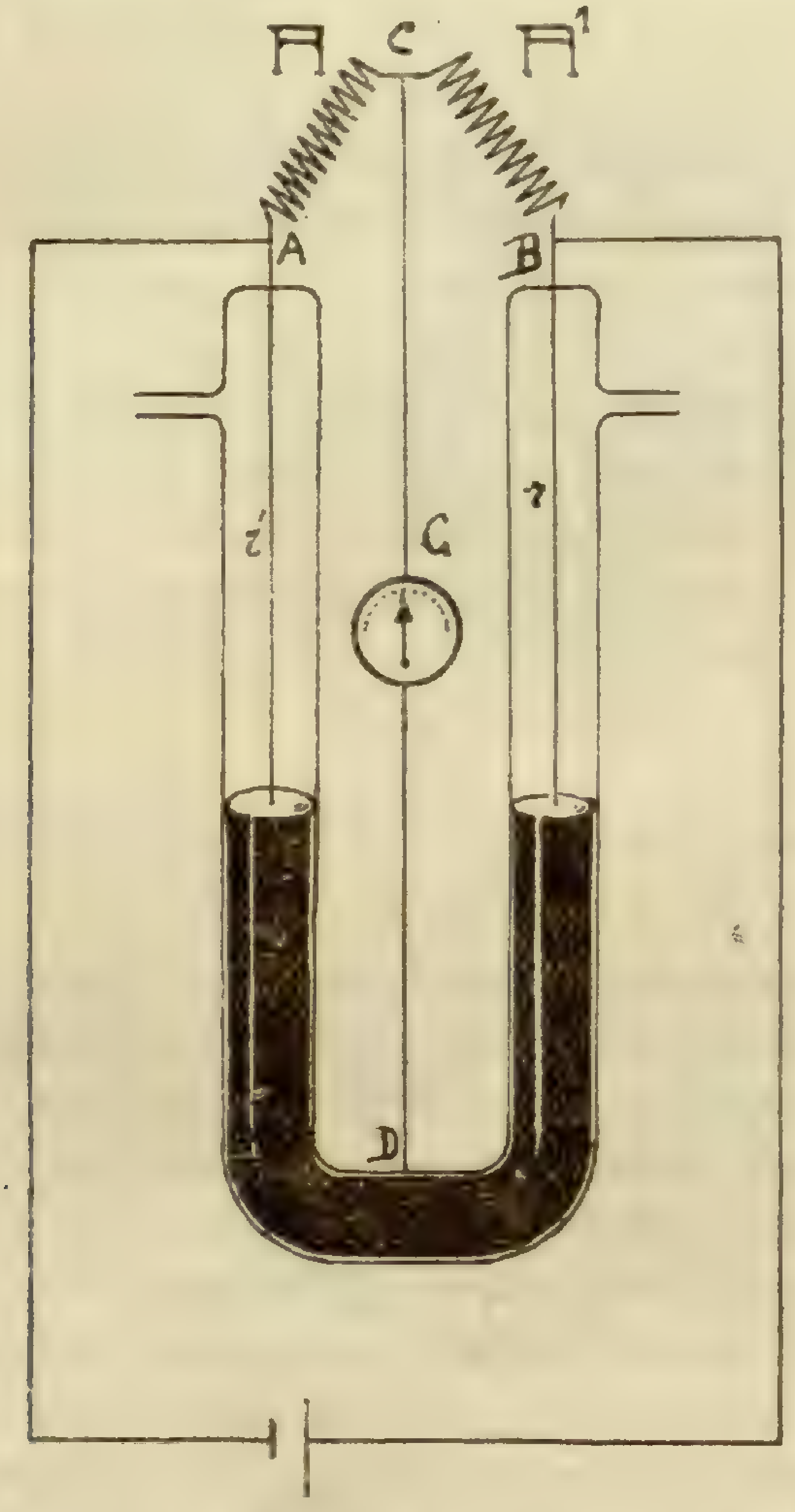
ρ_3^2, qui n'a été introduit que par raison de symétrie, est nul lorsque ρ_1^2 et ρ_2^2 le sont simultanément.

Il n'existe généralement pas de point du milieu-image présentant un achromatisme du deuxième ordre. — Lorsque les paramètres du système optique auront été choisis de manière qu'il y ait un pareil achromatisme en un point, on pourra considérer les dérivées secondes de l'aberration chromatique du deuxième ordre dans des directions issues de ce point, et imposer un achromatisme du deuxième ordre qui ne disparaisse que lentement le long de cette ligne ou sur cette surface à partir du point considéré. On pourra étendre à un ordre quelconque la définition de l'aberration chromatique relative. On pourra aussi imposer à l'aberration chromatique relative d'avoir toutes ses dérivées paires nulles jusqu'à un ordre supérieur au deuxième dans la direction d'une ligne donnée ou dans toutes les directions du plan tangent à une surface donnée à partir d'un point où l'aberration relative est nulle, — et créer ainsi des achromatismes de classes successives. Mais l'intérêt de ces généralisations n'est pas assez probable pour qu'elles soient entreprises ici.

Sur un nouveau manomètre à lecture électrique, par M. R. Goubau.

Ayant été dernièrement obligé, au cours d'une recherche de laboratoire, d'observer durant de nombreuses heures consécutives les variations de pression qui se produisaient dans un appareil, et ne possédant pas de manomètre enregistreur, qui aurait pu me faciliter grandement l'observation, je cherchai à utiliser dans ce but un galvanomètre enregistreur que j'avais à ma disposition. Je fus amené ainsi à réaliser un manomètre dont les indications se traduisent par des variations d'intensité d'un courant électrique qui peuvent être enregistrées par mon galvanomètre. La description de l'appareil ainsi réalisé et qui m'a rendu d'excellents services fait l'objet de la présente note. *(Voir fig. page 242.)*

Le manomètre lui-même est un manomètre à mercure ; un tube en U partiellement rempli de mercure, auquel on donne la forme et la dimension appropriées aux mesures à effectuer. L'une des branches est mise en communication avec le milieu dont on désire connaître la pression, l'autre branche est ouverte ou fermée, vide ou remplie d'air, suivant les mesures qu'il s'agit d'effectuer. Le mercure lui-même est mis en communication électrique avec l'extérieur à l'aide d'un bout de fil métallique scellé dans le verre à la partie inférieure du tube D et relié à l'une des bornes du galvanomètre sensible G. Dans l'axe de chacune des deux branches du tube en U se trouve tendu un fil



métallique très mince de grande résistivité et inaltérable sous l'action du mercure (platine, nickel, nickel-chrome, fer). A leur sortie des tubes en A et en B, ces fils sont reliés, d'une part aux bornes d'une source électrique, d'autre part aux résistances R et R'. Ces deux résistances sont réunies entre elles et au point de jonction C par un fil conducteur relié à l'une des bornes du galvanomètre. Il est aisé de voir que l'ensemble ainsi réalisé constitue un pont de Wheatstone et que par conséquent le galvanomètre sera au repos lorsque $Rr = R'r'$, r et r' étant les résistances des portions du circuit DA et DB. Étant donné que la résistivité de la colonne mercurielle est beaucoup plus faible que celle du fil tendu dans l'axe des branches, tout déplacement du mercure dans le manomètre se traduira par une variation de r et une variation inverse de r'. Les résistances R et R' peuvent être remplacées par un fil très résistant tendu devant une règle graduée et sur lequel se déplace un curseur prenant contact avec le fil et relié au galvanomètre.

Pour faire la lecture on déplace le curseur de manière à ramener le galvanomètre au zéro. Cette manière de procéder présente surtout de l'avantage lorsqu'on veut faire la lecture à distance. Comme galvanomètre on peut employer tout galvanomètre sensible et même, en utilisant un courant non continu, on pourra faire usage comme instrument de zéro d'un simple téléphone.

On fera varier la sensibilité de l'appareil dans de grandes limites en utilisant un galvanomètre plus ou moins sensible ; en faisant varier le rapport des diamètres du tube et du fil résistant ; en inclinant plus ou moins l'une sur l'autre les deux branches du manomètre. L'emploi de cet appareil me paraît avantageux lorsqu'il s'agit d'enregistrer des variations de pression (thermomètre à air, variation de la pression pendant une opération en autoclave, etc., etc.), ou lorsqu'il s'agit de pouvoir à distance surveiller la pression dans un appareil, une canalisation, etc.

Sur un nouveau procédé d'analyses gazométriques, par M. R. Goubau.

On sait que de nombreux dosages sont basés sur la mesure du volume de gaz qui se dégage au cours d'une réaction chimique. Citons par exemple : le dosage de l'eau oxygénée, du permanganate de potassium, des hypochlorites, par mesure de l'oxygène qui se dégage de ces substances sous l'action de certains réactifs ; le dosage de l'urée et des sels ammoniacaux, par mesure du volume d'azote se dégageant au cours de cette réaction, de l'acide nitrique, par mesure du volume d'oxyde azotique qu'il est susceptible de dégager au contact du mercure, etc., etc.

La mesure du volume gazeux est susceptible de se faire avec grande précision, à condition que l'on puisse établir avec rigueur la température et la pression du gaz au moment de la lecture et que l'on évite toute perte de gaz par dissolution ou par fuite.

On a imaginé un grand nombre d'appareils destinés à rendre ces déterminations commodes et sûres ; le grand nombre d'appareils nouveaux — spécialement d'uréomètres — qui chaque année se trouvent décrits dans les publications spéciales prouve combien peu jusqu'ici l'analyste est satisfait des appareils existants. L'un des appareils les plus sérieux et les plus sûrs employés dans ces dosages est le voluménomètre de Lunge. Cet appareil, susceptible de fournir entre des mains exercées des résultats irréprochables, a cependant certains défauts qui en restreignent l'emploi. D'abord il nécessite l'emploi d'une grande quantité de mercure; le tube dans lequel se fait la mesure du volume gazeux ne peut que difficilement se plonger dans l'eau et ainsi la détermination exacte de la température ne peut se faire qu'après un temps relativement long ; enfin, et c'est là le défaut capital, commun du reste à presque tous les appareils similaires, il nécessite un transvasement du gaz après la réaction. Ce transvasement par des joints en caoutchouc souvent peu étanches est la cause de presque tous les insuccès, les déboires et les découragements du débutant en gazométrie.

Amené durant l'occupation ennemie à faire des déterminations gazométriques et privé des ressources de mon laboratoire universitaire, j'ai été obligé de construire un appareil gazométrique nouveau qui m'a rendu de précieux services et dont la description fait l'objet de la présente note.

Le principe de l'appareil est le suivant : la réaction se produit dans une enceinte absolument vide d'air ; la réaction achevée, on laisse rentrer de l'eau dans l'appareil de telle manière que le gaz produit dans la réaction s'y trouve à la pression atmosphérique et à la température du moment, et on fait la lecture. *(Voir figure, page 245.)*

L'appareil comprend (voir fig. 1) :

1° Une chambre de réaction qui servira en même temps d'appareil de mesure.

2° Des parties accessoires destinées à faire le vide dans la chambre de réaction : trompe avec soupape à mercure.

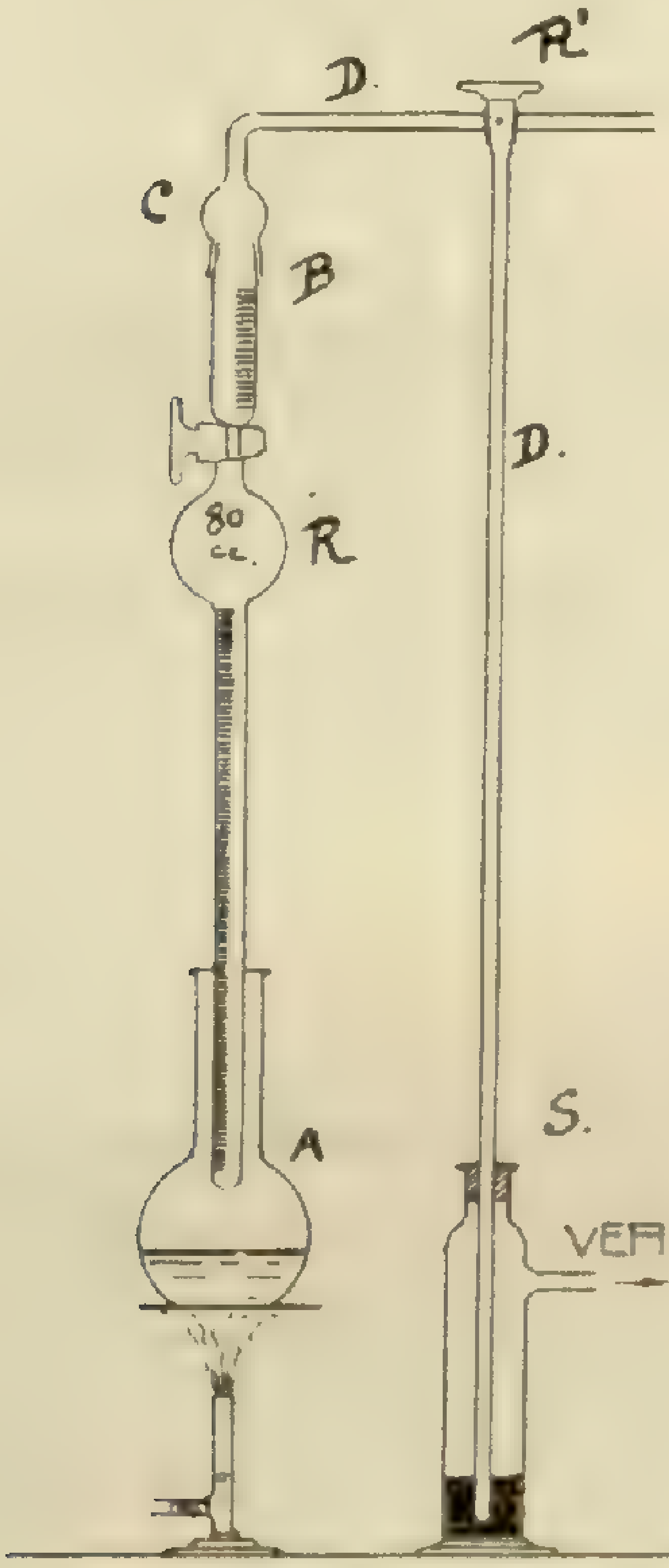


fig. 1

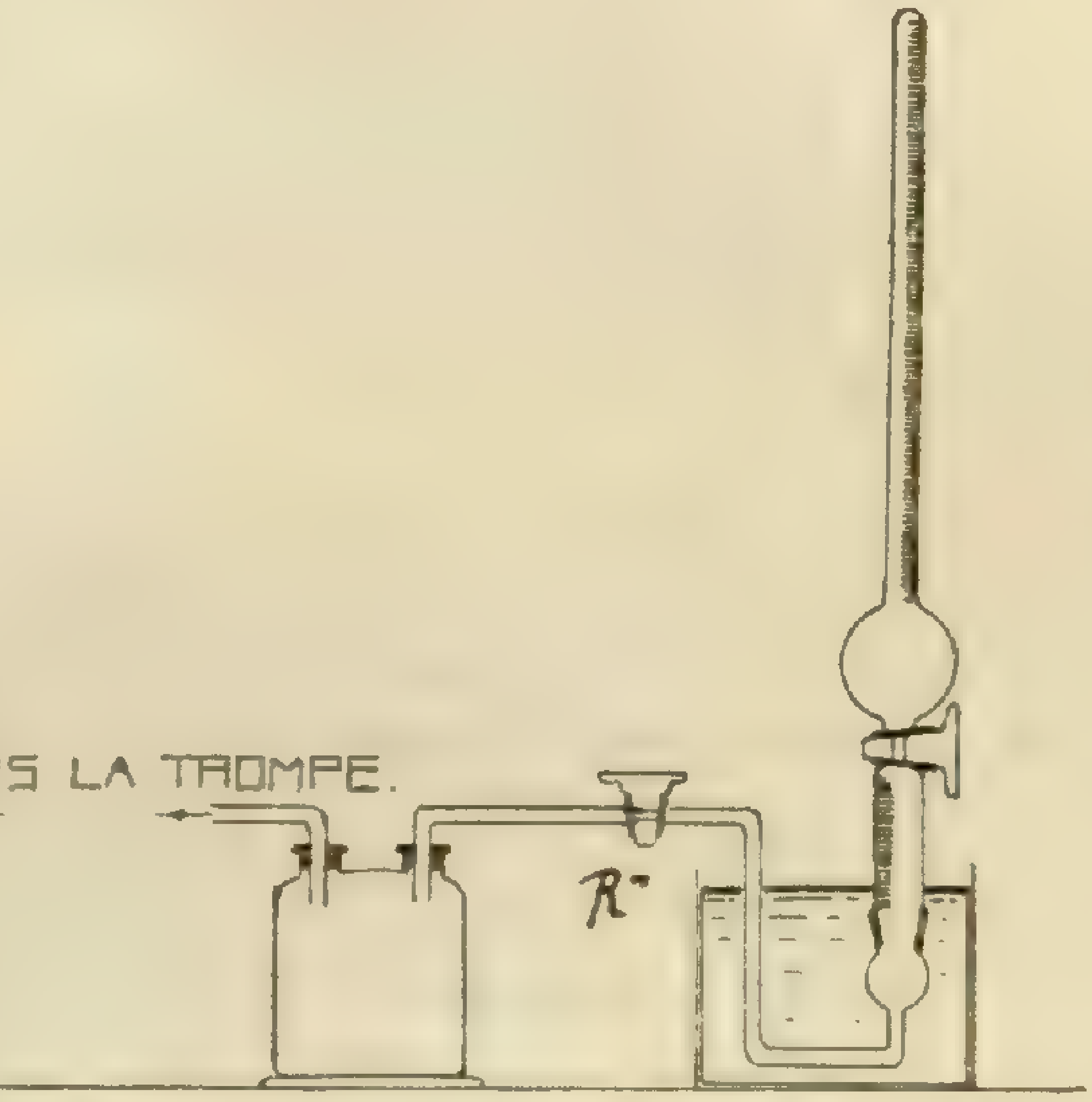


fig. 2.

La chambre de réaction est formée d'un tube AB fermé à l'une de ses extrémités et portant vers l'autre extrémité un renflement destiné à en augmenter la capacité, auquel fait suite un robinet bien étanche et à lumière aussi large que possible ; le tube se termine par un joint rodé C bien étanche permettant de mettre le tube en communication passagère avec le tube D conduisant par la soupape à mercure S à la trompe à vide. Le tube AB porte une double graduation sur sa partie étroite : l'une indique le volume à partir de l'extrémité inférieure, l'autre à partir du robinet. Le tube D est de petit diamètre (± 1 mm. int.), il est muni d'un robinet à trois voies R, et fixé à l'aide d'un bouchon sur un flacon à filtration rapide garni d'un peu de mercure dans lequel le tube pénètre peu profondément. La tubulure du flacon à filtration est mise en communication avec une trompe à eau.

Mode de l'emploi de l'appareil. — On commence par enlever de l'appareil toute trace d'air. Par suite de la présence, indispensable du reste, de la soupape à mercure, les meilleures pompes à vide ne pourraient réaliser cette opération si on n'employait l'artifice suivant. A l'aide d'une bonne trompe à eau on réalise dans l'appareil un vide relatif aussi avancé que possible. On ferme le robinet R et après avoir, par manœuvre du robinet R', laissé rentrer de l'air dans la partie R'R, on détache en C. Par manœuvre prudente de R on introduit un peu d'eau et un peu d'éther dans le tube AB sans laisser rentrer de l'air. On réunit de nouveau en C et, après avoir fait le vide dans la partie RR', on ouvre le robinet R. L'éther aussitôt entre en ébullition violente et ses vapeurs entraînent avec elles tout l'air de l'appareil. On chauffe ensuite le tube sur une certaine longueur dans un manchon de vapeur ; l'eau à son tour entre en ébullition vive et balaie les dernières traces d'air. Lorsque l'appareil lui-même et le tube qui lui fait suite sont chauds, on ferme le robinet R et, après manœuvre de R', on ouvre l'appareil en C. On introduit aussitôt en évitant toute rentrée d'air les substances réagissantes. Le dégagement gazeux se fait aussitôt et, comme il se fait dans le vide, la réaction s'achève rapidement. On peut, du reste, encore activer par chauffage au manchon de vapeur et agitation vive.

Le dégagement gazeux terminé, on remplit d'eau distillée fraîchement bouillie la partie du tube entre le robinet et le joint rodé, on ferme à l'aide du pouce l'extrémité ouverte en évitant d'y emprisonner de l'air, on le retourne sur une cuve renfermant de l'eau bouillie et on rouvre le robinet. L'eau se précipite dans l'appareil emprisonnant le gaz dégagé. La lecture se fait avec les précautions connues. Si le volume du gaz est plus petit que la capacité de la partie cylindrique, on fera la lecture le tube étant maintenu la partie fermée vers le haut. Si le volume du gaz est plus grand que le volume de la partie sphérique (environ 80 cc.) on fermera le robinet R sous l'eau tandis que le niveau de l'eau est le même à l'intérieur et à l'extérieur du tube et on fera la lecture après avoir retourné le tube.

Dans certains cas il peut être avantageux et même nécessaire d'éloigner les réactifs du gaz dégagé, avant de faire la lecture. On s'y prendra de la manière suivante (voir fig. 2) : Après avoir retourné le tube AB sur la cuve à eau bouillie, on l'adapte sur une pièce rodée plongée sous l'eau et soudée à un tube G muni d'un robinet à trois voies mis en communication par l'intermédiaire d'un flacon de Woulf avec une trompe à vide en fonctionnement. Par manœuvre convenable du robinet à trois voies R″ on retire de l'appareil les réactifs en évitant toute sortie de gaz. On ouvre le joint rodé sous l'eau bouillie, qui pénètre dans l'appareil et le nettoie. On répétera la même manœuvre jusqu'à ce que les réactifs soient entièrement éliminés, et on fera la lecture. L'emploi du dispositif que je viens de décrire facilite beaucoup le nettoyage de l'appareil.

Nous avons pu réaliser avec cet appareil tous les dosages rappelés au début de la présente note et les résultats obtenus ont été entièrement satisfaisants. La manœuvre de l'appareil est aisée, sûre et rapide, et dès les premiers essais, les débutants obtiennent des résultats fort satisfaisants.

Le P. Schaffers, S. J., présente *quelques formules de potentiels explosifs.*

On trouve rarement dans les manuels courants des indications précises sur la valeur des potentiels qui correspondent à une longueur explosive déterminée dans des conditions données. Cela tient à la difficulté de mesurer exactement ces potentiels. Les essais n'ont pas manqué, et les recueils de mémoires originaux en contiennent un grand nombre. Malheureusement ils sont assez peu d'accord entre eux. Et c'est sans doute la raison pour laquelle les auteurs qui écrivent pour l'enseignement s'abstiennent de citer les chiffres obtenus.

D'autre part, il est souvent bien gênant de n'avoir aucune idée des différences de potentiel sous lesquelles se produisent les étincelles. Il y a deux cas, notamment, où il serait intéressant de le savoir.

D'abord, celui des étincelles très courtes, telles que celles des résonnateurs de Hertz. Ensuite, celui des étincelles de grande longueur qu'on produit au moyen de machines électrostatiques ou de bobines. Or, pour ces deux cas, je crois être en mesure de donner une formule simple et facile à retenir, et dont l'application donne au moins autant d'exactitude que les lois moins générales ou plus compliquées qui ont été proposées par divers auteurs comme résumant leurs recherches. Les résultats sont, en somme, intermédiaires entre ceux qu'ont obtenus ces auteurs et peuvent être considérés comme leurs moyennes.

I. — Voici d'abord celle des courtes étincelles :

$$V = 340\,(1 + \sqrt{pl} + pl)$$

p est la pression en cm de mercure, l la distance explosive, en cm également. Le résultat est exprimé en volts. Il ne dépend, conformément à la loi connue depuis longtemps sous le nom de loi de Paschen, que du produit pl. Remarquons, en premier lieu, que cette formule peut être appliquée quelle que soit la forme des électrodes, plane, sphérique, de petit ou de grand rayon, pourvu que l soit assez petit (inférieur à 0,4 sous la pression atmosphérique) et le rayon pas trop au-dessous de 0,5 cm. On sait, en effet, depuis longtemps, que pour des longueurs inférieures à 0,4 cm. la forme des électrodes est pratiquement sans influence. La limite supérieure du domaine d'applicabilité est $pl = 7{,}6$ environ pour des pressions quelconques ; mais elle semble être au moins 5 fois plus élevée pour la pression atmosphérique.

Quant à la limite inférieure, on doit remarquer d'abord que pour p ou $l = 0$, la formule donnerait 340 v., le potentiel critique ou le potentiel explosif minimum. Mais on sait que ce potentiel est atteint en réalité avant que p ou l s'annule, et d'après les mesures de Carr, il se rencontrerait pour $pl = 0{,}055$. Bien entendu, les valeurs que donne la formule dans le voisinage de $pl = 0{,}055$ sont trop élevées : p. ex. : 438,4 pour le point critique même. C'est l'erreur relative maxima. A partir de $pl = 0{,}2$ elle décroit rapidement et la formule donne alors une approximation très satisfaisante.

Ce sont surtout les résultats de Baille, obtenus dans des expériences très soignées entre 0,0015 et 1 cm., à la pression atmosphérique, qui sont admirablement représentés par la formule proposée, à condition d'y remplacer le coefficient 340 par 370. Mais il est généralement admis que les nombres trouvés par Baille sont un peu trop forts, parce que à l'époque de ce savant on ignorait que l'étincelle n'éclate souvent qu'après un retard, et c'est pourquoi nous avons remplacé 370 par 340.

La même remarque s'applique aux résultats de Paschen (1889) et même à ceux, plus récents, d'Orgler (1900).

Ceux de Carr, au contraire (plans) donnent des valeurs plus petites que celles de la nouvelle formule proposée. Enfin, Holst et Koopmans en ont publié quelques-unes tout récemment (*Akademie der Wetenschappen,* Amsterdam, 1918) qui sont en assez bon accord avec elle.

TABLEAU

Carr.

pl	Vmes.	Vcalc.
1,2	1265	1120
0,9	1025	968,8
0,61	784	812,8
0,408	634	696,1
0,216	489	571,7
0,124	417	502

Holst et Koopmans

4,09	2911	2414
2,48	1998	1712,3
0,783	1017	907,1
0,38	687	678,6
0,306	640	632
0,316	646	638,5

Orgler

7,5	4566	3821,7
4,5	3120	2591
2,5	2040	1720,6
1,5	1491	1266,7
1	1092	1020,2
0.6	795	807

Baille (pression atmosph.)

pl	Vmes.	Vcalc. *avec 370*
0,114	426	538
0,19	570	602
0,38	753	740
0,76	945	973
1,14	1140	1187,7
3,04	2196	2142
6,08	3714	3533,5
15,2	7626	7437
30,4	13584	13653
60,8	25449	25752
76	31647	31716

Paschen

7,5	4965	4158
2	2025	1633
1	1353	1110
0,8	1149	996,9
0,6	1002	878,7
0,4	840	751,5
0,2	669	609,4

II. — La nouvelle formule proposée pour les *longues* étincelles ne contient pas la pression. Elle s'écrit :

$$V = 23\sqrt{lr} + 8, \text{ en kilovolts.}$$

En fait, c'est presque toujours sous la pression atmosphérique qu'on les rencontre dans la pratique. Mais le rayon r des sphères entre lesquelles on la fait éclater joue un rôle important. En faisant dépendre le potentiel explosif du produit lr, nous assimilons le rôle de r à celui de la longueur d'étincelle l. Cette assimilation est basée sur une considération analogue à celle dite des champs semblables, en vertu de laquelle le potentiel deviendrait n fois plus grand si on rendait n fois plus grands à la fois le rayon des sphères électrodes et leur distance. Il en résulte que V devenant n fois plus grand quand le produit lr devient n^2 fois plus grand, V est proportionnel à $\sqrt{lr}$. En réalité, comme dans toutes les lois proposées pour les distances explosives, il faut encore ajouter un terme constant. Nous trouvons empiriquement que la constante 8 et le coefficient 23 donnent toute satisfaction.

Il y a une limite inférieure d'applicabilité donnée par la règle suivante : il faut que l soit au moins égal à r. De plus, r ne doit pas descendre au-dessous de 0,25 cm. Car, sur les boules trop petites, il y a une tendance notable à la production d'aigrettes et dès lors le potentiel explosif est fortement altéré.

La limite supérieure est inconnue, les mesures de potentiels explosifs devenant de plus en plus incertaines avec la distance. Mais jusqu'à 300 000 V au moins les résultats sont très suffisamment approchés.

Tout ceci s'applique au cas où les boules sont égales. Si elles sont inégales, on sait que l'étincelle passe beaucoup plus facilement quand la plus petite électrode est positive que dans le sens inverse. Dans ce cas le r à introduire dans la formule est celui de la petite sphère ; mais l'approximation est moins bonne que dans le cas des électrodes symétriques.

TABLEAU

HEYDWEILLER et PASCHEN

$r = 0{,}25$ cm

l	Vmes.	Vcalc.
0,3	11,6	14,2
0,5	16,2	16,1
1	20,6	19,5
	$r = 0{,}5$	
0,5	17,7	19,5
0,8	24,7	22,6
1	27	24,3
	$r = 1$	
1	31,3	31
1,4	38,6	35,1
	VOIGT	
	$r = 3$	
3	78	77
4,5	93,8	92,4

Mascart et Joubert

$r = 1,5$ cm

l	Vmes.	Vcalc.
3	63	56,8
5	77,7	71
10	97,5	97
15	105	117

Abraham et Villard

$r = 2,5$

2,07	60	59,5
6,2	120	98,6
13,5	160	141,6
44	240	249,2
60	300	289,7

$r = 5$

4,5	120	117,2
6,7	160	141,1
9,7	200	168,2
36	300	316,6

$r = 15$

12,6	300	324,3

III. — Pour terminer, signalons une formule d'Abraham et Villard (Comptes rendus, Paris, t. 153, déc. 1911) :

$$V = 5,2 + 26,2\ l \text{ en kilovolts,}$$

applicable aux cas non compris dans les formules nouvelles proposées ci-dessus, savoir : aux plans parallèles à des distances supérieures à 0,4 cm ; aux sphères de même rayon à des distances inférieures au rayon, pourvu toutefois qu'elles n'y soient pas trop inférieures, comme le montre le Tableau suivant :

Voigt

$r = 3$

l	Vmes.	Vcalc.
1,2	37,8	36,6
1,4	43.4	41,9
1,6	48,4	47,1
1,8	54,5	52,4
2	58,9	57,6
2,5	69,6	70,7
3	78	83,8

Heydweiller et Paschen

$r = 1$

l	Vmes.	Vcalc.
0,1	4,7	7,8
0,2	8,1	10,4
0,4	14,5	15,7
0,6	20,4	20,9
0,8	26	26,2
1	31,3	31,4

Manomètres à lecture rapide pour pressions de l'ordre du cm,

par le R. P. V. Schaffers, S. J.

Il n'est pas difficile de construire, pour les faibles variations de pression dans le voisinage de la pression atmosphérique, un manomètre plus sensible que le manomètre à mercure. Il suffit pour cela de remplacer le mercure par un liquide non volatil dont la densité soit voisine de celle de l'eau, tel que l'acide sulfurique ou certaines espèces d'huile.

Pour les pressions très basses, on possède mieux encore, dans les diverses variétés de la jauge de Mac Leod. Mais il est un domaine intermédiaire, celui des pressions de l'ordre du cm, où ces deux moyens font défaut. Les tubes gradués de la jauge de Mac Leod seraient trop longs pour des pressions de 5 cm, p. ex., et d'autre part, la lecture est lente et laborieuse, puisque l'emploi de la jauge demande toujours une manœuvre préliminaire (remontée du réservoir à mercure, p. ex.). D'autre part les liquides légers non volatils ne conviennent plus, parce qu'ils dégagent sous ces basses pressions l'air qu'ils ont dissous à la pression atmosphérique. C'est cet inconvénient qui m'a arrêté dans les divers essais que j'avais été amené à faire avec des huiles et de la glycérine.

J'ai eu recours alors au manomètre à mercure à branche fermée, mais à tube en forme de V très ouvert, imaginé par Toepler. La dénivellation verticale du mercure entrant seule en ligne de compte pour l'évaluation de la pression, on comprend qu'en inclinant suffisamment les deux branches du V, on puisse obtenir pour une dénivellation donnée un déplacement oblique de la colonne de mercure, 5, 6 ou 10 fois plus grand, et par suite, avec une rapidité beaucoup plus grande, une précision de lecture égale à celle que donne l'emploi du cathétomètre. Il y a une condition essentielle pourtant : il faut que l'instrument soit continuellement secoué par un vibrateur mécanique. La paresse du mercure dans ce déplacement oblique est en effet bien plus grande que dans le déplacement vertical. Il y a un autre inconvénient, plus gênant encore. Si la branche fermée du manomètre n'est pas terminée par une boule d'assez grande capacité, le mercure heurte le fond avec une vitesse telle que les ruptures sont exagérément fréquentes.

Le réservoir d'amortissement des chocs, indispensable au manomètre Toepler, m'a suggéré une construction entièrement nouvelle.

Le réservoir d'amortissement devient lui-même la branche fermée du manomètre, et prend la position verticale, avec une forme cylindrique. L'autre branche devient horizontale et n'a plus qu'un diamètre quasi capillaire, p. ex., 2 mm. si la branche verticale en a un de 1 cm. Dans ces conditions, le tube horizontal ayant une section 25 fois plus faible que celle du tube vertical, tout changement de pression qui viendrait à se déclarer produirait un déplacement horizontal 25 fois plus grand que la dénivellation correspondante. De plus, le niveau inférieur ne changeant pas, puisque le tube est horizontal, il suffira d'une seule lecture pour connaître la pression. Cette lecture se fera sur le tube horizontal et, bien entendu, l'instrument devra être étalonné au moyen d'un manomètre ordinaire lu au cathétomètre. La fragilité du Toepler est ainsi évitée, la sensibilité est considérablement augmentée, et enfin, il ne faut qu'une lecture au lieu de deux. Seulement, le vibrateur mécanique est ici bien plus indispensable encore que pour le Toepler, car le mercure se déplace avec plus de difficulté dans ce tube étroit horizontal que dans les tubes inclinés relativement larges de Toepler. Il n'y a rien de plus simple, en fait, que de monter sur la planchette de l'appareil le vibrateur d'une forte sonnerie.

Troisième Section

Le bureau de la Section pour l'année 1921-1922 est composé comme suit :

Président : M. l'abbé G. DELÉPINE.
Vice-Présidents : M. le professeur P. DEBAISIEUX.
M. le curé CLAERHOUT.
Secrétaire : M. le professeur F. VAN ORTROY.

La Section propose deux questions de concours :

1) On demande des recherches très détaillées sur la structure des chromosomes et la vraie nature de leur division longitudinale.

2) On demande de nouvelles recherches sur la structure et l'origine des cherts du calcaire carbonifère de Belgique.

Le R. P. Pierre Charles, S. J., présente une étude sur *Une station aurignacienne avec ossements humains : l'abri sous roche du Roua.*

I. *Le gisement.*

Les stations paléolithiques de la Méhaigne sont connues depuis longtemps. Le docteur Tihon et Julien Fraipont en ont découvert un grand nombre et les ont fouillées avec beaucoup de méthode. Les résultats de leurs recherches sont consignés dans deux mémoires, publiés, il y a environ trente ans, par l'Académie royale de Belgique (1).

Parmi ces stations la grotte du Docteur (commune d'Huccorgne, province de Liége) n'est peut-être pas la plus ancienne — le trou de l'Hermitage ayant livré du véritable chelléen — mais elle n'en est pas moins intéressante. Cinq niveaux y ont été repérés, dont deux seulement sont ossifères. Le niveau n° 2, très riche, contenait un outillage lithique offrant tous les types de transition de l'acheuléen au moustérien inférieur. Le niveau n° 3 — terre jaune — était très pauvre en industrie, ne contenait *aucune pointe moustérienne, aucun os travaillé,* mais seulement quelques burins massifs et quelques fines pointes à bord abattu et retouché. Dans la faune, peu abondante, le cheval seul était commun. Après lui venait le renne. L'hyène était très rare. *Le rhinocéros manquait tout à fait.* Tihon et Fraipont, avec un peu d'hésitation, considèrent ce niveau comme magdalénien. On peut accepter cette conclusion en faisant quelques réserves. Le magdalénien du niveau n° 3 n'a pas la physionomie franche. Il doit encore être étudié. Peut-être le triage méthodique des pièces, rassemblées dans les collections de l'Université de Liége et confiées à l'intelligente direction de Charles Fraipont, permettrait-il de définir avec plus de précision la position de ce niveau dans l'ensemble de la stratigraphie quaternaire.

---

(1) *Exploration scientifique des cavernes de la vallée de la Méhaigne.* Mém. couronnés etc... de l'Acad. royale de Belgique. Série in-8°, t. 43, 1889, 72 p. et 12 planches ; t. 54, 1896, 55 p. et 8 planches.

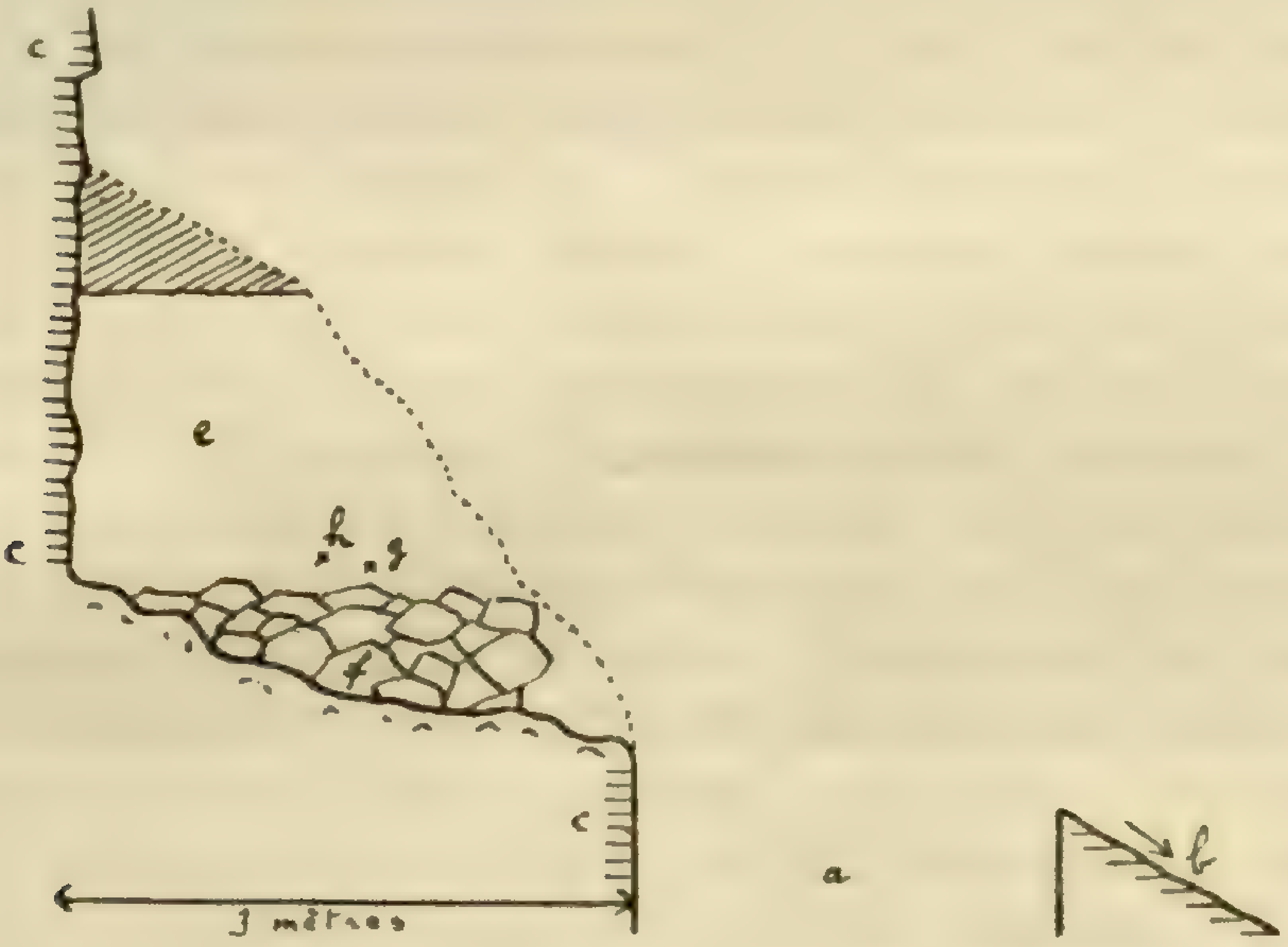
F. Tihon, *Exploration des grottes de la vallée de la Méhaigne. (Le Trou du Chena).* Bull. Soc. d'Anthropol. de Bruxelles, t. IX, 1890-91, 14 p. 1 pl. D'autres savants ont exploré ces mêmes gisements, p. ex. : le comte de Looz et le baron de Loë, Marcel De Puydt, qui a trouvé au trou Sandron plusieurs coups de poing du type de Saint-Acheul, Dormal, Martel, Rahir et Van den Broeck...

A l'heure actuelle il est, croyons-nous, presque impossible de pratiquer dans la grotte elle-même des fouilles fructueuses. Les déblais des explorations précédentes encombrent les diverticules latéraux, et les niveaux ne sont plus reconnaissables nulle part.

En revanche, avec la gracieuse autorisation du propriétaire, M. Léon Collinet, châtelain de Famelette, nous avons pu fouiller à fond un abri-sous-roche, contigu à la grotte elle-même et dont l'existence n'avait pas encore été signalée.

Il se trouve à l'Est de la grotte, à 35 mètres au-dessus du niveau de la petite rivière desséchée du Roua, affluent de la Méhaigne. La falaise rocheuse dans laquelle est creusée la caverne, tourne brusquement du Nord à l'Est à 7 mètres environ de l'entrée de la grotte. Elle court alors dans la direction de l'Est pendant une douzaine de mètres. C'est le long de cette falaise que se trouve l'abri-sous-roche dont nous allons parler.

Une coupe schématique permettra de se rendre compte de l'ensemble du gisement.



Abri-sous-roche du Roua

a) tranchée du tram vicinal Hannut-Burdinne ; *b)* vallon du Roua ; *c)* paroi rocheuse ; *d)* 2e niveau ossifère, terre noire ; *e)* 1er niveau ossifère, terre jaune ; *f)* blocaux ; *g)* emplacement du maxillaire ; *h)* emplacement du calcaneum.

La roche de la paroi se clive très facilement dans le sens horizontal et dans le sens vertical. Dès que les fissures de clivage se rejoignent, les blocs s'effondrent par grosses masses. Le phénomène se produit encore aujourd'hui, et on retrouve des blocaux à toutes les hauteurs dans les couches archéologiques de l'abri.

II. *L'abri sous roche.*

Nous y avons d'abord pratiqué un sondage, puis nous avons enlevé, par tranches horizontales, toute la terre meuble, sauf à l'extrémité Est. Nous n'avons eu recours à aucune main-d'œuvre étrangère, et tous les objets ont été ramassés par nous-même, ou, en notre présence, par nos collègues les PP. Brisbois et Fiévez. La terre a été tamisée avec soin et nous n'avons voulu rejeter aucune pièce, même atypique.

On peut distinguer deux niveaux ossifères superposés et un niveau stérile sous-jacent, qui n'est composé que de blocaux effondrés, reposant eux-mêmes sur l'assise rocheuse de base.

En numérotant ces niveaux de bas en haut, nous avons donc rencontré d'abord, dans l'ordre même des fouilles, le niveau n° 3.

Il est constitué par de la terre noirâtre, mêlée de racines et mesure au maximum 0,50 m. de profondeur. Sa largeur, presque nulle au sommet, va grandissant jusqu'à 1 m. A plusieurs endroits il était recouvert par des éboulis compacts. Il a suffi d'enlever ces pierres — anciens rebords surplombants effondrés — pour découvrir, sans aucune couche intercalaire, des ossements accumulés sur 0,20 ou 0,30 m. d'épaisseur. Tous les os creux contenant du tissu spongieux étaient brisés ; sur plusieurs la trace des coups de percuteur était encore très nette. Quelques silex taillés étaient mêlés à ces débris. La faune contient sûrement — et sous réserve d'identifications ultérieures que nous n'avons pas encore pu terminer — *Rhinoceros tichorhinus ; Elephas primigenius ; Equus caballus ; Hyaena spelaea ; Ursus spelaeus ;* de grands bovidés, des cervidés, de petits carnassiers et quelques oiseaux.

L'outillage comprend, notamment : une belle pointe moustérienne typique, dont une arête a été utilisée comme grattoir ; un grossier racloir à encoche ; une lame de couteau, sans aucune retouche sur les bords ; de nombreux éclats de débitage ; des nucléi et quelques petits grattoirs semi-lunaires.

Il faut y ajouter une très belle pointe de sagaie, en os, mesurant 0,04 m. de long et portant à la base une encoche latérale d'emmanchement. Plusieurs ossements sont manifestement appointés et ont pu servir de poignards ou de perçoirs. Un fragment de fémur de cheval a été utilisé comme retouchoir.

Nous n'avons découvert à ce niveau ni burins, ni grattoirs carénés. Le renne n'y figure que douteusement. Il nous est donc bien difficile de classer ce niveau au magdalénien, et il est impossible d'y trouver du solutréen ou de l'aurignacien vraiment typique. Peut-être faut-il le considérer non comme un niveau distinct mais comme la bordure supérieure du niveau n° 2. En effet les outils y sont extrêmement rares, les ossements extraordinairement abondants et en général d'une grande dimension. De plus le gisement était, en grande partie, scellé sous les éboulis, provenant de l'ancienne voûte en surplomb de l'abri. On peut donc conjecturer que cette accumulation de débris de chasse ne se serait pas maintenue, si l'abri avait continué à être fréquenté. Beaucoup de ces ossements auraient roulé dans le vallon ; auraient été piétinés et morcelés ; auraient été rongés ou emportés par les hyènes, qui pullulaient alors et qui ont laissé la trace de leurs dents sur de nombreux fragments osseux. L'homme lui-même aurait eu l'occasion d'abandonner par mégarde ses outils dans ce charnier et peut-être le niveau 3 ne différerait-il guère du niveau 2.

Bref, nous conjecturons que l'éboulement soudain de la voûte a modifié les conditions normales de la formation du dépôt et a donné au niveau 3 son aspect particulier. Ce qui est sûr, c'est que cette mince bande de terre n'a pas livré d'outillage assez nombreux ni assez typique pour qu'on puisse la classer stratigraphiquement, sinon par sa faune ; et chacun sait que le critère zoologique n'est pas très maniable à l'intérieur même du quaternaire.

Il est sûr encore que ce niveau ne peut être synchronisé avec le niveau 2 de la caverne ; puisque celui-ci ne contenait pas de rhinocéros, très peu d'hyènes, et pas un seul os travaillé. Ici au contraire le rhinocéros abonde, l'hyène est presque aussi commune que le cheval et l'industrie de l'os est nettement représentée.

Juste au-dessous du niveau 3, sans intercalation de couche stérile, nous avons découvert une assise d'argile jaunâtre, profonde de 1,50 m. environ et qui va s'élargissant depuis 1 m. au sommet jusqu'à 2,50 m. à la base. Elle est beaucoup moins riche en ossements que la couche précédente ; mais les silex y sont beaucoup plus abondants et plus typiques. La faune comprend : *rhinoceros tichorhinus ; elephas primigenius ; equus caballus ; hyaena speiaea ; felis spelaea ; ursus spelaeus ; bison europaeus* ou *bos primigenius ; canis lupus ; sus scrofa ; ovibos moschatus (?) ; megaceros hibernicus (?) ; cervus elaphus ; rangifer tarandus (?) ;* quelques petits carnassiers, des rongeurs et plusieurs oiseaux.

Les os sont plus fragmentés que dans le niveau précédent ; intentionnellement brisés pour la plupart.

L'industrie lithique est assez variée. Nous y avons trouvé de belles pointes moustériennes typiques ; des grattoirs carénés du type de Tarté ; des burins simples ; des perçoirs, de belles lames à dos rabattu mais non par des retouches successives, des pointes se rapprochant du type de Châtelperron, des nucléi et des percuteurs. La matière employée est en général le silex ; exceptionnellement les objets sont en grès lustré, en phtanite ou ou en quartzite. Un bon nombre des outils ont dû être fabriqués sur place : les nucléi et les percuteurs en sont la preuve. La contrée est d'ailleurs très riche en silex. Braives et Avennes sont connus par leurs ateliers néolithiques.

Il faut signaler aussi toute une série de petits instruments : grattoirs, pointes, lames, d'un travail très fin, et qui ne dépassent guère 0,01 m. de long, sur 0,005 de large. Nous ne croyons pas que cette industrie microlithique ait été signalée jusqu'à présent dans les niveaux quaternaires de la Méhaigne.

Les objets de parure comprennent quelques dents d'hyène, plus ou moins travaillées ; une forte canine d'ours paraissant avoir été percée d'un trou de suspension transversal, et un bloc d'ocre jaune, sur lequel les traces de grattage sont encore très nettes. Nous avons trouvé aussi un assez grand nombre de petits cailloux roulés, de couleur vive, veinés de rouge et qui semblent bien avoir été apportés par l'homme ; ainsi qu'une concrétion de forme bizarre, mamelonnée, analogue à ces pierres que les nègres d'aujourd'hui cachent encore au creux des fétiches.

L'industrie de l'os est représentée par une belle série de pointes, de lissoirs et de perçoirs. Parmi ces pièces nous croyons pouvoir distinguer :

1. Des pointes de sagaie destinées à être emmanchées. Les unes se terminent par une base large et fort aplatie, destinée à être fixée dans un manche bifide ; d'autres portent à la base une encoche latérale, et devaient s'adapter à une tige en biseau — on distingue encore des traces de ligature — d'autres sont du type de la pointe de flèche symétrique, avec une encoche médiane pour l'emmanchure, d'autres sont bombées et n'ont pu être que très difficilement attachées à une hampe dont l'extrémité serait logée dans leur concavité.

2. Des perçoirs destinés à être tenus au pouce ou à pleine main. On remarque que l'os a toujours été coupé de façon à donner à la pointe le maximum de résistance. Quelques-uns sont encore assez solides pour percer sans difficulté le drap ou la peau. De petits fragments d'os durs ont été taillés en forme de pointes moustériennes typiques et n'ont jamais pu être emmanchés.

3. Quelques lissoirs portant encore des traces d'usure appartenaient au même niveau.

Nous n'avons pas trouvé une seule pointe à base fendue, du type d'Aurignac.

Les galets plats, les dalles calcaires, les larges surfaces osseuses ont été examinés avec soin, sans que nous ayons pu découvrir la moindre trace de gravure. Seuls quelques ossements portent des stries intentionnelles, ou des traits brouillés, ne formant aucun dessin saisissable pour nous. Ce sont sans doute des retouchoirs.

Ce niveau ne peut pas être synchronisé avec le deuxième niveau de la grotte (terre noire). Celui-ci est acheuléen, d'après Tihon et Fraipont, et abonde en instruments du type amygdaloïde, taillés sur les deux faces. Le niveau 2 de notre abri est *aurignacien*. On y trouve des burins, des grattoirs carénés, de nombreuses pointes en os ; et le critère zoologique confirme cette détermination.

L'abbé Claerhout a publié dans nos ANNALES, en 1912, une très belle étude sur l'aurignacien en Belgique(1). Nous y renvoyons ceux qui voudront se rendre compte de la position relative de notre gisement dans l'ensemble des niveaux paléolithiques moyens du pays.

III. *Débris humains.*

Vers la base du niveau n° 2, nous avons mis à jour, le 16 février dernier, un maxillaire supérieur droit humain, et un calcanéum gauche également humain. Le calcanéum gisait à 30 cm environ du maxillaire dans la même couche, incontestablement non remaniée. Le maxillaire se trouvait exactement à 5 m. de distance latérale depuis l'angle presque droit que fait la paroi rocheuse de l'escarpement dans la direction Nord-Est; à 1,10 m. de profondeur dans le niveau 2, et à 1,50 m. du pied de l'escarpement.

Le maxillaire est brisé sur l'alvéole de la première incisive, et tout le long de la voûte palatine. La crête ethmoïdale fait défaut ainsi que l'apophyse malaire, cassée presque à son origine. Une molaire est encore en place.

Sous la canine, dans l'alvéole, et n'ayant pas percé, une dent se trouve encore prisonnière — ce qui est à peine une anomalie.

Ce maxillaire est très robuste, mais son exiguïté est surprenante. Il semble n'avoir rien de néanderthaloïde. On le prendrait au premier abord pour une mâchoire de pygmée à dentition massive. Son examen anatomique sera poursuivi.

Le calcanéum est court, trapu, mais ne semble pas néanderthalien. La petite apophyse est beaucoup moins développée que chez l'homme de Spy. L'étude de ce curieux document humain n'est pas encore achevée.

Ernest Doudou a découvert jadis près de la grotte du Docteur un crâne humain, ou plutôt une calotte crânienne, qui se trouve dans les collections de la SOCIÉTÉ D'ANTHROPOLOGIE de Bruxelles (2). Mais les conditions de gisement de cette pièce sont très défectueuses, et malgré l'avis plutôt favorable de MM. Van den Broeck, Martel et Rahir [1], on peut douter que le crâne soit quaternaire.

---

(1) ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE, 1912, p. 267 suiv.

(2) Ernest Doudou, dans JADIS, RECUEIL MENSUEL D'ARCHÉOLOGIE ET D'HISTOIRE, 5e vol., 5e année 1901, p. 45-49 (Soignies, chez Demeuldre).

Il ne nous semble pas qu'il y ait lieu de contester le caractère paléolithique des deux débris humains que nous avons l'honneur de soumettre à votre examen, et qui sont — si on met à part le crâne douteux découvert par Doudou — les seuls restes que nous possédions des antiques chasseurs de la Méhaigne.

M. le professeur P. Debaisieux entretient la Section de la découverte d'*un ciliate astome nouveau : Intoschellina rhynchelmis.*

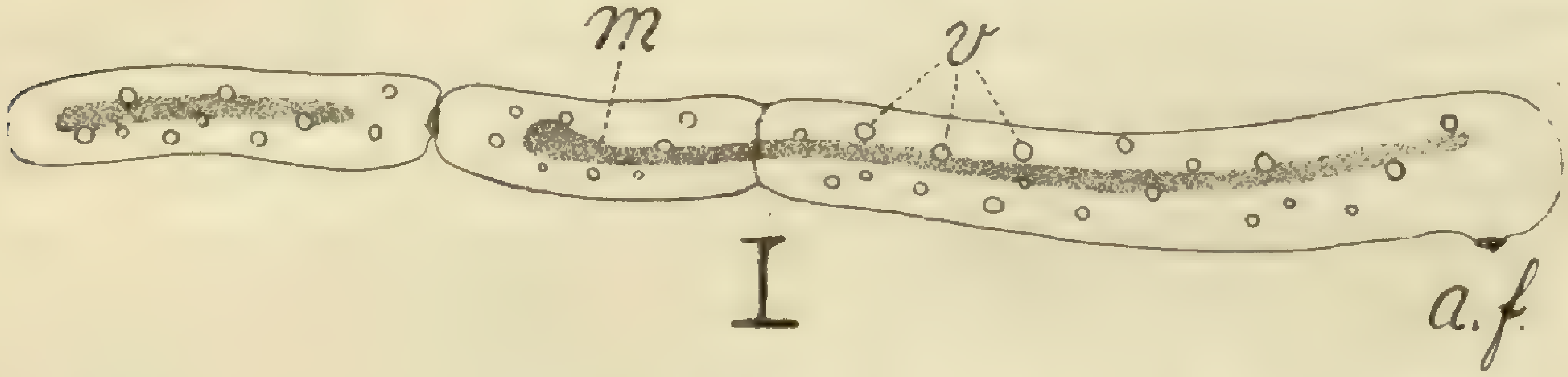
Des Rhynchelmis limosella, Hoffm., oligochètes limicoles trouvés au mois de mars, dans un bourbier aux environs de Louvain, ont montré une infection intense du tube digestif par un ciliate astome qui ne fut pas encore signalé. Il mérite de l'être, car ce groupe d'infusoires est un de ceux chez lesquels les études de philogénie, généralement si décevantes chez les protozoaires, promettent d'être le plus fécondes. Le groupement est hétérogène : les astomes, tous parasites, se rattachent certainement à des souches libres très diverses ; de nombreux indices permettent d'entrevoir quelles sont ces souches, mais trop peu d'espèces sont actuellement décrites pour établir les étapes qui jalonnent les voies régressives conduisant aux types les plus dégradés. Le parasite des Rhynchelmis réunit en lui, outre des adaptations très particulières, des caractéristiques qui le rapprochent de plusieurs espèces ou même de plusieurs genres déjà connus.

Les parasites habitent toute la longueur de l'intestin de l'hôte, mais montrent de la prédilection pour la région antérieure et moyenne ; ils sont généralement groupés en petits amas de cinq ou six. A l'état d'extension ils sont vermiformes, à peu près cylindriques, légèrement plus renflés à la partie antérieure. Ils mesurent en moyenne 600 μ de long (350 à 750) et 75 μ de large; l'extrémité antérieure est obtuse, la postérieure est obtuse, mais généralement un peu tronquée.

---

[1] *Les cavernes et les rivières de la Belgique,* t. II, Appendice, p. 34.

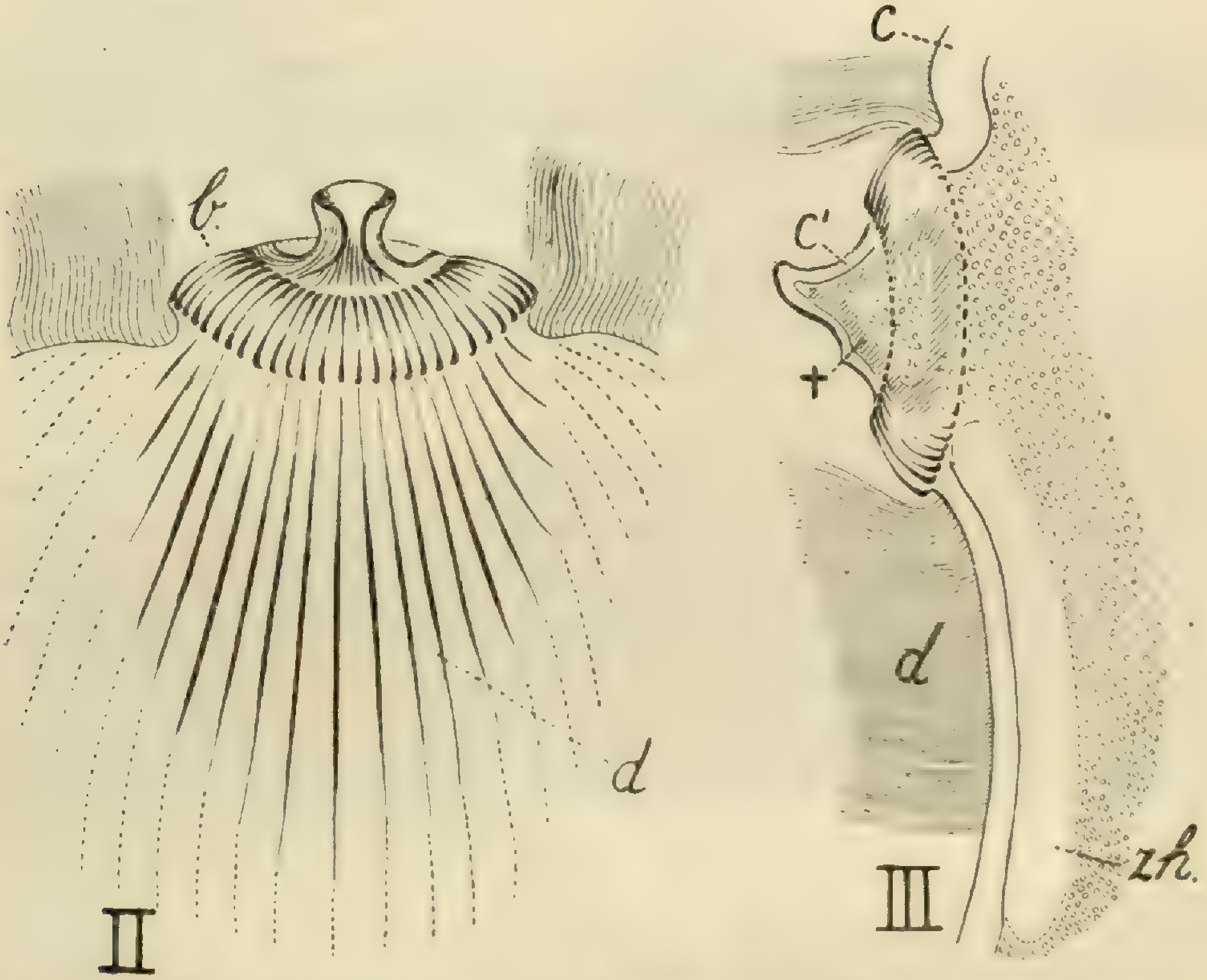
Les parasites observés étaient très souvent en processus de bourgeonnement postérieur ; ils apparaissent alors en chaînes à deux chaînons. La formation du bourgeon s'indique par la formation d'un sillon annulaire dans la cuticule, vers le quart ou le tiers postérieur du corps ; le bourgeon postérieur déjà nettement distinct forme un appareil de fixation par lequel il reste quelque temps attaché à l'individu mère, puis finalement il se détache. Exceptionnellement un nouveau sillon transversal apparaît sur l'individu antérieur avant que le dernier bourgeon ne se soit détaché. (Fig. I).



Intoschellina rhynchelmis. I. Animal entier vu de profil avec bourgeon en formation et bourgeon achevé ; *m.* macronucleus, *v.* vésicules contractiles, *a. f.* appareil de fixation ; × 80.

Les mouvements du parasite sont rapides ; à l'état d'extension il se meut par un glissement ciliaire, généralement vers l'avant, mais il est capable de motilité semblable et presque aussi rapide vers l'arrière ; le glissement ciliaire est souvent accompagné d'une lente rotation hélicoïdale du ciliate suivant son axe ; l'animal peut aussi s'insinuer entre les obstacles par reptation, en repliant et déformant le corps en tous sens ; c'est dans ce cas surtout qu'apparaît la prédominance d'épaisseur de la région antérieure. Le bourgeon, encore attaché à l'individu mère, se meut par mouvements ciliaires, mais il paraît toujours traîné à la remorque par l'individu antérieur.

Le corps est revêtu d'une cuticule ou ectoplasme nettement distincte, formant une assise externe translucide d'environ 3 μ d'épaisseur ; elle porte des stries longitudinales très nombreuses, régulièrement disposées sur tout le corps et distantes entre elles d'environ 2 μ ; les cils grêles et très serrés, de 10 à 15 μ, sont plus longs dans la région antérieure et au voisinage de l'appareil fixateur que sur la région moyenne et postérieure du corps. Les stries longitudinales sont parfois disposées tout droit. suivant les méridiens du corps, de la partie antérieure à la partie postérieure, mais le plus souvent elles entourent le corps en un très large tour de spire ; il semble dès lors que l'animal tout entier se torde plus ou moins suivant son grand axe et la face ventrale n'est caractérisée comme telle qu'à la partie antérieure, où elle est déterminée par l'appareil de fixation.



II. Appareil de fixation vu d'en bas et d'en arrière ; *b*. bourrelet, *d*. dépression ventrale ; × 1300. — III. Appareil de fixation vu de profil, *c*. cuticule du corps, *c'*, cuticule de l'appareil de fixation, *z. h*. zone hyaline sous la dépression, + aspect du squelette de soutien douteux ; × 1300.

A la partie postérieure tronquée du corps la cuticule s'amincit brusquement, jusqu'à disparaître, de sorte qu'il existe à ce niveau une toute petite plage au niveau de laquelle l'endoplasme paraît ne pas être protégé ni limité par l'ectoplasme.

A la partie antérieure, subterminale ventrale du corps, la cuticule est différenciée en un appareil de fixation compliqué (fig. II et III). Il est complètement dépourvu de cils et comporte, sur une base circulaire d'environ 25 µ de diamètre, un bourrelet annulaire (*b*) surélevé par rapport à la surface du corps, dont il est nettement séparé par un étranglement circulaire ; ce bourrelet à profil en cônes surbaissé, s'affaisse au centre en une espèce de cratère d'une douzaine de microns de diamètre. Au centre de ce cratère s'élève une projection en trompe, de la structure détaillée de laquelle il est fort malaisé de se rendre compte : son étude doit se faire sur matériel frais au moyen d'objectifs puissants et il est difficile de présenter l'appareil de fixation sous un angle propice à l'examen, même dans les cas les plus favorables, des jeux de lumière dus aux circonvolutions compliquées de cette trompe formée de matériaux très réfringents troublent l'observation. Après avoir examiné des centaines de parasites, trop peu à notre gré, nous nous représentons la formation qui s'élève du centre du cratère : circulaire conique à la base s'amincissant rapidement en une membrane qui délimite un espace semicirculaire ouvert vers l'arrière, au sommet cette membrane se termine par une lèvre en fer à cheval et ses deux branches se prolongent en bas et en arrière jusqu'au fond du cratère. Tout cet appareil est nettement une différenciation cuticulaire : en effet, en vue de profil (III) on voit la cuticule (*c*) se continuer sur l'appareil de fixation (*c'*) ; mais surtout, toutes les stries qui entourent le corps convergent vers la base du bourrelet, elles se prolongent sur lui mais en changeant profondément d'aspect, elles apparaissent en crêtes nettement marquées, réfringentes, séparées par des sillons profonds ; puis les crêtes se prolongent en s'infléchissant dans le cratère et se redressent pour sillonner, très serrées, les flancs de la trompe centrale. Dans l'appareil de fixation, situé sous la cuticule, on croirait parfois apercevoir une pièce spiculaire distincte rappelant celles décrites chez Intoschellina, Hoplitophrya, Maupasella, etc ; elle constituerait un squelette de soutien ; cependant les observations les plus minutieuses n'ont pu nous convaincré de l'indépendance de cette formation, l'apparence peut être due auxjeux de lumière sur les surfaces compliquées des lèvres et de la gouttière qu'elles délimitent. Cet aspect de squelette de soutien s'observe surtout quand on regarde de profil l'appareil de fixation ; sur le dessin III nous l'avons représenté (marqué d'une croix) tel qu'il se présente généralement.

Pour compléter la description de l'appareil de fixation il faut ajouter, qu'à la partie ventrale et postérieure du bourrelet il y a une légère dépression (*d*) à contour ovalaire peu distinct ; elle est ciliée, mais les stries qui la sillonnent sont plus épaisses et plus réfringentes que sur le reste du corps. Sous cette dépression, en profondeur, existe une région qui vue de profil (III, *zh*) apparaît claire, transparente, nettement limitée ; il semble que ce soit une région de plasma hyalin non granuleux. Cette formation énigmatique fait songer au rudiment d'œsophage que Cépède observe chez Intoschellina Maupasi, où d'ailleurs il décrit un tractus plus finement granuleux que l'endoplasme voisin.

L'endoplasme est granuleux, sans grosses enclaves ; parfois il paraît un peu plus compact et plus finement granuleux au niveau de l'appareil fixateur.

Le macronucleus (*m*) est simple, non ramifié ; généralement il s'étend sur toute la longueur du corps, en ligne droite ; parfois cependant il est irrégulièrement recourbé et plus ou moins amassé en l'une ou l'autre région. Nous n'avons pas pu découvrir le micronucleus.

Le système pulsatile comporte de très nombreuses vacuoles (*v*), au nombre d'une trentaine chez les grands individus, elles sont irrégulièrement réparties.

Un exposé très détaillé de la systématique des infusoires astomes a été donné en 1910 par Cépède. L'espèce étudiée ici se différencie de toutes celles qui sont connues par la complexité de l'appareil de fixation. Un systématiste à outrance trouverait sans doute bon d'en faire un genre nouveau, mais nous croyons superflu d'encombrer la littérature de genres nouveaux qui trop souvent embrouillent les synthèses ultérieures. Parmi les genres d'astomes connus c'est de Intoschellina représenté seulement par l'espèce Maupasi, Cép. que le parasite des Rhynchelmis se rapproche le plus. Comme lui, il habite le tube digestif d'un oligochète limicole, est allongé, bourgeonne, possède un long macronucleus, un appareil pulsatile à vésicules irrégulièrement disposées, ne permet pas d'observer facilement le micronucleus ; mais surtout il possède au niveau de l'appareil fixateur une région dénudée de cils. Chez l'Intoschellina Maupasi l'appareil de fixation décrit ne comporte qu'une baguette chitineuse de forme compliquée, et il y a un rudiment d'œsophage, deux particularités discutables chez l'espèce qui nous intéresse ; enfincette dernière présente une complication tout à fait spéciale de lacuticule au niveau de l'appareil de fixation. Malgré ces différences, et pour la raison donnée plus haut, nous rattachons le parasite des Rhynchelmis au genre Intoschellina et proposons pour lui le nom de Intoschellina rhynchelmis, nov. sp.

Il est donné communication de la lettre que la Commission royale des Monuments et des Sites a fait l'honneur à la Société scientifique de lui adresser, comme suite à un vœu émis par la 3e Section.

Tout en constatant avec satisfaction que trois granges du type frison existant dans la Flandre Occidentale ont été rangées dans la 3e classe des édifices civils privés, les membres de la 3e Section décident de ne répondre à la Commission royale susdite qu'après avoir examiné sur place les constructions (granges et bâtiments de fermes) de type frison bien caractéristique, qui mériteraient d'être conservées. On émet le vœu que M. le curé Claerhout veuille bien s'entendre à ce sujet avec ses collègues.

Séance du jeudi, 7 avril 1921

M. le professeur F. Kaisin présente quelques considérations sur la grande brèche V^2Cx de la légende officielle de la carte géologique.

Cette étude donne lieu à une discussion où interviennent MM. A. Renier, l'abbé G. Delépine, le Comte de Limburg-Stirum et de Lapparent.

La discussion sera continuée au cours d'une excursion qui sera organisée au mois de mai.

M. l'abbé G. Delépine fait la communication suivante :

Note sur un contact par faille entre le calcaire carbonifère et le Houiller inférieur à Hozémont.

A Hozémont, lieu situé à 5 km. au nord d'Engis, entre Huy et

Liége, le calcaire carbonifère repose directement sur le calcaire Frasnien.

Des observations faites en 1919 par plusieurs Membres participant à l'excursion de la Société géologique de Belgique à Hozémont ont permis de reconnaître que :

1. Le calcaire carbonifère n'est représenté que par une quinzaine de mètres de calcaires crinoïdiques ou compacts semblables à ceux du Viséen inférieur de la vallée de la Méhaigne, c'est-à-dire de la zone à *Productus sublaevis* et à *Daviesiella comoides*, zone C_2-S_1 dans la classification de A. Vaughan ;

2. Le contact entre ce Viséen inférieur et le Frasnien ne se ferait point par faille, mais serait le résultat d'un phénomène de transgression, déjà accusé d'ailleurs plus à l'ouest, dans la vallée de la Méhaigne.

Au-dessus de ces calcaires carbonifères du Viséen inférieur, il manque à Hozémont tout le Viséen moyen et le Viséen supérieur, c'est-à-dire les calcaires de la zone à *Productus Cora* et ceux de la zone à *Productus giganteus*. Or, le *Houiller inférieur*, représenté par des phtanites, existe à Hozémont : la carte géologique le figure, faisant suite du côté du sud au calcaire carbonifère ; et il est effectivement visible en descendant vers le vallon au N. W. de l'église d'Hozémont.

Comment se fait le contact entre les calcaires du Viséen inférieur et les phtanites du Houiller ?

Au sud du parc du château de Lexhy, où se trouve l'affleurement principal et le mieux exposé du calcaire carbonifère, ce contact a lieu *par faille*. C'est ce que permettent d'affirmer les faits que nous avons pu observer au cours d'excursions récentes. Dans le parc de Lexhy, en avril 1921, une série de trous profonds de $0^{m}60$, avaient été creusés à partir de l'allée qui longe au sud l'affleurement du calcaire carbonifère. Le premier de ces trous se trouvait au bord de l'allée, à 12 m. au pied de l'escarpement calcaire ; avec cinq autres trous, distants l'un de l'autre de 2 m. 50 à 3 m., il formait un alignement N-S. Des trois premiers trous on a extrait des *phtanites houillers*, et des trois derniers des *schistes*. Phtanites et fragménts de schistes sont encore visibles actuellement autour des pieux que l'on a plantés dans ces trous, afin d'enclore un coin de pré.

La distance entre le calcaire carbonifère et ces phtanites houillers dans le parc de Lexhy est trop minime, et le pendage du calcaire vers le S. pas assez accusé pour que le calcaire vienne plonger sous les phtanites. Le contact entre les deux formations se fait donc en ce point par faille. — Il est probable que la faille passe au pied même de l'escarpement calcaire ; c'est ce que suggèrent sa forme abrupte et les paquets affaissés qu'on observe à son extrémité ouest.

Dans un travail récent, intitulé : *Sur la géologie de Horion-Hozémont* (¹), M. Fourmarier, s'appuyant sur des observations relevées par lui à l'W. du point dont nous venons de parler, admet qu'à Hozémont le Houiller inférieur est superposé directement au calcaire carbonifère ; il en déduit qu'à Hozémont la mer est revenue à l'époque du Houiller inférieur recouvrir en transgression le calcaire carbonifère après une période d'émersion et de ravinement. Le contact par faille qui existe au Sud du parc de Lexhy entre le terrain houiller et le calcaire carbonifère remet en question cette manière de voir. — D'ailleurs, si entre les deux affleurements de phtanites visibles au N. W. de l'église de Hozémont, le long de la route conduisant à Horion, on menait une coupe *en ligne droite,* il n'est pas absolument certain que cette coupe *rectiligne* rencontrerait le calcaire carbonifère comme le porte à croire le croquis tracé par M. Fourmarier (²). Car l'affleurement calcaire du ravin dont il fait état, est extrêmement réduit et il cesse d'être visible un peu à l'Est de la ligne droite joignant les deux affleurements de phtanites houillers : dans une région aussi complexe et disloquée que celle d'Hozémont, ce détail prend une importance qu'il n'aurait pas dans un endroit où les superpositions seraient normales, et c'est pourquoi nous nous permettons de le relever.

(¹) Ann. Soc. géol. de Belgique, XLIII, B. 121 ; 30 nov. 1920.

(²) *Loc. cit.* p. 126.

M. Ed. De Jonghe entretient la Section des institutions familiales au Congo belge.

M. le Comte de Limburg-Stirum examine la question de la provenance de cailloux tourmalinifères du poudingue de la base du gedinnien.

Il est donné lecture d'un travail de M. l'abbé J. J. Kieffer (Bitche), *Synopse de la tribu des Chironomariae (Diptères)*.

1. Aile à surface glabre, tibia antérieur sans peigne, articles basaux des forcipules ayant généralement deux appendices (Groupe **Chironomus**) — 2.

— Aile poilue, au moins à l'extrémité ; articles basaux généralement à trois ou quatre appendices (Groupe **Tanytarsus**) — 48.

2. Palpes formés par un article, antennes du ♂ de dix articles ; empodium et pulvilles longs . . . . . . G. *Baeotendipes* K. *

— Palpes de trois articles courts ; antennes du ♂ de douze articles — 3.

— Palpes de quatre articles — 4.

3. Peignes des quatre tibias postérieurs formés de spinules libres jusqu'à leur base . . . . G. *Halliella* K. *

— Peignes formés de spinules libres seulement à leur extrémité. G. *Tripelma* K. *

4. Peignes formés de spinules libres jusqu'à leur base — 5.

— Peignes formés de spinules libres seulement à leur extrémité — 6.

5. Pulvilles et empodium subnuls ; articles basaux des forcipules à trois appendices . . . . G. *Knepperia* K. *

— Pulvilles et empodium longs et subfiliformes ; articles basaux des forcipules à deux appendices . . . . . G. *Dolichopelma* K.

6. Peignes des quatre tibias postérieurs dépourvus d'éperon — 7.

— Les quatre tibias postérieurs avec un éperon au petit peigne, grand peigne inerme — 8.

---

* L'astérisque indique les genres n'ayant que des représentants exotiques.

— Les quatre tibias postérieurs avec deux éperons, un à chaque peigne — 23.

7. Tibia antérieur avec un éperon ; yeux rapprochés ; 14ᵉ article des antennes du ♂ pas deux fois aussi long que le 13ᵉ, 3-13 graduellement raccourcis. . . . . G. *Nilothauma* K. *

— Tibia antérieur sans éperon, à écaille arrondie ; yeux séparés de leur demi-longueur . . . . G. *Nilomyia* K. *

8. Antennes du ♂ sans panache, 14ᵉ article pas deux fois aussi long que le 13ᵉ, celles de la ♀ de sept articles, 3-6 à long col ; yeux séparés au moins de leur longueur ; tibia antérieur à long éperon ; aile brun noir, avec des taches blanches . G. *Kribiothauma* K. *

— Antennes du ♂ avec panache, 14ᵉ ou 12ᵉ article au moins aussi long que 2-11 ou 2-13 réunis, sauf chez **Kribioxenus** ; antennes de la ♀ à cinq ou six articles, rarement à sept, et alors sans col — 9.

9. Pulvilles à deux, parfois atrophiés — 10.

— Pulvilles à quatre, aussi longs et aussi minces que l'empodium ; antennes du ♂ de quatorze articles — 47.

10. Tibia antérieur plus long que le métatarse ; articles basaux des forcipules à trois appendices ; antennes du ♂ de quatorze articles, à panache court et appliqué . . G. *Allochironomus* K.

— Tibia antérieur plus court que le métatarse — 11.

11. Éperon des quatre tibias postérieurs pâle et très long, au moins 3 fois aussi long que le peigne, tibia antérieur avec éperon ; antennes de quatorze articles (♂) ou de cinq (♀) . . . . G. *Kribiodosis* K. *

— Éperon des quatre tibias postérieurs noir et moins long — 12.

12. Aile sans lobe et sans transversale, comme chez **Tanytarsus**. . . . . G. *Lauterborniella* Bause.

— Aile avec une transversale oblique, comme chez **Chironomus** — 13.

13. Antennes du ♂ de douze articles ; ♀ inconnue. . . . . G. *Kribiocryptus* K. *

— Antennes du ♂ de quatorze articles ou ♂ inconnu — 14.

14. Antennes de la ♀ à sept articles sans col ; pulvilles rameux ; ♂ inconnu . . . . G. *Kribiodorum* K. *

— Antennes de la ♀ de six articles — 17.

15. Tibia antérieur avec une large écaille, terminée par un

éperon ; pulvilles minces, à peine plus courts que l'empodium ; aile non tachetée ; articles 2-4 des antennes de la ♀ à long col. . . . . G. *Tripedilum* K. *

— Tibia antérieur à large écaille, terminée par un éperon long et arqué ; aile tachetée . . . . G. *Kribiocosmus* K. *

— Tibia antérieur à éperon simple ou à écaille arrondie au bout ou graduellement amincie en pointe — 16.

16. Pulvilles atteignant le milieu des crochets ; tibia antérieur à écaille arrondie ; patte antérieure très longue, très grêle, de moitié plus longue que le corps ; aile tachetée . . . . G. *Kribiomimus* K. *

— Pulvilles atrophiés ou très courts, pattes autrement conformées — 17.

— Pulvilles longs, rameux médialement — 20.

17. Aile sans tache — 18.

— Aile tachetée ; tibia antérieur à écaille arrondie — 19.

18. Empodium aussi long que les crochets ; tibia antérieur à éperon ; 14ᵉ article de l'antenne du ♂ bien plus court que 2-13 réunis . . . . G. *Kribioxenus* K. *

— Empodium atteignant le milieu des crochets ; 14ᵉ article de l'antenne du ♂ plus long que 2-13 réunis ; appendices inférieurs des forcipules bilobés . . . . G. *Prochironomus* K.

19. Articles basaux des forcipules très longs, plus longs que les terminaux, non dépassés par leurs appendices inférieurs ; antennes de la ♀ à articles 2-4 avec col ; pulvilles courts et minces . . . . G. *Stictochironomus* K.

— Articles basaux des forcipules plus courts que les terminaux ; pulvilles atrophiés ; articles 2-4 des antennes de la ♀ sans col . . . . G. *Kribiocharis* K. *

20. Articles basaux des forcipules à trois appendices ; tibia antérieur à écaille triangulaire. . . . G. *Kribionympha* K. *

— Articles basaux des forcipules avec deux appendices — 21.

21. Tibia antérieur à éperon spiniforme ; aile tachetée . . . . G. *Zavreliella* K.

— Tibia antérieur à écaille pointue ; aile non tachetée . . . . G. *Microtendipes* K.

— Tibia antérieur à écaille large et arrondie — 22.

22. Aile tachetée ; corps trapu . . . . G. *Kribiocallis* K. *

— Aile sans tache . . . . G. *Kribiomyia* K. *

23. Bouche à peine proéminente ; palpes courts, le 4^e^ article pas plus long que le 2^e^ ; antenne du ♂ de douze articles . . . . G. *Nilodorum* K. *

— Bouche bien proéminente, ayant au moins le 1/3 de la hauteur de la tête ; palpes longs, 4^e^ article le plus long — 24.

24. Peignes remplacés par deux appendices crénelés, ovalaires ou triangulaires, terminés par un éperon ; tibia antérieur à long éperon ; antennes de quatorze articles (♂) ou de six (♀) — 25.

— Peignes de forme ordinaire — 26.

25. Métatarse antérieur plus court que le tibia ; articles basaux des forcipules à trois appendices ; yeux séparés de leur longueur. (Type : **P. ploenensis** n. sp. ; jaune pâle, quatre bandes du mesonotum raccourcies, metanotum et mesosternum noirs (♂) ou vitellins (♀) ; pattes blanches. L. 6-6,5 mm. Lac de Plön) . . . . G. *Proriethia* n. g.

— Métatarse antérieur plus long que le tibia ; articles basaux des forcipules à deux appendices . . . . . . G. *Riethia* K. *

26. Pulvilles atrophiés ou nuls ; tibia antérieur à éperon ; flagellum de la ♀ à articles sans col ; yeux rapprochés — 27.

— Pulvilles grands, atteignant au moins le milieu des crochets — 28.

27. Aile tachetée. . . . . G. *Kribiodoxa* K. *

— Aile non tachetée. . . . . G. *Paratendipes* K.

28. Tergites 2-5 avec une impression en raquette au bord antérieur ; antenne du ♂ à douze articles . . G. *Glyptotendipes* K.

— Tergites 2-5 sans impression en forme de raquette — 29.

29. Yeux séparés de leur longueur au vertex . . . . G. *Microchironomus* K.

— Yeux rapprochés au vertex — ♂ : 30, ♀ : 41.

30. Antennes de six articles ; forcipules à lamelle trilobée, appendices des articles basaux atrophiés ; tibia antérieur à écaille arrondie . . . . G. *Gillotia* K. *

— Antennes de quatorze articles ; pulvilles rameux ; écaille du tibia antérieur, avec un éperon, lamelle non trilobée, appendices développés — 31.

— Antennes de treize articles ; panache à poils courts, denses et appliqués. . . . . G. *Clinochironomus* K.

— Antennes de douze articles — 32.

31. Appendices inférieurs des forcipules longs et larges, à poils dorsaux longs et arqués ; aile sans tache. G. *Endochironomus* K.

— Appendices amincis en lanière, courbés fortement par en bas, longs, avec quelques gros poils à l'extrémité qui est parfois en massue ; aile tachetée . . . . G. *Stenochironomus* K.

32. Lamelle des forcipules trilobée — 33.

— Lamelle des forcipules non trilobée, articles terminaux sans lobe — 34.

33. Articles terminaux des forcipules droits, courts, leur base proéminente en lobe au côté médian ; appendices nuls . . . . G. *Harnischia* K.

— Articles terminaux sans lobe, longs, arqués ; appendices inférieurs en lanière et atteignant l'extrémité des articles terminaux . . . . G. *Camptochironomus* K.

34. Appendices inférieurs des forcipules amincis en lanière, parfois lobés — 35.

— Appendices inférieurs non en lanière, ni lobés à l'extrémité — 36.

35. Pulvilles larges, rameux médialement ; articles terminaux des forcipules longs, grèles, avec une rangée de courtes soies à la partie distale du côté médian. . . . G. *Limnochironomus* K.

— Pulvilles minces, non rameux ; articles terminaux des forcipules robustes et sans rangée médiane de soies . . . . G. *Dicrotendipes* K.

36. Articles terminaux des forcipules courts, larges, obovalaires, avec une dent triangulaire médiane à leur extrémité ; pulvilles rameux . . . . G. *Carteria* K. *

— Articles terminaux sans dent et autrement conformés — 37.

37. Articles terminaux des forcipules avec une rangée de longues soies rigides, située au côté médian et distal ; appendices inférieurs dépassant les articles basaux ; tibia antérieur à écaille obtuse . . . . G. *Chironomus* Mg.

— Articles terminaux sans rangée distale de soies rigides — 38.

38. Lamelle des forcipules à extrémité rétrécie, tronquée et presque carrée ; écaille du tibia antérieur triangulaire, pointue. . . . . G. *Xenochironomus* K.

— Lamelle à extrémité amincie en une fine et longue pointe, écaille du tibia antérieur obtuse — 39.

39. Appendices inférieurs des forcipules larges, dépassant les articles basaux, à poils dorsaux longs et arqués . . . . G. *Phytochironomus* K.

Appendices inférieurs nuls ou très courts et sans poils dorsaux longs et arqués — 40.

40. Pulvilles rameux . . . . G. *Cladopelma* K.

— Pulvilles réticulés . . . . G. *Crytochironomus* K.

41. Article terminal des antennes avec un verticille de poils. . . . . G. *Kribiobius* K. *

— Article terminal des antennes sans verticille à leur base — 42.

42. Tibia antérieur à écaille terminée par un éperon — 43.

— Tibia antérieur à écaille simple, sans éperon — 44.

43. Aile tachetée ; pulvilles rameux médialement . . . . G. *Stenochironomus* K.

— Aile sans tache . . . . G. *Endochironomus* K.

44. Articles du flagellum sans col — 45.

Articles du flagellum avec un col allongé — 46.

45. Pulvilles rameux médialement . . . . G. *Cladopelma* K. et G. *Limnochironomus* K.

— Pulvilles réticulés. . . . . . . G. *Cryptochironomus* K.

46. Aile tachetée . . . . G. *Calochironomus* K. *

— Aile sans tache . . . . G. *Chironomus* Meig.

47. Yeux distants de leur longueur au vertex. G. *Kribiotima* K.*

— Yeux rapprochés. . . . . G. *Polypedilum* K.

48. Pulvilles à quatre, longs et filiformes; ailes non lobées — 49.

— Pulvilles à deux ou nuls — 50.

49. Aile à transversale oblique comme chez **Chironomus** ; articles basaux des forcipules à deux appendices. G. *Pentapedilum* K.

Aile sans transversale formée ; articles basaux à trois appendices . . . . G. *Pentapelma* K.

50. Yeux pubescents ; antennes de onze (♂) ou cinq (♀) articles . . . . G. *Zavrelia* K.

— Yeux glabres — 51.

51. Tibia antérieur avec un peigne . . . G. *Goetghebueria* K.

— Tibia antérieur sans peigne — 52.

52. Cubitale longuement dépassée par la costale, transversale de **Chironomus**, base alaire lobée à angle droit ; pulvilles grands. . . . . G. *Phaenopsectra* (**connectens** K.)

Cubitale non dépassée par la costale — 53.

53. Nervure transversale oblique, comme chez **Chironomus** — 54.

— Transversale non formée — 58.

54. Yeux distants au vertex de toute leur longueur ; articles terminaux des forcipules subitement très amincis au bout, sauf chez **Clinotanytarsus** — 55.

— Yeux rapprochés ; articles terminaux non subitement amincis au bout — 56.

55. Articles basaux des forcipules avec quatre appendices, forcipules très grandes, quatre tibias postérieurs à deux éperons . . . . G. *Ortroyia* K.

— Articles basaux avec trois appendices, forcipules de forme ordinaire. . . . . . . G. *Rheotanytarsus* K. (**rivulorum** K.)

— Articles basaux avec deux appendices ; articles terminaux des forcipules non fortement amincis au bout . . . . G. *Clinotanytarsus* K. (**virens, pentaplastus** K.)

56. Éperon des quatre tibias postérieurs jaune et quatre fois aussi long que le peigne ; articles basaux des forcipules à deux appendices ; tibia antérieur à éperon. . . . . . G. *Rosenia* K.

— Éperons noirs et peu longs — 57.

57. Pulvilles grands et larges, tibias postérieurs à deux éperons ; articles basaux à deux appendices ; tibia antérieur à écaille portant un éperon . . . . . . G. *Phaenopsectra* (**leucolabis** K.)

— Pulvilles nuls ou très courts ; articles basaux à trois appendices ; antenne de treize articles (♂) ou de six (♀), articles 3-5 de la ♀ à long col . . . . G. *Allotanytarsus* K.

58. Antennes de douze articles (♂) ou de six (♀), 3-5 en ellipse. . . . . G. *Orthoscottia* K. *

— Antennes du ♂ de quatorze, rarement de cinq articles, celles de la ♀ de cinq ou six — 59.

59. Peignes des quatre tibias postérieurs sans éperon — 60.

— Tibias postérieurs avec un éperon, un peigne inerme — 63.

— Tibias postérieurs avec deux éperons, chaque peigne avec éperon — 65.

60. Les deux peignes confluents, occupant les 3/4 du pourtour, pulvilles courts ; yeux séparés de leur demi-longueur . . . . G. *Micropsectra* K.

— Les deux peignes séparés et n'occupant pas les 3/4 du pourtour — 61.

61. Métatarse antérieur égalant le tibia ; yeux rapprochés ; pulvilles médiocres ; articles basaux à quatre appendices ; poils de la brosse claviformes . . . . G. *Lauterbornia* K.

— Métatarse antérieur bien plus long que le tibia — 62.

62. Pulvilles longs, peu larges ; yeux rapprochés (♂) ou séparés de 2 fois leur longueur (♀), antenne de la ♀ à cinq articles . . . . G. *Phænopelma* K.

— Pulvilles presque nuls ; yeux séparés de leur demi-longueur ; articles basaux à trois appendices, brosse à poils simples . . . . G. *Tritanytarsus* K.

63. Peignes confluents, occupant les 3/4 du pourtour ; pulvilles courts — 64.

— Peignes bien séparés ; yeux distants de deux fois leur longueur . . . . G. *Stempellina* Bause

64. Yeux rapprochés en haut ; antennes de la ♀ à six articles, dont 3-5 fusiformes ; brosse à poils simples ; front bilobé . . . . G. *Monotanytarsus* K.

— Yeux séparés de leur demi-longueur au maximum ; front sans lobe ; antennes de la ♀ à six articles, dont 3-5 fusiformes ; brosse à poils lancéolés . . . . G. *Lundstrœmia* K.

— Yeux séparés de leur longueur ; articles 3-5 de la ♀ à long col . . . . G. *Stylotanytarsus* K.

65. Antennes à cinq articles (♀ ♂) ; yeux séparés de leur longueur. . . . . G. *Protanytarsus* K.

— Antennes du ♂ à quatorze articles, celles de la ♀ à six, rarement à cinq — 66.

66. Pulvilles et empodium grands ; yeux séparés de leur longueur . . . . G. *Calopsectra* K.

— Pulvilles et empodium très petits ou nuls — 67.

67. Peignes confluents, occupant les 3/4 du pourtour ; yeux séparés de leur demi-longueur ; articles 3-5 des antennes de la ♀ fusiformes . . . . G. *Ditanytarus* K.

68. Articles terminaux des forcipules subitement très amincis au bout ; tibia intermédiaire à un éperon ; yeux rapprochés ; antennes de la ♀ à articles 3-5 à long col . G. *Rheotanytarsus* B.
(pentapoda K. **lapidicola** K. et **raptorius)** K.

— Articles terminaux non fortement amincis au bout — 69.

69. Yeux rapprochés, au maximum distants de leur demi-longueur . . . . G. *Paratanytarsus* Bause.

— Yeux séparés de leur longueur ; forcipules à 3-4 appendices ; brosse à poils simples — 70.

— Yeux séparés de deux fois leur longueur ; forcipules à quatre appendices ; brosse rameuse . . . . G. *Cladotanytarsus* K.

70. Pince très grande, articles terminaux graduellement élargis jusqu'au bout, où ils sont tronqués ; tibia antérieur à écaille obtuse . . . . G. *Xenotanytarsus* K.

— Pince ordinaire, non élargie ni tronquée au bout ; tibia antérieur à éperon . . . . G. *Tanytarsus* V. d. W.

Dans une note préliminaire, M. É. De Wildeman fait remarquer que l'étude des *Ficus* est loin d'être achevée.

Un essai de révision des *Ficus* africains a été tenté en Allemagne par MM. Mildbraed et Burret, puis en Angleterre par M. Hutchinson. Antérieurement à ces deux travaux les *Ficus* du Congo avaient été étudiés par le prof. Warburg et nous avions, dans divers périodiques, fait paraître des diagnoses d'espèces de ce genre.

Les conclusions auxquelles nous sommes arrivé ne cadrent pas toujours avec celles des auteurs anglais et allemands, qui d'ailleurs sont loin d'être toujours d'accord.

MM. Mildbraed et Burret, Hutchinson, les premiers surtout, marquent la tendance à la fusion d'espèces créées par Warburg, nous et des auteurs plus anciens. Nous sommes loin d'être partisan de cette méthode ; il est, estimons-nous, dangereux de réunir sous un seul vocable des plantes de régions très différentes, connues fréquemment par un seul échantillon d'herbier, sur lequel on ne peut juger de la variation des caractères spécifiques.

Nous estimons de beaucoup préférable de créer des espèces, faciles à fusionner plus tard, que de se voir obligé, dans l'avenir, de subdiviser des espèces et d'employer le terme néfaste « pro parte ».

On ne peut assez rappeler combien il est peu scientifique d'affirmer, dans le stade de début de nos connaissances, que certaines plantes d'origines variées, présentant des caractères différents, sont des variations d'un seul et même type. L'étude de nombreux documents, faite par un spécialiste qui aura l'occasion de comparer tous les spécimens, pourra seule définir l'amplitude des variations d'un type.

Nous en sommes encore pour l'Afrique, malgré la FLORA OF TROPICAL AFRICA et certaines monographies, au stade d'analyse ; il se passera bien des années, peut-être des siècles, avant que se fasse une synthèse. Et encore celle-ci ne sera jamais une œuvre impeccable !

Nous diagnostiquerons ci-dessous des espèces provenant des récoltes du Dr J. Bequaert ; certaines seront, peut-être, ultérieurement à comprendre dans le cycle de développement d'espèces plus anciennes, dont il faudra par suite modifier les diagnoses.

Il serait à désirer qu'une étude détaillée des *Ficus* congolais pût être faite ; cette étude entreprise par zones botaniques donnerait des résultats, pensons-nous, et permettrait de créer dans des types linnéens, des races géographiques très bien délimitées.

Ficus acuta *De Wild.* sp. nov.

Ramis adultis cylindricis, glabris ; stipulis caducis, foliis petiolatis, petiolo 15-45 mm. longo, glabro ; lamina obovata vel elliptica, apice abrupte et acute acuminata, acumine 7-15 mm. longo, basi cuneato-rotundata, supra et infra glabra, 7,5-16,5 cm. longa et 2,2-6,5 cm. lata, nervis lateralibus I utrinque circ. 12 ; receptaculis e ligno vetere nascentibus, 1 cm. pedicellatis, subglobulosis vel ellipsoideis, breviter stipitatis, 20-25 mm. longis et 15-18 mm. latis ; ostiolo circ. 1 mm. prominente, rima circ. 1 mm. longa.

Mukule, 18 décembre 1914 (J. Bequaert, n° 6313. — Steppe à *Acanthus)*.

Obs. — Espèce voisine de *F. artocarpoides* Warb. (cf. *Hutchins.* FL. TROP. AFR. VI, 2 p. 132), caractérisée par ses feuilles à acumen très aigu.

Ficus beniensis *De Wild.* n. sp.

Arbor tortuosa ; ramis subcylindricis, cortice griseo-argenteo, demum brunneo ; stipulis 6-13 mm. longis, dorso velutinis, demum glabris ; foliis petiolatis, petiolo 11-50 mm. longo, lamina ovata, apice cuneata, basi cordata, supra et infra glabra, 6-15 cm.

longa et 3,5-10 cm. lata, margine integra, basi 5-nervia, nervis lateralibus I utrinque circ. 5 ; inflorescentiis paniculatis e ligno vetere nascentibus, receptaculis solitaribus vel geminatis, subglobulosis vel ellipsoideis, stipitatis, 15-35 mm. longis et 11-28 mm. latis, pedicellatis, pedicello 6-10 mm. longo, ostiolo circ. 3 mm. lato, bracteis apicalibus erectis, bracteis basilaribus 3, divergentibus, circ. 2 mm. longis.

Beni, 31 juillet 1914 (J. Bequaert, n° 5144. — Savane rocheuse; arbre tortueux à fruits en grappes sur le tronc).

Obs. — Espèce affine du *F. capensis* Thunb. (cf. Hutch. in FL. TROP. AFR. VI, 2 p. 101), différant par les feuilles à bords entiers, nettement cordées à la base, à sinus atteignant 1 cm. de profondeur.

Ficus brevipedicellata *De Wild.* n. sp.

Epiphytica, ramis subcylindricis, cortice griseo-striato ; stipulis glabris vel breviter velutinis, caducis ; foliis petiolatis, petiolo glabro 4-8 mm. longo ; lamina elliptica vel obovata, apice plus minus obtuse acuminata, basi cuneata, supra et infra glabra, 4,5-8 cm. longa et 2-4,5 cm. lata ; nervis lateralibus I utrinque 7-8, arcuatim anastomosantibus, receptaculis vulgo geminatis, circ. 7-12 mm. longis et 6-12 mm. latis, glabris, pedicellatis, pedicello 2-4 mm. longo, ostiolo prominente, rima infra 1 mm. longa ; bracteis basilaribus caducis subcupulatis, cupula subobliqua.

Léopoldville, 15 avril 1915 (J. Bequaert, n° 7346. — Galerie forestière ; épiphyte).

Obs. — Espèce voisine du *F. excentrica* Warb. (sec. *Hutch.* in FL. TROP. AFR. VI, 2 p. 209), auquel M. Hutchinson rapporte les n^{os} 154 et 2428 de la Collection Zenker ; ce dernier était rapporté dans l'*Herbier du Congo,* par le prof. Warburg, au *F. triangularis* sous le nom de *F. triangularis* var. *rhomboidalis* Warb.

La plante de Léopoldville se fait remarquer par les courts pédicelles des réceptacles.

F. butaguensis *De Wild.* n. sp.

Arbor ; ramis juvenilis breviter velutinis, demum glabris ; stipulis caducis circ. 6 mm. longis; foliis petiolatis, petiolo 12-23 mm. longo, breviter piloso, lamina obovata vel elliptica, apice rotundata vel obtuse cuneata, basi late cuneata, rotundata, vel subcordata, vel subinaequilateralia, supra et infra glabra sed nervo mediano infra piloso, 5-9 cm. longa et 2,5-4 cm. lata, nervis lateralibus I utrinque ultra 10; receptaculis axillaribus, sessilibus, globulosis vel ellipsoideo-depressis, 10 mm. circ. longis et 10-12 mm. latis, breviter et sparse pilosis, ostiolo circulari glabro, circ. 3 mm. lato, rima circ. 2 mm. longa.

Ruwenzori (Butagu), 21 avril 1914 (J. Bequaert, nº 3856). — Arbre de env. 10 m. de hauteur, vers 2300 m.).

Obs. — Cette plante se rapproche du *F. sessilis* De Wild. (cf. *Hutch.* in FL. TROP. AFR. VI, 2 p. 185) ; ses fruits sont à pubescence éparse, à poils courts raides, à ostiole glabre.

Ficus coriacea *De Wild.* nov. sp.

Ramis adultis longitudinaliter striatis, glabris ; stipulis lanceolatis usque 15 mm. longis, glabris, subpersistentibus ; foliis petiolatis, petiolo 30-60 mm. longo, lamina apice rodundata et acuminata, acumine 10-15 mm. longo, basi cuneata, glabra, 20-26 cm. longa et 6,5-10 cm. lata, nervis lateralibus I utrinque circ. 6-7, nervis secundariis reticulatis, breviter prominentibus ; receptaculis solitariis axillaribus, subsessilibus, basi 4-6 mm. stipitatis, 13-16 mm. longis et 14-18 mm. latis, glabris, bracteis basilaribus 2, connato-cupulatis, ostiolo infra 1 mm. prominente, rima circ. 1 mm. longa.

Avakubi, 8 janvier 1914 (J. Bequaert, nº 1837. — Forêt).

Obs. — Cette espèce se classe dans le voisinage du *F. densestipulata* De Wild. (cf. *Hutch.* in FL. TROP. AFR. VI, 2 p. 151) ; ses feuilles nettement cunéiformes à la base lui communiquent un aspect caractéristique.

Ficus Dewevreoides *De Wild.* n. sp.

Ramis cylindricis, cortice griseo, glabro ; stipulis usque 3 cm. longis, caducis ; foliis petiolatis, petiolo 20-80 mm. longo, glabro, lamina ovato-elliptica, abrupte, longe et subacute acuminata, basi rodundata vel subcordata, supra et infra glabra, 12-20 cm. longa et 4,5-8 cm. lata, basi 3-nervia, nervis lateralibus I utrinque circ. 10 ; receptaculis solitariis, globulosis vel breviter obovoideis, 13-15 mm. longis et 12-14 mm. latis, glabris vel leviter pilosis.

Avakubi, 7 janvier 1914 (J. Bequaert, nº 1820. — Forêt petit arbre).

Obs. — Espèce voisine des *F. Dewevrei* Warb. et *viridi-maculata* De Wild. que M. Hutchison (in Fl. trop. Afr. VI, 2 p. 140) considère comme identiques ; les feuilles du *F. Dewevreoides* sont beaucoup plus développées.

Ficus ituriensis *De Wild.* nov. sp.

Arbor ; ramis subcylindricis, cortice pelliculato-exfoliato, stipulis glabris, 5-10 mm. longis, caducis ; foliis petiolatis, petiolo 2-5 cm. longo, glabro, lamina elliptica, apice plus minus abrupte acuminata, basi cuneata, margine repande dentata, supra et infra glabra, 9-15 cm. longa et 3,2-6,8 cm. lata, nervis lateralibus I utrinque 5-7 ; paniculis e ligno vetere nascentibus, receptaculis solitariis vel vulgo geminatis, subglobulosis vel ellipsoideis 10-12 m. longis et 8-11 mm. latis, basi rotundatis vel breviter stipitatis, pedicellatis, pedicello glabro 8-12 mm. longo, ostiolo circulari circ. 2 mm. lato, bracteis apicalis prominentibus, bracteis basilaribus 3 divergentibus vel subcupulatis.

Penghe, 29 janvier (J. Bequaert, nº 2184. — Forêt aux bords de l'Iturin fruits en grappes sur le tronc).

Obs. — Espèce indiscutablement voisine du *F. capensis* Thunb. (cf. *Hutch.* in Fl. trop. Afr. VI, 2 p. 101), se distinguant par ses feuilles proportionnellement plus allongées et ses réceptacles plus petits, ceux du *F. capensis* mesurant 18-25 mm. de long. Elle se rapproche du *F. ostiolata* De Wild. que M. Hutchinson rapporte au *F. capensis*, mais, chez le *F. ostiolata*, les feuilles sont entières sur les bords.

Si l'on réunit toutes ces formes sous un seul nom spécifique, il faudra arriver à subdiviser cette vaste espèce en nombreuses sous-espèces, variétés ou formes, basées sur feuilles entières ou dentées, arrondies, cunéiformes ou cordées à la base.

Rien ne nous prouve que ces divers caractères ne sont pas constants.

Ficus ovato-cordata *De Wild.* n. sp.

Arbor ; ramis subcylindricis, cortice griseo, glabro ; stipulis glabris usque 8 mm. longis, caducis ; foliis petiolatis, petiolo 10-35 mm. longo, glabro, lamina ovata, apice acuminata, subacuta, basi cordata, supra et infra glabra, 3,5-11,5 cm. longa et 1,7-5,7 cm. lata ; nervis lateralibus I utrinque circ. 9, arcuatim anastomosantibus ; receptaculis sessilibus, solitariis vel geminatis, globulosis vel ellipsoideo-depressis, circ. 7-10 mm. longis et latis, glabris, ostiolo bracteato, bracteis erectis infra 1 mm. longis ; bracteis basilaribus 3, ovatis, extus velutinis, plus minus caducis, subcupulatis.

Angi, 2 septembre 1914 (J. Bequaert, n° 5821 — Plaine de lave ; petit arbre).

Obs. — Affine du *F. cordata* Thunb. (cf. *Hutch.* in Fl. Trop. Afr. VI, 2 p. 119) rencontré jusqu'à ce jour, dans le domaine de la flore tropicale, uniquement dans le Damaraland par Dinter.

La plante du Congo (Nord-Est), diffère très fortement d'aspect de celle du Damaraland ; chez cette dernière les stipules sont velues et les feuilles paraissent moins développées et moins acuminées.

Ficus ruwenzoriensis *De Wild.* n. sp.

Epiphytica ; ramis juvenilis sparse pilosis, demum glabris ; stipulis circ. 5 mm. longis sed dorso sparse velutinis ; foliis petiolatis, petiolo 5-6 mm. longo, glabro, lamina obovata, apice obtuse-truncata, basi rotundato-cuneata, supra et infra glabra, 4-9 cm. longa et 2-3 cm. lata, nervo mediano apice bifurcato, nervis lateralibus I utrinque circ. 6 ; receptaculis basi bracteatis, bracteis caducis extus velutinis, axillaribus, solitariis vel geminatis, sessilibus, globulosis, 6-7 mm. longis et latis, glabris vel breviter et sparse pilosis, ostiolo prominente levi circ. 2-3 mm. lato, rima circ. 1 mm. longa.

Ruwenzori (Lanuri), 2 juin 1914 (J. Bequaert, n° 4653. — Épiphyte, étrangleur ; vers 1700-1800 m.).

Obs. — Cette espèce se rapproche des *F. luteola* De Wild. et *F. craterostoma* Warb. (cf. *Hutch.* in Fl. Trop. Afr. VI, 2 p. 159) ; elle se caractérise par ses fruits, plus petits que ceux du *F. craterostoma*, mais à ostiole nettement proéminent.

Ficus variabilis *De Wild.* nov. sp.

Arborescens ; ramis juvenilis breviter pilosis, demum glabris ; stipulis circ. 6 mm. longis ; foliis petiolatis, petiolo 8-20 mm. longo, glabro, lamina obovata, basi cuneata, supra et infra glabra, 5-11 cm. longa et 2-3,5 cm. lata, nervis lateralibus utrinque circ. 10 ; receptaculis axillaribus, solitariis vel geminatis, glabris, basi subconicis, 10-13 mm. longis et 10-12 mm. latis, breviter pedicellatis, pedicello 2-3 mm. longo, breviter velutino, rima circ. 1 mm. longa.

— — f. **subacuminata** *De Wild.*

Foliis ellipticis apice contractis, acuminatis, acumine brevi obtuso.

Irumu, 9 mars 1914 (J. Bequaert, n° 2847. — Galerie forestière dans la savane).

— — f. **obtusifolia** *De Wild.*

Foliis apice rotundato-obtusis, non acuminatis.

Ruwenzori (Butagu), 26 avril 1914 (J. Bequaert, n° 3947. — Petit arbre vers 1800 m.).

Obs. — Cette espèce dans laquelle nous admettons 2 formes, d'aspect différent par les feuilles, se classe dans le voisinage des *F. Gurichiana* Engl. et *F. Dekdekena* A. Rich. Nous ne sommes pas d'accord avec M. Hutchinson (in FL. TROP. AFR. VI, 2 p. 211) pour considérer le *F. Bequaerti* De Wild. comme synonyme du *F. Dekdekena* de l'Abyssinie.

Quatrième Section

La Section s'est réunie le mercredi, 6 avril, à l'issue de l'Assemblée générale, sous la présidence de M. le D^r Goris.

M. le D^r Fouarge (Bruxelles) présente le travail suivant sur « *La stase intestinale étudiée à la lumière des dernières acquisitions de la physiologie* » :

La stase intestinale chronique consiste en retard dans le transit intestinal.

Son étude est donc essentiellement basée sur les conditions mécaniques qui régissent la circulation des matières dans le tractus digestif. La physiologie intestinale, jusqu'à tout récemment, s'étayait uniquement sur les données que lui fournissaient l'analyse des matières, la perfusion « in vitro » des anses intestinales et la connaissance de l'innervation viscérale. Or, elle a trouvé dans l'exploration radiologique une source très abondante de renseignements qui complètent heureusement les données anciennes.

Nous voudrions montrer comment les acquisitions nouvelles de la radiologie éclairent la pathogénie de la stase intestinale chronique, précisent sa symptomatologie et, partant, permettent d'introduire de la logique dans son traitement.

D'abord, comme nous ne parlons pas de la stase gastrique ou duodénale qui doivent être étudiées à part, ni de la stase iléale qui n'existe pour ainsi dire pas, sinon à l'extrémité distale de l'iléon et associée à la stase cæcale, nous devons rechercher *quels sont les mouvements physiologiques du côlon.*

1° Il y a dans le còlon des mouvements de pétrissage, chargés de diviser les matières et de faire pénétrer dans l'intimité de leur masse les sucs digestifs. Au niveau des portions pourvues d'un long méso, on voit des mouvements de va-et-vient ou de torsion de toute une anse. Cela est dû, pour Bensaude, à la contraction de la musculature lisse du mésocòlon ; pour Rieder, à la contraction de la musculature longitudinale du côlon. Ce sont les mouvements pendulaires.

2° Il y a des contractions rythmiques de la couche circulaire, segmentant l'intestin et son contenu et se répétant à intervalles réguliers (Cannon).

Ces deux espèces de mouvements ne servent pas à la pression.

3° Il y a des mouvements péristaltiques ou vermiculaires se faisant de deux façons : une première, contraction lente de la musculaire parcourant un segment restreint de l'intestin ; une seconde, véritable onde péristaltique puissante et très rapide pouvant parcourir l'intestin tout entier.

Le point de départ de ces ondes est toujours le même : c'est un endroit marqué par un fort anneau de contraction donnant point d'appui à la péristaltique. A cet endroit la couche circulaire est très épaissie. Barclay a appelé ces anneaux des « cœurs intestinaux » par analogie avec les ganglions autonomes point de départ des ondes de contraction du cœur. Ces cœurs intestinaux siègent au pylore, à la valvule de Bauhin, à l'union du cæcum et du côlon ascendant, à l'union du tiers droit et des deux tiers gauches du transverse, à la fin du sigmoïde.

4° Il y a des mouvements antipéristaltiques ayant leur point de départ dans l'anneau musculaire du transverse et refoulant les matières dans le cæcum et même dans la fin de l'iléon.

Ce dernier fait vient à l'appui de l'observation faite par les chirurgiens sur le vivant : la valvule de Bauhin n'est pas une véritable valvule, c'est un sphincter.

Il y a ainsi dans le gros intestin trois portions : une première, zone des mouvements antipéristaltiques où le chyme est liquide et subit un complément de digestion ; la flore microbienne y est très riche, les putréfactions et les fermentations y sont actives. Dans la seconde portion, il n'y a pas d'antipéristaltisme physiologique, l'eau se résorbe, le bol fécal se dessèche, la vie microbienne s'éteint ; les fermentations et les putréfactions se ralentissent. Dans la troisième portion, les matières s'accumulent avant l'expulsion.

Nous ne faisons que rappeler que les mouvements de l'intestin sont réglés par le système cérébro-spinal avec, en dessous de lui, le système sympathique dorso-lombaire et le système parasympathique sacré. Il y a donc des réflexes à arc long passant par la moelle et des réflexes à arc court ne dépassant pas le premier relais sympathique ou parasympathique. — Ces réflexes sont nombreux ; quelques-uns sont connus depuis les Rayons X : il y a un réflexe gastro-iléal (quand les aliments arrivent dans l'estomac et que le pylore se ferme, l'iléon se vide) ; il y a un réflexe duodéno-iléal (quand le chyme arrive à la valvule de Bauhin, le pylore se ferme — réflexe de protection contre une surcharge du duodénum) etc. Enfin, il y a, interposés entre les fibres musculaires d'une part et l'appareil sympathique d'autre part, deux plexus : celui de Meissner (sous-muqueux) et celui d'Auerbach (intra-musculaire) jouissant tous deux d'une *excitabilité autonome*.

Aussi comprend-on que l'idée soit venue qu'il y avait à compter au niveau de l'intestin avec des phénomènes chronotropiques et dromotropiques comparables à ceux du faisceau de His et, dans ce cas, il n'est pas exagéré de parler à leur sujet d'arythmies : arythmies par lésions directes des parois de l'intestin ; arythmies par déséquilibre des systèmes influençants (vagotonies, sympathicotonies) ; arythmies par obstacles mécaniques (ptose, brides...).

Ce qui confirme singulièrement cette idée théorique, c'est que quand un intestin a une innervation bien équilibrée, il arrive à lutter avec succès contre des obstacles mécaniques considérables sans qu'il en résulte de la stase. Aussi nous admettons que, malgré toutes les conditions anatomo-pathologiques qui peuvent la favoriser, la S. I. C. est surtout fonctionnelle.

Comment déceler la stase intestinale ?

Hâtons-nous de dire d'abord que stase intestinale ne veut pas dire constipation habituelle : 23 % des stasiques ont une selle quotidienne et quelques-uns ont de la diarrhée !

L'ingestion d'un test coloré comme le carmin peut nous renseigner sur la durée totale du transit intestinal, mais nullement sur sa localisation.

Un seul procédé nous donne des résultats clairs et sûrs : la radioscopie.

Nous ne nous étendrons pas sur la technique de cet examen : disons seulement que par le lavement opaque nous aurons une idée de la forme, de la situation, de la mobilité du côlon. Nous en ferons l'étude statique. Le repas bismuthé, lui, nous fera découvrir le détail du cheminement intestinal, nous donnera des renseignements sur la dynamique du côlon. Ceci est plus important.

Avant tout, nous devons avoir présent à l'esprit l'horaire physiologique du transit digestif. Comme moyenne, nous adoptons les chiffres suivants :

4 h. 1/2. Le repas a quitté l'estomac et la tête de colonne entre dans le cæcum.

8 à 10 h. Tout le repas est dans le côlon depuis le cæcum jusqu'au transverse ou jusqu'à l'angle splénique.

12 h. L'angle splénique est dépassé.

16 h. L'S iliaque est atteint.

24 h. L'ampoule rectale se remplit ; le cæcum et le côlon ascendant sont vides.

24 h. Première évacuation.

48 h. Seconde évacuation.

La vitesse de propagation est donc régulièrement décroissante depuis le cardia jusqu'au rectum. Ce ralentissement est dû à des arrêts : dans le cæcum et le côlon ascendant, à l'angle splénique, à l'union du côlon descendant et du sigmoïde. Entre ces points d'arrêt, la progression est lente et continue.

Dans les cas pathologiques, que nous révèle la radioscopie ?

La radioscopie nous montre plusieurs types de stase :

1° Il y a une stase de la première portion du gros intestin. C'est ce que Stierlin a appelé l'obstipation du type ascendant. Elle englobe la majeure partie de ce qu'on a appelé autrefois des typhlatonies et des typhlectasies et elle est la compagne fréquente de la stase iléale.

2° Il y a une stase de la seconde portion, stase transverso-descendante ; cette forme était inconnue avant la radiologie.

3° Il y a une stase de la troisième portion, stase terminale, la plus anciennement connue, celle que Herz nomma dyschésie.

4° Il y a une stase bipolaire, association de la première et de la dernière.

5° Enfin il y a une stase totale, très rare, affectant le cæcum avec les derniers centimètres de l'iléon, tout le cadre colique et le rectum.

Chacune de ces formes n'est donc, en définitive, qu'une exagération des stases physiologiques et on comprend comment cet aspect radiologique contribue encore à renforcer l'opinion qu'il s'agit surtout ici de perturbations fonctionnelles.

Enfin — et ceci est bien fait pour achever de nous convaincre — chacune de ces variétés peut se présenter sous la forme atonique, hypotonique ou spasmodique. Dans la forme atonique le côlon est lisse et sans bosselures, les mouvements du côlon sont espacés et faibles, souvent la masse est peu homogène, peu dense (en voile) mais continue. La forme hypertonique est l'opposé de la précédente : paroi découpée par des contractions profondes, mouvements antipéristaltiques très violents, masses très opaques et parfois fragmentées. La forme hypotonique est l'intermédiaire obligé entre les deux formes extrêmes.

Certes nous savons que les troubles graves de la circulation des matières ne sont pas sans lésions anatomo-pathologiques parfois très accusées, et dans un travail qui va paraître, nous faisons avec Houdmont la part qui revient à l'anatomie pathologique : dispositions congénitales, ptose, inflammation du côlon, inflammation du mésentère. Néanmoins ces lésions n'expliquent pas tout et les troubles fonctionnels nous donnent beaucoup mieux la clef de tous les phénomènes constatés. Ainsi, qu'il nous soit permis en passant de dire ce que nous pensons de la bride de Lane. Pour cet auteur, à qui revient le mérite d'avoir entrepris le premier l'étude et le traitement de la stase intestinale chronique, tout le mal vient de la ptose. C'est la ptose qui tiraillant les mésos réussit à créer sur eux des bandes fibreuses et rétractiles qui représentent « la cristallisation des lignes de tension ». Les bandes siègent surtout au niveau des coudures, ainsi qu'on le comprend aisément. Une bride très fréquente siège sur l'iléon à une dizaine de centimètres de son embouchure dans le cæcum, une autre à l'angle colique gauche, une autre à l'union du côlon iliaque et du côlon pelvien. La première de celles-ci (Lane's kink, iléal band) est pour Lane le facteur principal de la stase iléale, condition elle-même de la stase cæcale. Or, il y a nombre de cas de stase intestinale chronique dans lesquels on ne trouve aucun ligament ni aucune coudure ; si on en trouve, l'intervention chirurgicale qui les supprime ne supprime pas la stase. Enfin Leveuf et Gouverneur qui ont recherché l'iléal band chez des nouveau-nés, l'ont trouvée sept fois sur cent ! Elle n'est donc pas autant que Lane le prétend l'attribut de l'homme civilisé, évolué, à station debout !...

Le syndrome clinique se superpose très exactement au syndrome radiologique.

1° Il existe un tableau clinique complet de la stase cæco-ascendante.

Avec Houdmont, nous avons cru pouvoir en distinguer deux variétés.

A. Il y a un type douloureux. Le malade accuse une douleur vague dans la fosse iliaque droite, parfois un malaise, une lourdeur continue, parfois une sensation de distension, de ballonnement avec, de loin en loin, une crise douloureuse avec anxiété, sueurs puis débâcle de diarrhée et de gaz. Cette douleur n'est pas localisée à un point mais à une zone, elle peut s'irradier dans la région lombaire et dans la cuisse droite.

A l'examen, on voit parfois se dessiner sous la paroi le relief du cæcum et du côlon ascendant. Au palper on découvre un cæcum douloureux, dilaté en fuseau ou en ballon, comme soufflé. La main provoque un gargouillement ou un clapotement et peut parfois exprimer le contenu du ballon et le vider.

Il y a souvent une douleur à l'épigastre — ce que nous rapprochons de ce fait que, lorsque sous anesthésie lombaire on exerce une traction sur le cæcum, on provoque souvent une douleur que l'opéré localise à l'épigastre, même quand l'anesthésie de la paroi abdominale est parfaite. Il s'agit peut-être là d'un réflexe viscéro-sensitif de Mackenzie.

Ce malade n'a pas de température.

B. Il y a un type inflammatoire. Le malade a des douleurs spontanées assez vives dans la fosse iliaque droite, autour de l'ombilic, sous le foie, à l'angle hépatique du còlon, au pòle inférieur du rein droit, dans la région lombaire, dans la région inguino-crurale, suivant les trajets des nerfs pariétaux, signature d'une péricòlite plus ou moins étendue et plus ou moins intense. Il y a de la défense de la paroi, avec sensation de rénitence, de corde, de tuméfaction. Nous ajouterions volontiers qu'il y a presque toujours une cicatrice d'appendicectomie ancienne. La langue est saburrale, les nausées sont fréquentes. Il y a des douleurs tardives avec renvois, de la constipation avec débàcles de fausse diarrhée, de glaires, de muco-membranes précédées de migraines.

Il y a de la leucocytose, de l'anémie.

Comme nous l'avons vu plus haut, ce segment du còlon renferme un chyme liquide riche en microbes, siège de putréfactions nombreuses : rien d'étonnant que cette forme de stase s'accompagne de signes nombreux et graves d'auto-intoxication d'origine intestinale et sur laquelle nous ne nous étendrons point.

2° La stase de la seconde portion, stase transverso-descendante, est une forme qui était inconnue avant la radiologie. C'est une forme moins bruyante que la précédente et on comprend qu'elle ait échappé à l'observation des cliniciens. Comme dans ce segment d'intestin les matières se dessèchent et ne constituent plus un milieu favorable au développement de la flore de putréfaction, les signes d'auto-intoxication font défaut ou sont très peu accusés. Nous croyons cependant que bien des troubles attribués à la polyptose viscérale doivent être mis sur le compte de cette forme de stase.

3° La stase de la troisième portion, stase recto-sigmoïdienne. C'est la forme bien connue des anciens. C'est la constipation des vieillards, des obèses, des sédentaires, des sujets ayant subi un entraînement intestinal fautif. Nous ne nous y arrêtons pas.

4° Il y a la stase bipolaire, combinaison de la 1re et de la 3e qui s'associent volontiers. Elle revêt les symptômes bruyants de la 1re et les signes discrets de la 3e.

5° Il y a la stase totale, forme grave et rare. Elle s'accompagne de douleurs de siège abdominal variable (fosse iliaque droite, région pelvienne, lombaire, appendiculaire, épigastrique), de désordres de l'évacuation consistant surtout en constipation (77 % Stierlin) pouvant aller jusqu'à 28 jours (Chapple) et plus. Parfois il y a des débâcles, mais après ces évacuations, le ventre n'est pas affaissé — le palper continue à découvrir des masses fécales dans la profondeur des flancs et provoque un gargouillement (G. Lyon).

Ici les signes d'auto-intoxication sont nombreux et les complications tellement fréquentes et souvent tellement graves qu'elles masquent la maladie originelle : les auteurs anglo-américains y insistent très longuement.

Après cette esquisse symptomatologique, nous voudrions brosser à larges traits les grandes directives du traitement.

D'abord, en général, quand le stasique présente des troubles de déséquilibre des systèmes influençants, la première chose à faire sera d'essayer des médications appropriées.

Dans les vagotonies, nous aurons recours à l'atropine qui agit à la fois sur l'état général du malade en supprimant la nervosité hystériforme et sur l'état spasmodique de l'intestin. L'atropine coupe les spasmes, peut contribuer à inhiber certaines sécrétions internes comme celle de la thyroïde. Elle diminue l'excès de sécrétion gastrique, la sécrétion de la côlite muco-membraneuse, sans toucher à la sécrétion biliaire. On peut aussi stimuler le sympathique par l'adrénaline qui relâche la musculature lisse circulaire sauf celle du pylore, de la valvule iléo-cæcale et du sphincter interne de l'anus : c'est donc bien un véritable antispasmodique. On pourrait remplacer l'adrénaline par la thyroïdine mais en la dosant avec soin et en surveillant attentivement son action sur les autres appareils. L'hypophyse, excellent régulateur des fonctions des muscles lisses, pourra être employée aussi d'après les autres symptômes généraux.

Dans les sympathicotonies, comme nous ne possédons pas encore de sympathicoparalysant, nous pourrions employer un vagotrope comme l'ésérine ou la pilocarpine ; mais ces médicaments agissant sur un grand nombre d'appareils sont d'un emploi désagréable.

Ces médications, vraiment spécifiques, feront faire au traitement de la S. I. C. un énorme pas en avant ; mais elles ne sont pas au point, parce qu'elles n'ont pas une action suffisamment dissociée. En médecine, le front de bataille est trop vaste pour se mouvoir d'un mouvement uniforme sur toute son étendue. Parfois une petite unité a progressé isolément ; elle se retranche sur ses positions, mais elle doit attendre, pour faire un nouveau progrès, que ses voisines soient arrivées à son niveau pour l'appuyer.

Chaque forme de stase doit encore recevoir le traitement qui lui convient spécialement.

1° Dans la constipation droite, l'élément de gravité et de douleur, c'est la putréfaction. Nous supprimons donc les albuminoïdes et nous donnons en abondance les hydrates de carbone, surtout du lactose à chaque repas : le lactose traverse le grêle sans être absorbé et, arrivé au cæcum, constitue le meilleur milieu de culture pour les bactéries acidifiantes.

Dans les formes rebelles au traitement médical, l'intervention chirurgicale ou bien corrigera la statique défectueuse du cæcum et du côlon par des pexies dont le détail ne peut trouver place ici, ou bien utilisera les grands mouvements antipéristaltiques vus plus haut, en établissant une bouche de décharge, de court-circuit entre le cæcum et le sigmoïde. La cæcosigmoïdostomie a donné des résultats excellents en tous points : elle n'empêche pas la plus grande partie des matières de parcourir tout le cadre côlique, mais elle forme une soupape pour le trop-plein cæcal et un excellent drainage quand la stase a causé de la côlite grave. Cette opération logique théoriquement a tenu ses promesses dans la pratique : elle ne comporte aucun inconvénient et a à son actif de véritables résurrections.

Enfin si la stase droite est ancienne et que le côlon soit très altéré, chroniquement enflammé et atrésié, il ne reste qu'à faire une colectomie droite, opération comportant un taux de mortalité faible, mais qui n'en est pas moins irréductible.

2° La stase transverso-descendante sera combattue par des moyens médicaux : ceinture pour corriger la ptose, paraffine à l'intérieur, régime hydrocarboné.

3° La stase terminale relève de la rééducation, de la paraffine, du régime acide et végétarien, etc.

4° La stase bipolaire sera traitée comme une stase droite, puisque c'est à cette variété surtout qu'elle emprunte sa gravité.

5° La stase totale est la plus décevante à traiter. Lorsque le repos au lit, l'administration de vaseline, le massage, le régime n'ont rien donné, il faut se résoudre à la colectomie totale. Après avoir été pratiquée sur une large échelle par les chirurgiens anglais à la suite de Lane, elle a été vulgarisée depuis quelques années sur le continent, où elle a reçu la sanction de l'expérience et du succès. Elle comporte cependant des inconvénients dont les deux principaux sont :

1° La suppression de la valvule de Bauhin, qui permet le reflux des gaz dans le grêle et donne souvent un météorisme abdominal désagréable.

2° L'irritation du bout terminal du tube digestif par le chyme qui n'a pas subi sa concentration préalable. Cet éréthisme recto-sigmoïdien dure plusieurs mois avant que l'accoutumance ou la rééducation du sigmoïde et du rectum l'aient fait cesser. Aussi pensons-nous qu'il serait plus logique de remplacer la colectomie totale par une colectomie subtotale, conservant un cæcum fermé par le haut et abouché par le fond au sigmoïde et conservant en même temps la valvule de Bauhin, opération plus logique et qui nous semble devoir supplanter la colectomie totale dans toutes ses indications.

Deux signes périphériques de l'insuffisance du myocarde : le pouls veineux systolique et le pouls alternant, par le Dr H. Houdmont.

La séméiologie cardiaque s'est longtemps résumée en l'étude des souffles perçus par l'auscultation d'une part, en l'observation des phénomènes dus à l'insuffisance du retour du sang veineux d'autre part. Ainsi se trouvaient précisés le fonctionnement défectueux des valvules — que celui-ci fût lésionnel ou fonctionnel — et le degré d'insuffisance ventriculaire droite. Quant au muscle cardiaque lui-même, tout en reconnaissant autant qu'on voulait l'importance capitale de son fonctionnement régulier, on le négligeait en réalité, car on ne trouvait nulle part de signes précis qui en pussent préciser les lésions.

Vint la connaissance du faisceau de Hiss et avec elle l'étude de la marche du stimulus moteur au sein du muscle cardiaque. Aussitôt l'observation clinique, la méthode graphique et l'enregistrement électrocardiographique apportèrent des contributions chaque jour plus importantes à la connaissance des troubles du rythme. Encore subsistait toutefois, à propos de toute tachycardie, bradycardie ou extrasystolie, la nécessaire question de savoir si elles étaient fontionnelles ou lésionnelles.

En définitive, jusqu'ici il ne s'est trouvé que deux variétés de rythmes dont on pût dire toujours — ou presque — qu'elles sont lésionnelles : ce sont la fibrillation auriculaire et l'alternance du cœur. Or, par une coïncidence heureuse pour le clinicien, l'un et l'autre de ces états ont pour témoin de leur existence un signe périphérique aisé à reconnaître : le pouls veineux systolique pour l'un, le pouls alternant pour l'autre. Ainsi se justifie l'étude simultanée de ces deux états, bien qu'ils ne s'associent pas obligatoirement en clinique.

A. *Le pouls veineux systolique.*

Physiquement, le pouls veineux systolique est aisément perceptible à la vue : c'est le soulèvement synchrone au choc de la pointe des veines jugulaires du cou turgescentes. Il existe un pouls physiologique de veines jugulaires, il est représenté par une ondulation décomposable en trois sommets : *a*, *c*, *v*, ; de ces trois, le premier, *a* est présystolique et il correspond à la systole de l'oreillette. Le pouls veineux pathologique est, lui, systolique. Comment expliquer la disparition de l'ondulation *a*, présystolique ?

Deux hypothèses : ou bien l'excitation née anormalement du nodule auriculo-ventriculaire se propage simultanément vers la pointe et le sinus, amenant la contraction simultanée de l'oreillette et des ventricules : rythme nodal —, un tel rythme peut certes exister, mais il est bien rare ; ou bien c'est que l'oreillette ne bat plus. C'est cette seconde hypothèse qui est la vraie. Ce qui le prouve, c'est l'étude électrocardiographique de ces cas. Elle montre que l'ondulation P. (signe électrocardiographique de la contraction auriculaire) disparaît et se trouve remplacée par une série innombrable (de 350 à 500) petites oscillations par minute. Le pouls veineux systolique est donc ainsi le signe de la fibrillation auriculaire, état dans lequel cette partie du cœur n'est animée que de toutes petites contractions, disséminées, incomplètes, extrêmement brèves comme aussi toujours inefficaces au point de vue dynamique. Pareil phénomène a été reproduit expérimentalement chez le chien par Lewis.

Cet état fort anormal de l'oreillette n'est presque jamais fonctionnel : à peine serait-il parfois observable de façon passagère dans certains états aigus de surmenage (Mackenzie). Dans l'immense maorité des cas il correspond à de graves lésions de myocardite scléreuse. Lorsqu'il s'établit, c'est pour toujours.

Que fait alors le ventricule ? Incapable de répondre à d'aussi nombreuses excitations, il ne répond qu'à un certain nombre d'entre elles, et cela de façon inégale et irrégulière. Ainsi se trouve réalisé le pouls irrégulier perpétuel de Hering, l'arythmie complète de Josué. Arythmie complète, pouls veineux systolique sont donc deux constatations qui devraient, par réflexe, faire dire à tout praticien qui les constate : voici un cœur frappé de fibrillation auriculaire ! Au reste, l'établissement d'un tel trouble de la conduction n'est pas monosymptomatique : outre la production de ses signes périphériques, il entraîne en général une rapide dilatation du cœur droit : en quelques semaines on la voit devenir considérable et causer tous les signes de l'insuffisance ventriculaire droite (œdèmes, gros foie, congestion de bases) ; la production subite de phénomènes angineux dus sans doute à l'augmentation de volume de l'oreillette. Enfin, dans les cas de rétrécissement mitral, on observe la disparition du souffle « crescendo » présystolique qui correspondait dans l'onomatopée de Duroziez à la contraction de l'oreillette.

Grave, parce qu'elle est presque toujours lésionnelle, parce qu'elle ne rétrocède pour ainsi dire jamais et qu'elle annonce pour le malade l'heure prochaine de l'asystolie, la fibrillation auriculaire (¹) avait besoin de pouvoir être constatée par un signe périphérique aussi simple et aussi sûr que le pouls veineux systolique. Il n'est possible de la confondre parfois que avec l'auricular flutter de Ritchie (de 150 à 300 contractions auriculaires par minute) qui s'accompagne de tachycardie régulière et dont le pronostic d'ailleurs est souvent loin d'être bénin.

Deux mots du traitement : c'est le terrain d'élection de la médication digitalique — le seul terrain propice, au dire de Mackenzie ; la fibrillation auriculaire s'établit surtout chez les valvulaires.

Augmentant le blocage au niveau du nœud auriculo-ventriculaire, la digitale diminue le nombre des excitations auriculaires efficaces. Ainsi le pouls, ralenti et apparemment plus régulier, plus tendu aussi, correspond sous l'action de ce traitement à une contraction cardiaque plus puissante. Toutefois, s'il s'établissait, comme cela se voit, un rythme couplé, il faudrait condamner la digitale qui ne manquerait pas de tuer le malade : on serait alors, au dire des contemporains, dans le terrain d'action efficace de l'ouabaïne. Enfin, au dire de Clerc et Pezzi, la quinine serait capable d'agir électivement sur les oreillettes fibrillantes.

B. *Le pouls alternant.*

C'est une chose bien simple à définir : il est fait de pulsations fortes et faibles alternant régulièrement, mais demeurant toujours régulièrement espacées. Par cette définition, le pouls alternant est bien différencié du pouls bigerminé, dans lequel la pulsation faible (qui est une extrasystole) est toujours plus rapprochée de la pulsation forte qui la précède.

Le pouls alternant est peu connu, parce qu'à tort on le croit rare et difficile à trouver.

Rare, il ne l'est guère : voyez Gravier, qui en 1914, dans sa thèse de Lyon, peut en rassembler 208 observations ; voyez les observations de jour en jour plus nombreuses de Esnain, de

---

(¹) On la voit fréquemment aussi s'établir chez des hypertendus *modérés*. Ces hypertendus évoluent alors rapidement vers l'asystolie, preuve de la gravité de leur état par le fait de la fibrillation.

Heitz, de Lian, de Chalier et de tant d'autres. Nous-même en l'espace de quelques mois avons pu en découvrir 14.

Difficile à trouver, il ne l'est pas non plus : parfois on peut avec un peu d'attention le palper directement à la radiale. Mais bien plus aisément le décèlent toutes les méthodes qui servent à mesurer la pression artérielle : la pulsation forte et la pulsation faible correspondent à deux maximas différentes. Ainsi, si l'on mesure par la méthode palpatoire de Riva-Ricci la pression artérielle, il y a naturellement un moment où la palpation en aval de la manchette pneumatique ne fait percevoir qu'un nombre de pulsations juste égal à la moitié du nombre des battements du cœur. Accentue-t-on la décompression, on voit réapparaître le nombre réel de pulsations.

De même la méthode auscultatoire de Korotkow, après avoir permis d'entendre un nombre de bruits diminué de moitié par rapport à celui des battements du cœur, fait entendre bientôt la succession régulière d'un bruit fort et d'un bruit faible : voilà le pouls alternant !

Veut-on le voir ? qu'on recoure à la méthode oscillatoire où la succession d'oscillations de l'aiguille alternativement fortes et faibles lèvera tous les doutes.

Or, le symptôme du pouls alternant, s'il n'est pas plus difficile à observer qu'il n'est rare, est par ailleurs bien précieux.

Qu'il nous suffise, pour le prouver, d'en expliquer la pathogénie : on sait que la fibre cardiaque possède après sa contraction la propriété de rester inexcitable pendant un certain temps : c'est la période réfractaire. Que maintenant certaines fibres malades aient, par hypoexcitabilité, une période réfractaire prolongée, on comprendra qu'après une contraction (forte) qui aura compris toutes les fibres ventriculaires, le stimulus moteur trouvera à la contraction suivante (faible) ces fibres non encore réparées et par suite inexcitables. N'avait-on pas raison de dire que le pouls alternant est précieux, puisque, en quelque manière, il permet de compter les fibres cardiaques malades ?

Il se révèle également précieux par l'étude des conditions cliniques où on le trouve. A part certains cas, on le trouve chez des individus cachectisés (tuberculeux); on le rencontre le plus fréquemment chez des hypertendus. Parfois ceux-ci n'ont encore que des signes d'insuffisance ventriculaire gauche, sans trace de réaction des cavités : le pouls alternant annonce avant tout autre signe la défaillance prochaine et la clinique confirme son annonce en montrant que les individus à pouls alternant quels qu'ils soient meurent souvent dans l'année, presque toujours dans les deux ans et qu'aucun ne survit plus de quatre ans. Bien plus, tous les pouls alternants (à part les cachectiques), ceux de Esnain et Heitz, ceux de Chalier, comme les nôtres, avaient une azotémie aux environs du gramme. Il semble bien qu'il faut admettre que 90 % des pouls alternants correspondent ainsi à une azotémie élevée.

Voilà donc un symptôme simple qui est à la fois un test anatomopathologique, un signe égal à un dosage d'urée dans le sang et un élément capital de pronostic dans le temps. Comment donc désormais le négliger ou l'ignorer ? (1)

De son traitement nous ne dirons qu'un mot. Il y a avant tout le traitement général de l'hypertension. A côté de lui un traitement s'impose visant le rein et un autre visant le cœur. Nous ne parlerons que de celui-ci : on pourrait être tenté de proscrire la digitale de ce traitement, parce qu'elle a la réputation d'élever la tension artérielle ; or, s'il est vrai qu'elle élève la maxima, elle abaisse la minima et elle met le sujet dans un meilleur équilibre circulatoire. On pourrait craindre aussi que la digitale, comme l'excitation du vague, n'accentue l'alternance. Cliniquement il n'en est rien, et les pouls alternants se trouvent on ne peut mieux des petites doses de digitale. Nous connaissons trop mal la pharmacodynamique de ce produit pour chercher à l'expliquer dans une note aussi courte. Contentons-nous de nous rappeler que réducteur du rythme, tonique du muscle, on peut s'expliquer jusqu'à un certain point l'effet favorable un peu paradoxal qu'elle a sur les cœurs alternants et leur fonction.

De la brève et bien incomplète étude de ces deux symptômes périphériques de l'insuffisance cardiaque, qu'on me laisse conclure à l'utilité pour le praticien de connaître l'interprétation de tels petits signes. Quand la pathologie cardiaque en comptera un plus grand nombre de pareils, sans doute pourrons-nous voir en même temps la symptomatologie de la myocardite perdre de son obscurité, et son traitement acquérir une utile puissance.

---

(1) Il existe aussi une alternance post-extra-systolique et une autre qu'on observe parfois dans le décours des maladies infectieuses ; l'une et l'autre sont en général passagères et sans signification actuellement précisée.

La question mise au concours l'année dernière par la Section, est maintenue (Fixer, par des recherches personnelles, les règles qui doivent présider à un établissement rationnel du régime alimentaire de la première enfance).

Le Bureau précédemment choisi est réélu :

Président : M. le Dr Goris.
Vice-Présidents : M. le Dr Schockaert.
M. le Dr Delétrez.
Secrétaire : M. le Dr Warlomont.

ASSEMBLÉES GÉNÉRALES

I

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MERCREDI 6 AVRIL 1921

La séance s'ouvre à deux heures et demie, sous la présidence de M. A. Renier, professeur à l'Université de Liége, remplaçant M. Ch. Lagasse de Locht, retenu par un deuil.

Son Excellence Monseigneur Nicotra, Archevêque d'Héraclée, Nonce apostolique à Bruxelles, a bien voulu accepter la présidence d'honneur de cette réunion. M. le président l'en remercie comme d'une marque d'approbation du vénéré Pontife dont Sa Grandeur est l'ambassadeur et à qui la *Société scientifique* voue une respectueuse obéissance et un affectueux dévouement.

La parole est donnée à M. le Dr Warlomont, pour la lecture du rapport envoyé par la *Société Bibliographique*. En voici le texte, presque complet :

L'année qui vient de s'écouler a été pour la *Société Bibliographique*, malgré les difficultés de l'heure présente (crise du papier, augmentation du prix des livres, etc.), une année de développement constant, pendant laquelle son activité ne s'est pas un instant ralentie. Ces quelques lignes le montreront clairement.

Membres Associés Correspondants.

De nouveaux sociétaires, attirés par les nombreux avantages fournis par la Société, ou même par le seul but de contribuer à la propagation des bonnes lectures, nous arrivent d'une façon régulière. C'est ainsi qu'à chaque séance mensuelle du Conseil d'Administration, une importante liste de présentations est soumise à l'approbation des membres. Pendant l'année 1920, nous avons pu compter 200 nouveaux sociétaires.

Bibliothèques populaires.

Le nombre des abonnements aux bibliothèques renouvelables s'est accru, mois par mois, dans une proportion digne de retenir l'attention. Durant la dernière année, nous avons envoyé 18 150 volumes au lieu de 16 525 l'année précédente, et nous avons expédié des livres jusqu'à Dakar et à Tananarive.

Nouvelles séries.

Pour répondre à un désir qui nous avait été exprimé avec instance, nous avons créé trois séries sociales qui sont des séries de travail, plus spécialement destinées aux Cercles d'Études. Ce sont les séries E^1 E^2 E^3. La série E^2 comprend les comptes rendus des Semaines Sociales d'Orléans (1905), de Rouen (1910), de S^t-Étienne (1911), de Limoges (1912), de Versailles (1913), de Marseille (1908), de Dijon (1906), d'Amiens (1907), de Metz (1919), de Bordeaux (1909), de Caen (1920).

Nous avons aussi constitué une nouvelle série de 25 volumes pour bibliothèques populaires, la série R^{24}. Elle a été créée à 36 exemplaires, et les demandes ont tant afflué que, quinze jours après son apparition, nous ne pouvions plus la procurer aux sollicitants qui ont dû s'inscrire pour la recevoir à leur tour.

Assemblée générale.

Comme tous les ans à la même époque, la *Société Bibliographique* a tenu son Assemblée générale le 7 mai 1920, sous la présidence de M. de La Gorce, de l'Académie Française. Le R. P. Gillet y fit une conférence intitulée : « l'Ignorance religieuse des femmes du monde et les lectures ». Le talent bien connu de l'orateur avait attiré un auditoire de choix qui sut apprécier et goûter la solidité des argumentations. M. de La Gorce, à son tour, voulut bien donner à la *Société Bibliographique,* dont il est membre du Conseil, tous ses encouragements.

Bulletin.

La Société continue à publier régulièrement son Bulletin mensuel. Cependant elle s'est vue obligée, cette année, comme la plupart des revues, de réunir en une seule deux livraisons, en raison de la crise du papier.

Le Bulletin rend compte des séances du Conseil d'Administration. Il mentionne en outre les publications des membres de la Société, recommande un certain nombre de livres nouveaux sous la rubrique « Bibliothèque des gens du monde » et donne enfin des réponses aux questions bibliographiques qui nous sont posées par nos sociétaires. Ces questions sont aussi nombreuses que variées : histoire, géographie, littérature, sciences, etc., elles constituent une importante source de renseignements dont nos abonnés savent apprécier tout le prix.

Almanach.

Nous avons, comme les années précédentes, publié notre « Almanach du Bon Français » 1921, qui a été tiré à 10 000 exemplaires. Il est toujours considéré comme un élément d'excellente propagande.

Le Polybiblion.

Pendant l'année 1920, le Polybiblion a poursuivi sa marche que la guerre n'avait d'ailleurs pas interrompue. Il s'est appliqué naturellement à parler des publications nouvelles en tous genres au fur et à mesure de leur apparition, réservant toutefois une place importante aux livres sur la grande guerre. Nulle revue en France n'a rendu compte d'autant d'ouvrages sur le cataclysme européen. Le Polybiblion constitue donc, dès à présent, l'une des sources les plus importantes et les plus sûres où ceux qui s'occupent de l'histoire de la guerre pourront puiser utilement. C'est ce que semblent avoir compris les travailleurs étrangers, car pendant les hostilités, mais surtout après l'armistice, nombre d'entre eux se sont abonnés au Polybiblion.

Relations.

La *Société Bibliographique* reste toujours en rapport avec tous les groupements d'études ou œuvres intellectuelles auxquelles elle peut être utilement mêlée.

Ainsi a-t-elle pris une part active au Congrès de l'*Union catholique d'Études Internationales* (12-13-14 novembre 1920) présidé par un membre de son Conseil d'Administration, M. Paul Fournier, de l'Institut, et dont le R. P. de La Brière, notre éminent confrère, fut un des rapporteurs.

Son Président l'a représentée également à la *Semaine du livre* (15-21 novembre 1920) qui, à Paris, a groupé les auteurs, éditeurs, imprimeurs, employés typographes, en vue de soumettre aux membres des différentes corporations du livre, une méthode pour résoudre ou atténuer le problème économique qui se pose actuellement dans le monde des lettres.

C'est encore son Président, M. Geoffroy de Grandmaison, qui a représenté la Société à la réunion tenue à l'Institut par l'*Œuvre internationale de Louvain* (21 décembre 1920). Elle va envoyer directement à l'Université de Louvain les publications qu'elle peut mettre à sa disposition sur la demande du Directeur de l'Office de la Restauration de la Bibliothèque.

Le Père Quevit, des Frères-Prêcheurs de Bruxelles, est venu nous entretenir de la diffusion de brochures de propagande rédigées et éditées par la Société d'Études religieuses de Belgique.

La *Société Bibliographique* a fait récemment un don de livres au collège français de Beyrouth (Syrie), ce qui lui a valu l'honneur d'être inscrite sur le tableau des membres bienfaiteurs par les jeunes gens de cette Académie.

Nous avons entretenu aussi des relations avec le Canada et avec Dakar.

M. Geoffroy de Grandmaison a rendu récemment visite, lors de leur passage à Paris, à Mgr Sapieha, prince-évêque de Cracovie, et à Mgr Théodorovich, évêque de Lemberg. La *Société Bibliographique* a noué ainsi des relations avec l'épiscopat polonais et elle envisage des envois de livres français en Pologne.

On pourrait, par de longs détails, développer ce rapport, mais il dépasserait alors le but proposé ; il devait esquisser seulement à très grandes lignes, la vie de la *Société Bibliographique* dans ces derniers mois. Nous espérons qu'il suffira à montrer que les difficultés de l'après-guerre n'ont pas été pour elle une entrave. Son effort s'est accru, et il lui est permis d'envisager avec optimisme un avenir dans lequel elle saura grandement faire face aux tâches nouvelles.

Et nous terminerons par un vœu : celui de voir se resserrer plus étroitement encore dans l'avenir, les liens qui nous unissent déjà à la *Société scientifique de Bruxelles*, et dont nous connaissons toute la valeur.

Le concours que voudront bien nous donner nos voisins et amis de Belgique, nous sera toujours particulièrement précieux ; aussi souhaitons-nous à la *Société Bibliographique* de pouvoir trouver parmi eux de nouvelles et nombreuses recrues.

Le Secrétaire général,
GUY COLMET DAAGE.

M. A. Lemaire, professeur à l'Université de Louvain, fait une conférence, accompagnée de projections lumineuses en couleurs, sur *la genèse des globules du sang*.

Le texte en sera publié *in extenso* dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, livraison du 20 juillet 1921.

II

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 7 AVRIL 1921

La séance est ouverte à deux heures et quart. M. A. Renier, professeur à l'Université de Liége, la préside.

Le R. P. Willaert, S. J., secrétaire, proclame le résultat des élections pour le Conseil général et les bureaux des sections.

La composition du Conseil pour l'année 1921-1922 est la suivante (¹) :

Président : M. M. d'Ocagne.
Vice-Présidents : M. A. Renier (1923).
M. R. Warlomont (1925).
Secrétaire général : M. Ch.-J. de la Vallée Poussin (1923).
Secrétaire : R. P. F. Willaert (1924).
Trésorier : M. Éd. Goedseels (1925).
Membres : MM. Alliaume (1925).
Ch. Beaujean (1925).
le Mis de la Boëssière-Thiennes (1923).
le R. P. H. Bosmans (1924).
le Chanoine Cocheteux (1924).
Fr. De Walque (1923).
É. De Wildeman (1924).
le Chanoine V. Grégoire (1922).
É. Harmant (1922).
Ch. Lagasse de Locht (1922).
le Cte Ad. de Limburg Stirum (1925).
E. Pasquier (1922).
A. Proost (1923).

BUREAUX DES SECTIONS :

1re Section

Président : M. Ch.-J. de la Vallée Poussin.
Vice-Présidents : le R. P. H. Bosmans, S. J.
M. M. Alliaume.
Secrétaire : M. H. Dutordoir.

2e Section

Président : le R. P. de Greeff, S. J.
Vice-Présidents : M. P. Bruylants.
M. R. Goubau.
Secrétaire : le R. P. Lucas, S. J.

(¹) Le nom de chaque membre du Conseil est suivi de l'indication de l'année où expire son mandat.

3e Section

Président : M. l'abbé G. Delépine.
Vice-Présidents : M. P. Debaisieux.
M. le Curé Claerhout.
Secrétaire : M. F. Van Ortroy.

4e Section

Président : M. le Dr Ch. Goris.
Vice-Présidents : M. le Dr R. Schockaert.
M. le Dr A. Delétrez.
Secrétaire : M. le Dr R. Warlomont.

5e Section

Président : M. Éd. Van der Smissen.
Secrétaire : M. A. Delmer.

6e Section

Président : M. Harmant.
Vice-Président : M. F. Hachez.
Secrétaire : M. R. Van der Mensbrugghe.

Après avoir fait connaître les questions de concours proposées par les Sections, le R. P. Willaert, S. J., donne lecture du rapport de M. Ch.-J. de la Vallée Poussin, secrétaire général, sur l'activité de la *Société scientifique* pendant l'exercice 1920-1921.

Publications.

1° Annales. — Pendant l'année 1920-1921, la Société a publié le dernier fascicule du tome XXXIX des Annales et elle termine en ce moment le second fascicule du tome suivant. Comme nous l'avons annoncé dans notre dernier rapport, nous analyserons dans celui-ci le contenu du tome XXXIX. Ce volume contient 647 pages réparties de la manière suivante entre les diverses sections :

Sciences mathématiques	108	pages
» physiques	107	»
» naturelles	142	»
» médicales	132	»
» économiques	36	»
» techniques	9	»

Il y a, en plus, 117 pages de documents divers.

2° Revue des Questions scientifiques.

Pendant cette même année, la Société a terminé la publication du tome XXVIII (1920) de la 3e serie, 78e de la collection complète ; elle a publié le premier fascicule du tome suivant, dont nous rendrons compte l'année prochaine.

Voici, par ordre de matières, la liste des grands articles des volumes publiés en 1920 :

1. *Rédaction.* In Memoriam.
2. *Lagasse de Locht.* Paul Mansion.
3. *R. P. V. Schaffers, S. J.* Le R. P. Thirion.
4. *P. Termier.* Les grandes énigmes de la Géologie.
5. *Aimé Witz.* Le conflit sur la valeur des théories physiques.
6. *R. P. H. Bosmans, S. J.* La « Thiende » de Simon Stévin.
7. *Rédaction.* Le Professeur F. De Walque.
8. *R. P. Maréchal, S. J.* La Notion psychologique de subconscience.
9. *Paul Mansion.* Pascal.
10. *E. Pasquier.* La notion et la mesure de la force.
11. *J. De Smedt.* La nature des Rayons X et la structure des cristaux.
12. *Georges Lemoine.* La chimie de guerre de 1914 à 1918.
13. *J. Tillieux.* Les idées actuelles sur la constitution de la matière.
14. *A. Witz.* L'Électricité substance ou accident ?
15. *R. P. V. Schaffers.* Comment on entendait le canon.
16. *Achille Salée.* L'Évolution des Reptiles et l'origine des Mammifères.

17. *R. P. R. De Simpel, S. J.* La Fondation d'une fourmilière.
18. *Rédaction.* S. S. Benoît XV et la *Société scientifique de Bruxelles.*
19. *R. P. R. De Simpel, S. J.* Le Jeûne chez les Fourmis.

L'augmentation des frais d'impression et d'expédition a obligé le Conseil de la Société à majorer le prix d'abonnement à la Revue, de 2 francs pour la Belgique, de 4 francs pour les autres pays ; et de fixer à 5 francs, au lieu de 10, la réduction du prix d'abonnement dont bénéficient les membres.

Sessions.

La session de printemps s'est tenue à Bruxelles les 14, 15 et 16 avril 1920. Les Sections se sont montrées très actives et le compte rendu de leurs travaux occupe la moitié du 4e fascicule du tome XXXIX des Annales.

Dans son assemblée générale du 14 avril, la Société scientifique a repris contact avec la *Société Bibliographique* de Paris. M. Paul Verhaegen, conseiller à la Cour de cassation et délégué de cette Société, a donné lecture d'un rapport dû à la plume de M. Geoffroy de Grandmaison et qui est reproduit *in-extenso* dans les Annales. Ensuite la parole a été donnée à M. l'abbé Tillieux, directeur du Collège de Mechelen-sur-Meuse, pour une conférence sur *les idées modernes touchant la constitution de la matière.* Cette conférence avait attiré un nombreux public qui se trouva bientôt à l'étroit dans la salle et dont une partie dut rester debout. Mais les auditeurs n'eurent point à regretter d'être venus. Ils furent captivés par la clarté et le charme de la parole de l'orateur et suivirent avec un vif intérêt les démonstrations expérimentales et les projections qui servirent à l'illustrer. Le soir eut lieu le premier banquet de la Société scientifique depuis la guerre, et ce fut une réunion très animée et très cordiale.

Dans son assemblée générale du lendemain 15 avril, la Société scientifique entendit une conférence extrêmement intéressante et toute d'actualité, de M. G. Lemoine, membre de l'Institut et professeur à l'École polytechnique : *Sur les applications récentes des sciences expérimentales à l'art militaire.* Cette conférence a été publiée dans la Revue sous le titre : *La chimie de guerre de* 1914 *à* 1918. L'illustre savant nous parla successivement de la guerre des gaz, de la chimie des explosifs et de diverses applications plus spéciales de cette science (fumigènes, hélium, métallurgie de l'acier). Il fit ressortir l'importance du rôle joué par les chimistes pendant la guerre et rappela avec fierté cette pensée exprimée par le maréchal Joffre que, chez les Alliés, pendant cette terrible guerre, tout le monde a fait son devoir. Cette conférence brillante fut vivement applaudie et le Président adressa les remerciements de la Société à M. Lemoine, qui est assurément l'un de ses membres les plus anciens, les plus fidèles et les plus distingués.

La session d'automne se tint le 25 novembre 1920 à Lille. C'était la seconde fois que la Société tenait ses assises dans la capitale de la Flandre française. Elle y revenait encore, après vingt ans, déférant ainsi au désir et à l'invitation si aimable des membres français, affirmant une fois de plus le rapprochement plus intime des deux nations après les épreuves et les gloires communes de la guerre. Malheureusement les difficultés des communications ne permirent pas à plusieurs de nos membres d'aller à Lille et la brièveté du temps écourta un peu les séances. Les sections furent accueillies de la manière la plus gracieuse par nos confrères de Lille dans les locaux de leur Faculté ; et le Recteur, Mgr Lesne, nous offrit la plus charmante hospitalité dans ses propres salons. La Société tint sa réunion générale dans l'amphithéâtre d'histoire naturelle, sous la présidence d'honneur de Monseigneur l'Évêque de Lille, chancelier de la Faculté catholique. Notre président, M. Lagasse de Locht, après avoir salué Monseigneur Quilliet, donna la parole à M. le chanoine Grégoire, professeur de botanique à l'Université catholique de Louvain. Le conférencier avait pris pour sujet : *Progrès et tendances dans l'évolution végétale.* Il chercha de quelle façon on peut représenter et expliquer la marche progressive de l'évolution. Il montra qu'il faut admettre que des formes nettement différenciées ont pu et ont dû apparaître d'emblée, à partir de formes beaucoup plus simples. Les tendances inhérentes à la vie ont eu ensuite pour effet de pousser les nouveaux types vers des réalisations de plus en plus élevées, suivant les possibilités offertes par les changements des conditions extérieures. Ces tendances, conclut l'orateur, ne sont point livrées au hasard :

seule la puissance créatrice de Dieu peut les provoquer et les gouverner.

Monseigneur l'Évêque de Lille prit alors la parole en termes qui témoignent de sa sollicitude pour les Facultés catholiques et la Société scientifique de Bruxelles. Il tira la conclusion pratique de la conférence précédente : elle tient dans la proposition du Concile du Vatican, choisie pour devise de la Société : *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest.* Sous cette direction sûre et absolue, le catholique peut aborder sans crainte la recherche de la vérité scientifique.

La conférence de M. le chanoine Grégoire est publiée dans la Revue, et le discours de Monseigneur Quilliet dans le compte rendu de la séance inséré aux Annales.

La session de Lille fut pour la Société l'occasion fructueuse de récolter un grand nombre de membres nouveaux, parmi lesquels il convient de signaler, en première ligne, Monseigneur le Recteur de l'Université et Monseigneur l'Évêque de Lille.

La Société scientifique de Bruxelles offre ses plus sincères remercîments à la Faculté libre des sciences de Lille qui ouvrit ses locaux aux 1^{re} et 3^e Sections, ainsi qu'à l'assemblée générale ; à l'École d'électricité qui reçut la 2^e Section ; à nos confrères lillois, MM. l'abbé Delépine et Aimé Witz, qui assumèrent la lourde tâche d'organiser la session ; à Monseigneur Lesne et à Monseigneur Quilliet, qui nous ont accordé les plus précieux témoignages de leur bienveillance.

Notre dernière session s'est tenue à Bruxelles le 27 janvier dernier. Un de nos membres les plus récents, M. Camille Matignon, professeur de chimie au Collège de France, avait tenu à nous prouver immédiatement toute l'étendue de son dévouement. Il avait donc accepté de nous faire une conférence pour l'assemblée générale de l'après-midi. Il choisit pour sujet : *l'état actuel du bassin potassique d'Alsace.* Il fit l'histoire de l'exploitation de ce bassin sous l'occupation allemande, nous renseigna sur sa richesse, sur les procédés d'exploitation, parfois antiscientifiques, instaurés par les Allemands et sur l'immense intérêt qu'il y avait pour la

France à recouvrer ce gisement, pendant et après la guerre. Le sympathique orateur réussit à animer cette causerie d'un souffle patriotique tout spontané et fit la conquête d'un auditoire extrêmement choisi, mais que les circonstances avaient fait malheureusement trop peu nombreux.

État actuel de la Société.

L'année dernière à pareille époque, la Société comptait 464 membres. Elle en compte aujourd'hui 487, quoique nous ayons admis 39 membres nouveaux. Mais nous avons eu à regretter un certain nombre de démissions et la mort a fait hélas ! de nombreux vides dans nos rangs.

Parmi ceux que Dieu a rappelés à Lui, je citerai d'abord Son Éminence le Cardinal Rinaldini, autrefois nonce apostolique à Bruxelles, membre fondateur de la Société ; puis Monseigneur Baunard, membre honoraire de la Société. Éducateur et écrivain de haute valeur, celui-ci est connu par des ouvrages très répandus et très bienfaisànts. Permettez-moi de vous rappeler que c'est lui qui fit à la Société scientifique l'honneur de l'accueillir à Lille il y a vingt ans, lors de notre premier séjour dans cette ville, et qu'il le fit avec une bonne grâce dont nous gardons encore le souvenir.

Nous avons perdu encore deux autres de nos membres honoraires, tous deux correspondants de l'Institut de France, M. Oehlert et M. Georges Humbert, le premier géologue très distingué, le second mathématicien éminent. Georges Humbert, qui succéda à M. Camille Jordan dans la chaire d'analyse de l'École polytechnique de Paris et qui, comme son maître, fut un analyste de premier rang, disparaît prématurément avant lui. Il fut un membre très dévoué de la Société, à laquelle il réserva des travaux originaux et pour laquelle il fit des rapports très appréciés. Son œuvre mathématique est trop abstraite pour que nous puissions en donner une idée même succincte dans ce rapport.

Parmi les membres que la Société scientifique a perdus, il faut encore signaler MM. Debaisieux et Dumont, l'un professeur à la Faculté de médecine, l'autre aux Écoles spéciales de l'Université de Louvain.

Th. Debaisieux, membre de l'Académie Royale de Médecine de Belgique et de la plupart des Sociétés médicales du pays, se fit, comme chirurgien, une réputation universelle. On lui doit de nombreux articles répandus dans les diverses publications scientifiques et, en particulier, dans nos Annales. Il fut l'un de nos conférenciers les plus goûtés et sa disparition laissera un grand vide parmi nous.

André Dumont, fils d'un géologue illustre, s'est porté au premier rang des inventeurs belges, par sa découverte du bassin houiller du Nord de la Belgique. Aucun événement industriel ne produisit une pareille sensation et ne souleva des polémiques plus passionnées dans notre pays. Il disparut, vingt ans après avoir fait sa découverte, au moment même où il allait en recueillir le fruit. Mais le pays, qui en bénéficiera dans l'avenir, gardera fidèlement sa mémoire.

La Société scientifique aussi gardera pieusement le souvenir de tous les membres qui l'ont si utilement et si généreusement servie.

Distinctions.

Pour terminer ce rapport, il nous reste à signaler les distinctions remportées par les membres de la Société. Voici celles qui nous reviennent à la mémoire : M. Lemoine, dont nous venons de rappeler la belle conférence sur la chimie de guerre, a été élu Président de l'Académie des Sciences de Paris. Le D^{r} Haibe a été nommé membre correspondant de l'Académie Royale de Médecine de Belgique. Lors du congrès des mathématiciens de Strasbourg, M. de la Vallée Poussin a été choisi comme Président effectif de l'Union internationale mathématique.

L'Académie des Sciences de Belgique a décerné, le 15 décembre 1920, le prix Lemaire à M. Aimé Williame.

Le Souverain Pontife a daigné envoyer une lettre à la Société scientifique, en réponse à l'adresse qu'elle lui avait envoyée en reprenant son activité après la guerre. Ce nouveau témoignage de la bienveillance du Saint-Siège est, pour elle, le plus précieux des encouragements à persévérer dans la voie qu'elle s'est tracée, et un gage que ses efforts seront bénis et féconds dans l'avenir comme ils l'ont été dans le passé.

Les comptes du trésorier, relatifs à l'année 1920, sont approuvés par l'assemblée. Les voici :

RECETTES ET DÉPENSES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES PENDANT L'ANNÉE 1920

RECETTES		DÉPENSES	
	Revue des Questions scientifiques		
Produit des abonnements	fr. 12053,75	Impression, illustration et expédition	fr. 13213,38
Vente d'anciennes livraisons	486,95	Collaboration	6537,40
Subside de la Société	8699,84	Administration et propagande	1489,76
	21240,54		21240,54
	Annales		
Produit des cotisations	6429,00	Impression, illustration et expédition	7119,96
Vente d'anciennes livraisons	191,05	Indemnités des secrétaires	1860,00
Vente de brochures	465,75	Frais des sessions	811,00
Subside de la Société	4194,91	Administration et propagande	1489,75
	11280,71		11280,71
	Société		
Revenus divers	8845,84	Subside à la *Revue*	8699,84
Perte	4160,92	Subside aux *Annales*	4194,91
	13006,76	Impôts	112,01
			13006,76

Conformément à une décision unanime du Conseil, motivée surtout par l'augmentation exorbitante des frais nécessaires, M. le Président propose à l'Assemblée de modifier l'article 7 des Statuts.

Voici le texte nouveau, approuvé par tous les membres présents:

« Les membres qui souscrivent, à une époque quelconque, une ou plusieurs parts du capital social, sont *membres fondateurs*.

Ces parts sont de 1000 francs. Les *membres ordinaires* versent une cotisation annuelle de 25 francs, qui peut toujours être rachetée par une somme de 500 francs, versée une fois pour toutes. »

M. Jacques de Lapparent, professeur à l'Université de Strasbourg, fait une conférence, accompagnée de projections lumineuses, sur *l'histoire de la Terre expliquée par le microscope.*

Cette conférence paraîtra *in extenso* dans la livraison de juillet 1921 de la Revue des Questions scientifiques.

LISTE DES OUVRAGES

OFFERTS A LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

du 1er mai 1920 au 1er mai 1921

I. Livres et brochures

Maurice Alliaume. Cours d'astronomie. Partie générale élémentaire. Un vol. de XIII-368 pages (24 × 16). Louvain, Uystpruyst, 1920

S. Alvarez de Toledo. Le problème de l'espace. Un vol. de 300 pages (14 × 20) avec 41 fig. Paris, Alcan, 1920.

Andrieu, Lieutenant-Colonel. Les révélations du dessin et de la photographie à la guerre. Principes de métrographie. Un vol. de XI-112 pages (26 × 17). Paris, 1920.

Paul Appel, membre de l'Institut. Traité de mécanique rationnelle. 3e édition. Tome III. Équilibre et mouvement des milieux continus. Un vol. de VIII-676 pages (24 × 16). Paris. Gauthier-Villars, 1921.

Paul Appel, Recteur de l'Université de Paris Traité de mécanique rationnelle. Tome IV. Figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation sous l'attraction newtonienne de ses particules. Un vol. de XIII-300 pages (24 × 16).Paris, Gauthier-Villars, 1921.

P. Aubert et **G. Papelier**. Exercices de calcul numérique. Tome I. Un vol. de 188 pages (22 × 14). Paris, Vuibert, 1920.

P. Aubert. Cahier de Manipulations de Physique. Un vol de 195 pages (23 × 18). Paris, Alcan, 1920.

C. Autran. Pensionnaire de l'Institut français d'archéologie orientale du Caire. « Phéniciens ». Essai de contribution à l'histoire antique de la Méditerranée. Un vol. de XV-146 pages (33 × 25). Paris, Geuthner, 1920.

Jules Baillaud. Manuel de Topométrie. Opérations sur le terrain et calculs. Un vol. de 222 pages (28 × 19). Paris, Dunod, 1920.

E. Bally. Géométrie synthétique des unicursales de troisième classe et de quatrième ordre. Un vol. de VI-100 pages (23 × 15). Paris, Gauthier-Villars, 1920.

Adrien Barjou. Utilisation des vapeurs d'échappement dans les houillières en vue de la production d'énergie électrique. Un vol. de 92 pages (25 × 17). Paris, Gauthier-Villars, 1920.

Barrowcliff et **F. Carr**. Organic Medicinal Chemicals. (Synthetic and natural). Un vol. de XVI-331 pages (23 × 15) avec 25 figures dans le texte. Londres, Baillière. Tindall et Cox. 1921.

Paul Bary. Les Colloïdes métalliques. Propriétés et préparations. Un vol. de VIII-96 pages (25 × 16). Paris, Dunod, 1920.

B. de Bellescize. Étude de quelques problèmes de radiotélégraphie. Un vol. de 174 pages (26 × 17). Paris, 1920.

Alphonse Berget. Où en est la météorologie. Un vol de 300 pages (19 × 13). Paris, Gauthier-Villars, 1920.

Dr Adrien Besson. De l'évaluation de l'aptitude physique au service militaire des jeunes sujets. Un vol. de 76 pages (24 × 16). Lille, Morel, 1921.

G. Bigourdan. Bibliothèque bibliographique documentaire. Section des sciences pures et appliquées. Troisième partie contenant l'astronomie, la géodésie et la géophysique. Un vol de 260 pages (25 × 16). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Georges Bohn. Le mouvement biologique en Europe. Un vol. de 144 pages (19 × 12). Paris, Colin, 1921.

Marcel Boll Précis de Physique (Introduction à une deuxième étude de la Mécanique et de la Physique). Un vol. de x-613 pages (21 × 14) avec 246 figures dans le texte. Paris, Dunod et Pinat, 1920.

—— Cours de Chimie (Lois générales ; Métalloïdes). 2e édition refondue. Un vol. de XVI-554 pages (21 × 14) avec 85 figures dans le texte. Paris, Dunod et Pinat, 1920.

C. Bonnegent. La théorie de la certitude dans Newman (œuvre posthume) publiée par M. l'abbé Boisne avec une lettre préface de M. É. Boutroux. Un vol. de XII-208 pages (22 × 14). Paris, Alcan, 1921.

Marcellin Boule. Les hommes fossiles ; éléments de paléontologie humaine. Un vol. de XII-492 pages (24 × 16) avec 239 figures. Paris, Masson, 1921.

J. Boulvin, Correspondant de l'Institut. Calcul des organes des machines. Un vol. de 516 pages (24 × 16) avec 346 figures dans le texte. Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Dr Gabriel Bourcet Contribution à l'étude du traitement de l'Ostéomyélite chronique. Un vol. de 53 pages (24 × 16). Toulouse, Dirion, 1921.

J. Boussinesq, Membre de l'Institut, Professeur honoraire à la faculté des sciences de l'Université de Paris. Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences. Tome III. Un vol. de XLIX-417 pages (25 × 16). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Pierre Boutroux, professeur au Collège de France. L'Idéal scientifique des Mathématiciens. Un vol. de 274 pages (19 × 12). Paris, Alcan, Nouvelle collection scientifique, 1920.

Smith (Henry) Bradford. Non-Aristotelian Logic. Une brochure de 40 pages (24 × 17). Philadelphia, The College Book Store. 1919.

Sir William Bragg, K. B. E., D. Sc., F. R. S., Professeur de Physique à l'Université de Londres ; et **W. L. Bragg**, M. A., Professeur de l'Université de Manchester. Rayons X et Structure cristalline. Traduit par Mme J. Rivière. Un vol. de VII-209 pages (22 × 14). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

P. Bruylants, Professeur à l'Université de Louvain. Traité élémentaire de Chimie. Tome I. Chimie inorganique ; 1re partie : les métalloïdes. Un vol. de 542 pages (22 × 15). Paris, Gauthier-Villars ; Louvain, Uystpruyst, 1920.

A. Buhl. Géométrie et Analyse des Intégrales doubles. Une brochure de 68 pages (19 × 12) (Scientia). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Camichel, Eydoux et **Gariel**. Résumé de recherches théoriques et expérimentales sur les coups de bélier. Un vol. de 188 pages (24 × 15). Lyon, Legendre, 1919.

Norman (Robert) Campbell. La théorie électrique moderne. Théorie électronique. Ouvrage traduit sur la deuxième édition anglaise par A. Corvisy. Édition corrigée et augmentée par l'auteur. Un vol. de XII-464 pages (25 × 17). Paris, Hermann, 1919.

— — Sc. D. Physics. The elements. Un vol. de 566 pages (27×18). Cambridge University Press, 1920.

Pierre Cappe de Baillon. Thèses présentées à la Faculté des sciences de Nancy pour obtenir le grade de Docteur ès-sciences naturelles.

1re Thèse. Contribution anatomique et physiologique à l'étude de la reproduction chez les Locustiens. La ponte et l'éclosion.

2me Thèse. Propositions données par la Faculté. Un vol. de 247 pages (29×20). Lierre, Van In, 1919.

Lazare Carnot. Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal. 2 vol. VI-117 et 105 pages (18 × 12). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Emilio Chiocchetti, O. F. M. Religione e Filosofia. Un vol. de VIII-231 pages (19 × 13). Milano, « Vita e Pensiero », 1921.

Alexis-Claude Clairaut. Éléments de géométrie. 2 vol. XIV-95 et 103 pages (18 × 12). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Ch. Coffignier. Les Vernis. Un vol. de VIII-640 pages (23 × 16). Paris, Baillière, 1921.

Emile Cotton, Professeur à la Faculté des sciences de Grenoble. Cours de Mécanique générale. Introduction à l'Etude de la Mécanique industrielle. T. II : Unités. — Travail. — Dynamique du point et des systèmes. Un vol. de XII-138 pages (25 × 17). Paris, Gauthier-Villars, 1920.

R. Courau. Technique des Pétroles. Un vol. de 406 pages (19 × 13), avec 19 planches hors texte, contenant 152 figures. Paris, Doin, 1921.

L. J. Dalbis. Anatomie et Physiologie végétales. Un vol. de 375 pages (19 × 13). Paris, J. de Gigord, 1915. — Anatomie et Physiologie animales. Un vol. de XII-713 pages (18 × 13). Paris, J. de Gigord, 1920.

Georges De Dubor. Les mystères de l'Hypnose. Un vol. de XII-336 pages (19 × 12). Paris, Perrin, 1921.

E. Delsol. Considérations sur les unités fondamentales de la Physique. Un vol. de 31 pages (24 × 16). Paris, Chaix, 1919.

G. Denigès, Professeur de Chimie biologique à l'Université de Bordeaux. Précis de chimie analytique. Un vol. de 1155 pages (19 × 14). Paris, Maloine, 1920.

Alfred De Ridder. Histoire diplomatique du traité de 1839. Un vol. de 400 pages (21 × 16). Bruxelles, Vromant, 1920.

S. Duclaux. Les Colloïdes. Un vol. de 288 pages (18 × 12). Collection des actualités scientifiques. Paris, Gauthier-Villars, 1920.

Paul Dupont. Les problèmes de la philosophie et leur enchaînement scientifique. Le donné et l'objectif. Un vol. de VI-386 pages (23 × 15). Paris, Alcan, 1920.

M. A. Durgaprasanna Bhattacharyya. Vector Calculus. Un vol. de 90 pages (21 × 14). University of Calcutta, 1920.

A. S. Eddigton. Space, Time, and Gravitation. An outline of the general Relativity theory. Un vol. de 218 pages (23 × 15). Cambridge, University Press, 1920.

Eugène d'Eichthal. Du rôle de la mémoire dans nos conceptions métaphysiques, esthétiques, passionnelles, actives. Un vol. de 198 pages (19 × 13). Paris, 1920.

Eugène Evrard. Le Mystère des Abeilles. Un vol. de 394 pages (19 × 11). Tourcoing, Duvivier, 1921.

Antonin Eymieu. La part des croyants dans les progrès de la science au XIX^e^ siècle. Un vol. de 272 pages (19 × 13). Paris, Perrin, 1920.

— — La part des croyants dans les progrès de la science au XIX^e^ siècle. Seconde partie : Dans les sciences naturelles. 2^e^ édition. Un vol. de 308 pages (18 × 12). — Paris, Perrin, 1920.

S. A. Ewing. Thermodynamics for engineers. — Un vol. de XII-384 pages (23 × 15). Cambridge, University Press, 1920.

Alfred Ewing and Joseph Lamor. The scientific papers of Bertram Hopkinson. Un vol. de XXVIII-480 pages (25 × 17). Cambridge. University Press, 1921.

Lucien Fabre. Les Théories d'Einstein. Un vol. de 242 pages (19 × 12). Paris, Payot, 1921.

Paul Fauconnet. La Responsabilité. Étude de Sociologie. Un vol. de 400 pages (14 × 23) de la Bibliothèque de Philosophie contemporaine. Collection des Travaux de l'Année Sociologique. Paris, Alcan, 1920.

Duroquier Franck. Eléments de télégraphie sans fil pratique. Notions élémentaires. Construction d'Appareils et Installation de postes d'expériences. Applications de la T. S. F. 2^e^ éd. Un vol. de 132 pages (23 × 14) avec 76 figures. Paris, Dunod, 1920.

Xavier Francotte. Causeries sur des questions d'hygiène morale. Un vol. de 163 pages (20 × 14). Liége, 1919.

Jean Friedel, Docteur ès sciences. Personnalité biologique de l'Homme. Un vol. de 268 pages (19 × 12). Paris, Flammarion, 1921.

Joseph Fröbes, S. J. Lehrbuch der experimentellen Psychologie. Zweiter (Schluss-) Band. Un vol. de xx-704 pages (26 × 17). Freiburg i. Br. Herder, 1920.

Agostino Gemelli, O. F. M. Religione e scienza (Saggi apologetici II). Un vol. de xii-347 pages (19 × 13). Milano, « Vita e Pensiero », 1920.

— — Le dottrine moderne della delinquenza, Critica delle dottrine criminali positive. Terza edizione con aggiunte. Un vol. de 16-212 pages (19 × 13). Milano, « Vita e Pensiero », 1920.

Fr. Agostino Gemelli, O. F. M, Professore di psicologia sperimentale nella R. Accademia scientifico-lettararia di Milano. L'Origine della Famiglia. Un vol. de 132 pages (19 × 13). Milano, « Vita e Pensiero », 1921.

G. Gianfranceschi. La Fisica dei Corpuscoli. Molecole. Atomi-Elettroni. 2ª Edizione. Un vol. de viii-264 pages (22 × 14). Roma, Fratelli Bocca, 1920.

B. Goldschmidt et R. Braillard. La télégraphie sans fil au Congo Belge. Une œuvre du roi. Un vol. de 120 pages (25 × 16). Bruxelles, Dewit.

Goldziher. Le Dogme et la loi de l'Islam. Histoire du développement dogmatique et juridique de la religion musulmane. Traduction par **F. Arin**, Docteur ès sciences juridiques. Un vol. de viii-315 pages (25 × 17). Paris, Geuthner, 1920.

Léon Guillet. La Trempe et le revenu des produits métallurgiques. Un vol. de 260 pages (19 × 12). Paris, Doin, 1921.

Henri Guillou. Essai de Philosophie générale élémentaire. Un vol. de 192 pages (19 × 12). Paris, Alcan, 1921.

O. Hamelin. Le système d'Aristote. Publié par D. Robin, chargé de cours à la Sorbonne. Un vol. de 426 pages (23 × 15) de la Collection historique des grands Philosophes. Paris, Alcan, 1920.

J. L. S., M. A. Hatton. The theory of the imaginary in geometry, together with the trigonometry of the imaginary. Un vol. de 216 pages (22 × 16). Cambridge, University Press.

Dr Ph. Hauser. Évolution intellectuelle et religieuse de l'Humanité. Tome I. Un vol. de xiii-803 pages (22 × 14). Paris, Alcan, 1920.

F. Henroteau, Astronome à l'Observatoire d'Ottawa. Les étoiles simples. Un vol. de 244 pages (18 × 13) avec figures dans le texte *(Encyclopédie scientifique, Bibliothèque d'astronomie et de physique céleste)*. Directeur, F. Mascart. Paris, Doin, 1921.

L. Hickisch. La Chimie à la portée de tous. Notions de chimie générale et de chimie pure. Les applications de la chimie. Un vol. de 477 pages (21 × 14). Paris, Dunod, 1920,

André Hoornaert, Avocat v. d. g. Les durs réveils. Causeries familières et loyales sur les sanctions physiques des plaisirs de rencontre. Un vol. de x-124 pages (17 × 10). Bruxelles, Dewit, 1921.

Emile Hovelaque. Les Peuples d'Extrême-Orient. La Chine. Un vol. de 286 pages (19 × 12). Paris, Flammarion, 1920.

Christian Huyghens. Traité de la lumière. *(Les maîtres de la pensée scientifique)*. Un vol. de x-153 pages (18 × 12). Paris, Gauthier-Villars, 1920.

— — Œuvres complètes, publiées par la Société hollandaise des sciences. Tome XIV : calcul des probabilités ; travaux de mathématiques pures (1655-1666). Un vol. de 558 pages (28 × 22). La Haye, Nijhoff, 1920.

Dr C. Isenkrahe. Zur Elementaranalyse der Relativitätstheorie. Un vol. de 134 pages (22 × 14). Braunschweig, Vieweg und Sohn, 1920.

Charles Janet. Considérations sur l'être vivant. 1re partie. Résumé préliminaire de la constitution de l'orthobionte. Un vol de 80 pages (25 × 16). Beauvais, Dumontier, 1920.

Dr Pierre Janet. Les médications psychologiques. Etudes historiques, psychologiques et cliniques sur les méthodes de la psychothérapie. II. Les Economies psychologiques. Un vol. de 308 pages (17 × 25) Paris, Alcan, 1919.

— — Les médications psychologiques. Etudes historiques, psychologiques et cliniques sur les méthodes de la psychothérapie. III. Les acquisitions psychologiques. Un vol. de 494 pages (25 × 17). Paris, Alcan, 1919.

RR. PP. Janssen et **Savinac**, Professeurs à l'Ecole Biblique de Saint-Etienne, Jérusalem. Mission archéologique en Arabie. Coutumes des Fuqarâ. Supplément au vol. II. Un vol. de 98 pages (28 × 20). Paris, Geuthner, 1920.

J. H. Jeans. Problems of Cosmogony and stellar dynamics. Un vol. de 294 pages avec 5 pl. hors texte. Cambridge, University Press, 1919.

—— Ll. D., F. R. S., The dynamical theory of gases, third edition. Un vol. de 444 pages (25 × 17). Cambridge, University Press, 1921.

Lucas Keith. La conduction de l'influx nerveux. Publié par E. D. Adrian, traduit de l'anglais par Georges Matisse. Un vol. de 126 pages (21 × 31). Paris, Gauthier-Villars, 1920.

Lagasse de Locht. La Commission royale des Monuments et des Sites pendant la guerre. Un vol. de 28 pages (24 × 18). Bruxelles, Vromant, 1921.

—— M. Léon Dommartin. Allocution prononcée en séance de la Commission royale des Monuments et des Sites, le 27 septembre 1919. Bruxelles, Vromant, 1921.

Ch. Lahr, S. J. Cours de Philosophie à l'usage des candidats au Baccalauréat ès Lettres. 23e édition. Deux volumes (22 × 14). I. Psychologie. Logique, 754 pages. II. Morale, Métaphysique. Histoire de la Philosophie, 748 pages. Paris, Beauchesne, 1920.

Henri Lambert. Pax Economica. La liberté des échanges internationaux fondement nécessaire et suffisant de la paix universelle et permanente. Un vol. de 436 pp. (21 × 13). Bruxelles, Lamertin, 1920.

—— Le nouveau contrat social ou l'organisation de la Démocratie individualiste. Un vol. de 351 pages (20 × 13). Bruxelles, Lamertin, 1920.

Antoine Laurent Lavoisier. Mémoires sur la respiration et la transpiration des animaux. (Les maitres de la pensée scientifique). VII-67 pp. (18 × 12). Paris, Gauthier-Villars, 1920.

Lavoisier et Laplace. Mémoire sur la chaleur. Un vol. de 78 pages (18×12). Paris, Gauthier-Villars, 1920.

Dr Le Bec. Critique et contrôle médical des guérisons surnaturelles. Un vol. de 264 pages (19 × 12). Paris, Gabriel Beauchesne, 1920.

Lebon Ernest. Table de caractéristiques de base 30030 donnant en un seul coup d'œil les facteurs premiers des nombres premiers avec 30030 et inférieurs à 901 800 900. Tome I (fasc. 1).

Tableau I. $P = Bk + 1$. Table des caractéristiques $K < 30030$, K variant de 1 à 4680. Un vol. de XXIV-56 pp. (23 × 23). — Paris, Gauthier-Villars, 1920.

Maurice Lecat. Sur la décomposition des pénédéterminants et déterminants. (Estratto dal tomo XLIV (1920) dei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 13 pages (16 × 18). Palermo, 1920.

Henri Le Chatelier. Introduction à l'étude de la Métallurgie. — Le Chauffage industriel. Un volume de 534 pages (25 × 16). Paris, Dunod, 1920.

R. Ledoux-Lebard et A. Dauvillier. La Physique des rayons X. Un vol. de 441 pages (25 × 16). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Vernon Lee. Les mensonges vitaux. Etudes sur quelques variétés de l'obscurantisme contemporain. Un vol. de 368 pages (22 × 15). Paris, Alcan, 1921.

R. Leveugle. Précis de calcul géométrique. Préface de M. H. Fehr. Un vol. de LXI-400 pages (22 × 15). Paris, Gauthier-Villars, 1920.

C. J. Lewis. A Survey of symbolic Logic. Un volume de VI-406 pages (26 × 17). University of California press, Berkeley, 1918.

William C. Lewis. Mc C. Traité de Chimie physique. Traduit par H. Vigneron. Tome I. Théorie cinétique. Un vol. de XIV-416 pages (24 × 16). Paris, Masson, 1020.

Emile Longuet. De la Nébuleuse à l'Homme. Hypothèse cosmogonique et nouvelles théories sur la naissance et l'évolution de la vie terrestre. Un vol. de 752 pages (25 × 16). Paris, Alcan, 1921.

William Mac Dougall. The group mind. A sketch of the principles of collective psychology with some attempt to apply them to the interpretation of national life and character. Un vol. de XVI-304 pages (25 × 17). Cambridge University Press, 1920.

William Carmichael M. Intosh. The resources of the sea. Un vol. de XVI-352 pages (22.5 × 15). Cambridge, University Press, 1921,

P. A. Macmahon. An introduction to combinatory analysis. Un vol. de VIII-71 pages (22 × 14). Cambridge, University Press, 1920.

Rodolfo Maiocchi. Mons. Galileo e la sua condanna (Biblioteca di coltura religiosa). Un vol. de 224 pages (20 × 13). Milano, Vita e Pensiero, 1919.

G. Malgorn, lieutenant de vaisseau. Lexique technique. Anglais-français. Un vol. de 216 pages (19 × 12). Paris, Gauthier-Villars, 1920.

J. Marouzeau. Docteur ès lettres La Linguistique ou science du langage. Un vol. de 188 pages (19 × 12). Paris, Geuthner, 1921.

E. A. Martel, Membre du Conseil supérieur d'hygiène publique de France. Nouveau Traité des eaux souterraines. Un vol. de 840 pages (25 × 86). Paris, Doin, 1921.

Francesco Mastrodomenico. Il vuoto artificiale nella creazione. Un vol. de 218 pages (20 × 14). Sabanalarga, 1920.

Emm. de Martonne, Professeur de Géographie à la Sorbonne. Traité de Géographie physique. Climat. Hydrographie. Relief du sol. Biogéographie. Un vol. de XII-924 pages (25 × 16). Paris, Colin, 1920.

Louis Mengaud. Recherches géologiques dans la région Cantabrique. Un vol. de 370 pages (25 × 16.5). Paris, Hermann, 1920.

Félix Michaud. Energétique générale. Un vol. de VII-229 pages (25 × 18). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

P Mineur. Problèmes et épures de géométrie descriptive. Un vol. de 202 pages (22 × 14). Paris, Vuibert. 1920.

F. de Montessus de Ballore. Bibliografia general de temblores y terremotos. Un vol. de 1516 pages (27 × 18). Santiago de Chile, Imprenta universitaria, 1916-1919.

Maxime de Montmorand. Psychologie des mystiques catholiques orthodoxes Un vol. de X-264 pages (22 × 14). Paris, Alcan, 1921.

Abbé Th. Moreux. Les Enigmes de la Science. Un vol. de 304 pages (18 × 13). Paris, Doin, 1920.

—— Directeur de l'Observatoire de Bourges. Où en est l'Astronomie. Un vol. de VI-291 pages (20 × 12). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

R. S. Morrell and **A. De Waele**. Rubber, Resins, Paints and Varnishes. Un vol. de XII-236 pages (21 × 14) London, Baillière, 1921.

Thomas Muir. The theory of determinants in the historical order of development. Vol. III. The period 1861 to 1880. Un vol. de XXVI-504 pages (23 × 15). Macmillan, Londres, 1920.

Adrien Naville. Classification des sciences. Les idées maîtresses des sciences et leurs rapports. 3e édition. Un vol. de 322 pages (22 × 14). Paris, Alcan, 1920.

Edouard Naville. Professeur honoraire de l'Université de Genève, associé étranger de l'Institut de France. L'Evolution de la langue égyptienne et les langues sémitiques. Un vol. de IX-178 pages (26 × 18). Paris, Geuthner, 1920.

Albert Nodon. Essai d'astrométéorologie et ses applications à la prévision du temps. Un vol. de VIII-196 pages (23 × 14). Paris, Gauthier-Villars, 1920.

d'Ocagne, Chef de la Section de Nomographie, Professeur à l'Ecole polytechnique. Principes usuels de Nomographie, avec application à divers problèmes concernant l'artillerie et l'aviation. Un vol. de 67 pages (25 × 16). Paris, Gauthier-Villars, 1920.

H. Ollivier, Professeur à la faculté des sciences de l'Université de Strasbourg. Cours de Physique générale. Tome I. Unités C. G. S. et M. T. S. Gravitation. Electricité et Magnétisme. Ions, Electrons, Symétries. Un vol. de 749 pages (25 × 16). Paris, J. Hermann, 1921.

René Paucot. Le rôle des sciences dans l'éducation. Un vol. de 255 pages (19 × 12). Paris, Colin, 1920.

J. B. Pomey. Introduction à la théorie des courants téléphoniques et de la radiotélégraphie. Avec une Préface de A. Blondel *(Bibliothèque des Annales des postes, télégraphes et téléphones).* Un vol. de XIV-509 pages (26 × 17). Paris, 1920.

Dr René Potier. Contribution à l'étude des Dermato-Psychies. Pseudo-œdème catatonique. Un vol. de 47 pages (24 × 16). Toulouse, Drion, 1921.

A. Rateau. Théorie des hélices propulsives marines et aériennes et des avions en vol rectiligne. Un vol. de VI-158 pages (26 × 17). Paris, Gauthier-Villars, 1920.

E. K. Rideal, M. B. E., M. A. (Cantab), Ph. D. Ozone. A treatise of Electrochemistry. Un vol. de 197 pages (21 × 13). London, Constable and Company Ltd. Orange Street W. C., 1920.

Samuel Rideal and Associates. The Carbohydrates and Alcohol. Un vol. relié en toile de XV-216 pages (22 × 15) avec 11 fig. dans le texte, de la Collection Industrial Chemistry, edited by S. Rideal. Baillière, Tindall et Cox. Londres, 1920.

Augusto Righi. I fenomeni elettro-atomici sotte l'azione del magnetismo. Un vol. de XII-434 pages (24 × 16). Bologna, Lanichelli, 1918.

Eugenio Rignano. Psychologie du raisonnement. Un vol. de 544 pages (23 × 14) de la Bibliothèque de philosophie contemporaine. Paris, Alcan, 1920.

W. Riley, Professeur de Philosophie à Vassar College. Le Génie américain. Un vol. de IV-172 pages (19 × 12). Paris, Alcan, 1921.

Paul Rosset. Essais et analyses de produits commerciaux et industriels et exercices analytiques divers. Un vol. de XVI-126 pages (21 × 14). Paris, Dunod, 1920.

Louis Rougier. Les parologismes du rationalisme. Essai sur la théorie de la connaissance. Un vol. de XIV-532 pages (23 × 15) de la Bibliothèque de Philosophie contemporaine. Paris, Alcan, 1920.

—— La philosophie géométrique de Henri Poincaré. Un vol. de 208 pages (23 × 15) de la Bibliothèque de Philosophie contemporaine. Paris, Alcan, 1920.

Louis Roy, Professeur à la Faculté des Sciences. Cours de Mécanique appliquée. Tome II. Statique graphique et résistance des matériaux. Un vol. de 213 pages (25 × 17). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Rodolpho R. Schuller. A nova gazeta da Ferra do Brasil (Newen Zeytung auss Presillg Laudt) e sua origem mais provavel, pp. 31 (28 × 25). Rio de Janeiro, 1914

Gabriel Séailles, Professeur à la Sorbonne. La Philosophie de Jules Lachelier. Un vol. de 172 pages (18 × 12). Paris, Alcan, 1920.

L. Silberstein, Ph. D. Report on the Quantum Theory of spectra. Un vol. de 42 pages (22 × 14). London, Adam Hilger, 1920.

—— Ancien professeur de physique mathématique de l'Université de Rome. Eléments d'algèbre vectorielle et d'analyse vectorielle. Un vol. de VIII-129 pages (19 × 12). Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Lazare Spallanzani. Observations et expériences faites sur les animalcules des infusions *(Les maîtres de la pensée scientifique).* Vol. I (pp. VIII-105). — Vol. II (pp. 122) (18 × 12). Paris, 1920.

Comte de Sparre. Etude générale du coup de bélier dans une conduite de diamètre constant. Un vol. de 52 pages (24 × 15). Lyon, Legendre, 1915.

—— Coups de bélier dans les conduites formées de tronçons de diamètres différents. Un vol. de 88 pages (24 × 15). Lyon, Legendre, 1918.

M. Stuyvaert. Algèbre à deux dimensions. Un vol. de 223 pages (23 × 16). Gand, Van Rysselberghe et Rombaut, 1920.

—— Correspondant de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université de Gand. Statique. Dynamique. Un vol. de 206 pages (23 × 15). Gand, Van Rysselberghe et Rombaut, 1920.

J. Tillieux. Essai d'un traité élémentaire de physique selon les théories modernes. 2e édition entièrement refondue. Un vol. de 794 pages (24 × 16). Paris, Béranger, 1921.

Tisserand Pierre, Docteur ès lettres, agrégé de Philosophie. Œuvres de

Maine de Biran. Tome I. Le premier Journal. Un vol. de LXXVI-312 pages (22 × 14). Paris, Alcan, 1920.

Max Turmann. Problèmes Sociaux du Travail Industriel. Un vol. de XI-241 pages (19 × 12). Paris, Lecoffre, 1921.

José Ubach, S. J. La teoria de la relatividad en la Fisica moderna. Lorentz, Minkowski, Einstein. Un vol. de 45 pages (23 × 15 5). Buenos-Aires, Sebastian de Amorrortu, 1920.

Henri Viard. Vocabulaire en cinq langues de télégraphie et téléphonie sans fil avec les définitions officiellement adoptées et un répertoire alphabétique. Un vol. oblong (140 × 225) de XII-108 pages, cartonné. Paris, Gauthier-Villars, 1920.

Henri Vigreux. Le soufflage du verre dans les laboratoires scientifiques et industriels. Préface de M. Haller, Membre de l'Institut. 2^{e} édition. Un vol. de XIV + 268 pages (21 × 14) avec 256 fig. Paris, Dunod, 1920.

M. Weber, Professeur de Mathématiques spéciales préparatoires au Lycée de Dijon. Les Mathématiques de l'Elève Ingénieur. Algèbre et analyse, première partie, Notions fondamentales. Trigonométrie. Algèbre. Un vol. de XVI-495 pages (25 × 17). Paris, Dunod, 1920.

D^{r} Th. Weyl. Les méthodes de la Chimie organique, traduit par R. Cornubert, préparateur à la Sorbonne. Préface de M. Haller, de l'Institut. Tome IV, Monographies. Un vol. de XX-600 pages (19 × 28) avec fig. Paris, Dunod, 1920.

Aimé Witz. La crise du combustible et ses remèdes. Un vol. de 164 pages (18 × 12). Paris, Doin, 1920.

H. Willotte. La science et l'industrie françaises en 1919-1920. Ce qu'elles nous ont donné, ce qu'elles nous promettent. Un vol. de 379 pages (18 × 12) avec 7 fig, Paris, Doin, 1920.

Theo Wulf, S. J. Einsteins Relativitätstheorie. Un vol. de VI-86 pages (20 × 14). Verlagsanstalt Tyrolia. Innsbruck, 1921.

Annuario do Collegio Pedro II. I, II, III. 1914-1917. Rio de Janeiro, 1914-1917.

Archivio Italiano di Psicologia Pubblicato dai Proff. **F. Kiesow** e **A. Gemelli.** Volume I. Fascicoli I-II. Luglio 1920. 200 pages (25 × 18). Paraissant par vol. de 4 fascicules, sans date fixe. Istituto di psicologia sperimentale della R. Università di Torino. Via Po, 18.

Connaissance des temps et des mouvements célestes à l'usage des astronomes et des navigateurs pour l'an 1921, publiée par le Bureau des Longitudes. Un vol. de 752 pages (22 × 16). Paris, Gauthier-Villars, 1919.

Meteorologisches Observatorium der Universität Dorpat. Meteorologische Beobachtungen angestellt in Dorpat im Jahre 1919.

Meteorologisches Observatorium der Universität Dorpat. Schnee- und Eisverhältnisse in Eesti im Winter 1919/20.

Meteorologisches Observatorium der Universität Dorpat. Meteorologische Beobachtungen des landwirtschaftlich- meteorologischen Netzes in Eesti im Jahre 1919.

Optical methods in control and research laboratories. Un vol. de 30 pages (23 × 15). London, Adam Hilger Ltd.

Prace Matematyczno Fizyezne. Tome XXX. Un vol. de 257 pages (27 × 18). Varsovie, Sklad Glowny w Ksiegami Gebethnera J. Wolffa, 1919.

Prix Charles Lemaire en faveur des questions relatives aux travaux publics. Rapport. Un vol. de 9 pages (24 × 16). Bruxelles, Hayez, 1921.

Proceedings of the Benares Mathematical Society. Vol. I. 1919. Une brochure de 51 pages (24 × 16). Rameshwar Pathak. Benares, 1919.

Les Progrès de la Physique moléculaire. Conférences faites en 1913-1914 par **M^{me} P. Curie, J. Becquerel, M. de Broglie, A Cotton, Ch. Fabry, P. Langevin, Ch. Mauguin, A. Mouton.** Un vol. de 244 pages (25 × 17). Paris, Gauthier-Villars, 1914.

Rapport général sur les opérations et le fonctionnement du Comité National de Secours et d'Alimentation. III^e partie, t. I. 146 pages, t. II. 348 pages (34 × 21). Bruxelles.

Rapport général sur le fonctionnement et les opérations du Comité National de Secours et d'Alimentation. Quatrième Partie. Contrôle des garanties. Coopératives intercommunales. Organismes allemands. Inspection et contrôle. Un vol. de 476 pages (34 × 21). Bruxelles, Vromant, 1920.

Rapport spécial sur le fonctionnement et les opérations de la section agricole du Comité National de Secours et d'Alimentation. Un vol. de x + 466 pages (33 × 21). Bruxelles, Vromant, 1920.

Rapports spéciaux sur le fonctionnement de la Commission centrale des récoltes et du Bureau des récoltes. Un vol. de XVIII-369 et 230 pages (34 × 22). Bruxelles, Vromant, 1920.

Recettes domestiques et rurales. Formulaires du « Cosmos ». N° 7. Un vol. de 482 pages (10 × 18) avec 35 fig. Paris, Bonne Presse, 1920. Prix : 3 fr.

Refractive index, absorption, wavelenght. Rotatory power in relation to molecular structure. Un vol. de 17 pages (25 × 16). London, Adam Hilger Ltd. 1919.

Le Travail industriel aux États-Unis. Rapports de la mission d'enquête, t. I, 485 pages ; t. II, 896 pages (25 × 15). Bruxelles, Lesigne, 1920.

II. Périodiques

Académie des Sciences (Paris) : Comptes rendus hebdomadaires des séances.
Académie royale de médecine de Belgique (Bruxelles) :
  Bulletin, IV^e série ; t. XXX
  Mémoires couronnés et autres mémoires, t, XXI, f. 6 et 7.
  Procès-verbaux des séances.
Aéronautique (Paris).
Annales de la Société royale zoologique et malacologique de Belgique (Bruxelles) t. L.
Annuaire pour l'année 1921, publié par le Bureau des Longitudes (Paris).
L'Anthropologie (Paris).
Association des ingénieurs sortis de l'École de Liége :
  Annuaire.
  Bulletin, nouvelle série.
L'Astronomie. Bulletin de la Société astronomique de France (Paris).
Bulletin de la Société Centrale Forestière de Belgique (Bruxelles).
Bulletin de la Société Chimique de Belgique (Bruxelles).
Bulletin de la Société royale belge de Géographie.
Bulletin de la Société royale de Botanique de Belgique (Bruxelles).
Bulletin officiel de la direction des Recherches et Inventions (Paris).
Le Canada Français (Québec), t. V et VI.
Ciel et Terre (Bruxelles).
L'enseignement mathématique (Genève).
Études. Revue fondée par les Pères de la Compagnie de Jésus (Paris).
Institut International d'Agriculture, Rome :
  Bulletin du Bureau des renseignements agricoles et des maladies des plantes.
Journal de l'École Polytechnique, t. XX.
Journal des Sciences médicales (Lille).
Livres et Revues.
Ministère des Colonies de Belgique.
  Mémoires scientifiques.
Observatoire royal de Belgique (Bruxelles) :
  Annuaire astronomique.

  Annales astronomiques.
  Bulletin sismique.
Observatoire de Paris :
  Rapports annuels pour 1919.
  Publications.
Observatoire de Zi-Ka-Wei (Chine) :
  Bulletin sismique.
Polybiblion.
Revue de l'Ingénieur et Index technique (Bruxelles).
Revue de Philosophie (Paris).
Revue des Sciences philosophiques et théologiques.
Revue Générale (Bruxelles).
Revue générale des Sciences (Paris).
Revue Montalembert (Paris).
Revue Néo-Scolastique (Louvain).
Revue Scientifique (Paris).
Revue semestrielle des Publications mathématiques (Amsterdam).
Société Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie (Bruxelles) :
  Bulletin.
  Procès-verbaux des séances.
Société des sciences de Nancy :
  Bulletin des séances.
Journal de Physique et Radium :
  Résumé des communications de la Société française de physique.
Société géologique de Bruxelles (Liége) :
  Annales.
  Publications relatives au Congo belge.
Société Mathématique de France (Paris) :
  Bulletin.
Union des Ingénieurs sortis des Écoles spéciales de Louvain (Bruxelles).
Université de Rennes :
  Travaux scientifiques.
Ministerie van Landbouw, Nijverheid en Handel (La Haye) :
  Handelsberichten.
  Economische verslagen.
Koninklijke Academie van Wetenschappen (Amsterdam) :
  Proceedings of the section of sciences.
  Verhandelingen der afdeeling Natuurkunde.
Nieuw archief voor Wiskunde (Amsterdam).
Wiskundige Opgaven met de Oplossingen (Amsterdam).
Boletin de la Sociedad Iberica de Ciencias naturales (Barcelone).
Boletin mensual del Observatorio del Ebro (Tortosa, Espagne).
Iberica (Tortosa, Espagne).
Instituto Geologico de Mexico :
  Boletin.
Razon y Fe (Madrid).
Sociedad cientifica « Antonio Alzate » (Mexico) :
  Memorias y Revista.
Archivio di Storia della Scienza.
Atti della Reale Accademia dei Lincei (Rome).
Civiltà cattolica (Rome).
Gregorianum (Rome).
Rivista di filosofia Neo-Scolastica.
Rivista internationale di Scienze sociali e discipline ausiliarie (Rome).
La Scuola Cattolica (Milan).
Vita et Pensiero.
Broteria (La Guardia, Espagne) : Serie Botanica ; Serie Zoologica.

- The Month (Londres).
- Royal Society of Edimburg :
  - Proceedings.
  - Transactions.
- Studies, an Irish Quarterly Review (Dublin).
- America (New-York).
- The American Catholic Quarterly Review (Philadelphie).
- American Journal of Mathematics (Baltimore).
- American Mathematical Society (New-York) :
  - Bulletin.
- American Museum of Natural History :
  - Bulletin.
- The Astrophysical Journal (Chicago).
- The Catholic World.
- Illustrated World Magazine (Chicago).
- Journal of Geology.
- Missouri Botanical Garden.
- Naval Observatory U. S. (Washington) :
  - Annual Report.
- United Stated Geological Survey :
  - Bulletin.
  - Professional Papers.
  - Watersupply Papers.
- The Physical Review.
- Report of the Michigan Academy of Science.
- Stonyhurst College Observatory :
  - Results of observations.
- University of California Publications (Sacramento) :
  - Astronomy : Lick Observatory Bulletin.
  - Pathology.
  - Physiology.
  - Zoology.
- University of Kansas :
  - Science Bulletin.
- University of Illinois Monograph. t. V, f. 2.
- Yale University (New-Haven) :
  - Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences.
- New Zealand official Year Book. 1919.
- Publications of the Dominion Observatory (Ottawa).
- B. Akademie der Wissenschaften (Mathematisch-physikalische Klasse) :
  - Abhandlungen.
  - Sitzungsberichte.
- Naturwissenschaften (Springer, Berlin).
- Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft (Bâle .
- Bulletin de la Section scientifique de l'Académie Roumaine (Bucarest).
- Bibliotheca Nacional do Rio de Janeiro :
  - Annaes.
  - Boletin.
  - Relatorio.
- Observatorio Nacional do Rio de Janeiro :
  - Annuario.
- Antikvarisk tidskrift.
- Fornvännen Stockholm.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

Contributions à la Géométrie du triangle et du tétraèdre

PAR

V. THÉBAULT

I. — Sur certains triples de cercles

1. On doit à Hermary une élégante détermination des points de contact des sphères tangentes aux quatre plans des faces d'un tétraèdre (1). Cette démonstration a conduit M. Neuberg à traiter le nombre des solutions (2) et à énoncer le théorème suivant de géométrie plane (3).

Trois circonférences décrites des points A_1, A_2, A_3, *comme centres, se coupent, deux à deux, aux points* (U_1, U'_1), (U_2, U'_2), (U_3, U'_3),

---

(1) Hermary : *Solution simple d'un problème de Géométrie descriptive élémentaire* (Bulletin de la Société mathématique de France, 1879, p. 138).

(2) J. Neuberg : *Sur le nombre des sphères qui touchent quatre plans donnés* (Nouvelle Correspondance mathématique, 1880, p. 8).

(3) J. Neuberg : *Mémoire sur le tétraèdre* (Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique, 1884, p. 25). — *Sur les sphères tangentes aux quatre faces d'un tétraèdre* (Traité de Géométrie, par Rouché et de Comberousse, 8e édition, t. II, p. 653).

(U_4, U'_4). *Si l'on partage ceux-ci en deux groupes de trois points tels que* $U_1U_2U_3$ et $U'_1U'_2U'_3$, $U_1U_2U'_3$ et $U'_1U'_2U_3$, $U_1U_3U'_2$ et $U'_1U'_3U_2$, $U_2U_3U'_1$ et $U'_2U'_3U_1$, *les centres des deux circonférences passant par les triples d'un même groupe sont les foyers d'une conique inscrite au triangle* $A_1A_2A_3$ *et sont en ligne droite avec le centre radical des cercles* A_1, A_2, A_3. *Si le centre de la circonférence* $U_1U_2U_3$, *par exemple, tombe sur la circonférence* $A_1A_2A_3$, *les points* U'_1, U'_2, U'_3 *sont sur une même droite.*

Soient S le centre radical des cercles A_1, A_2, A_3, et α_1, α_2, α_3, les symétriques du centre ω du cercle circonscrit au triangle $U_1U_2U_3$, par exemple, par rapport à A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Les quatre points U_2, U_3, U'_2, U'_3 sont sur la circonférence A_1. Donc U_2U_3 est antiparallèle à $U'_2U'_3$ dans l'angle $(U_2U'_2, U_3U'_3)$. Mais U_2U_3, perpendiculaire au rayon $A_1\omega$ du cercle circonscrit au triangle $\alpha_2\omega\alpha_3$, est aussi antiparallèle à $\alpha_2\alpha_3$ dans l'angle $(\alpha_2\omega, \alpha_3\omega)$. Comme les angles $(U_2U'_2, U_3U'_3)$ et $(\alpha_2\omega, \alpha_3\omega)$ ont leurs côtés respectivement parallèles, $U'_2U'_3$ *et* $\alpha_2\alpha_3$ *sont parallèles.* De même $U'_2U'_1$ et $\alpha_2\alpha_1$, $U'_1U'_3$ et $\alpha_1\alpha_3$ sont deux couples de droites parallèles ; *les triangles* $U'_1U'_2U'_3$ *et* $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ *sont inversement homothétiques.* Le centre d'homothétie est le centre commun ω' de leurs cercles circonscrits, car le centre du cercle $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ est le point commun aux perpendiculaires abaissées de A_1, A_2, A_3 sur $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$, et celui du cercle $U'_1U'_2U'_3$ l'intersection des perpendiculaires issues de A_1, A_2, A_3 sur $U'_2U'_3$, $U'_3U'_1$, $U'_1U'_2$.

ω' a donc pour conjugué isogonal, par rapport à $A_1A_2A_3$, le point commun aux perpendiculaires tracées de A_1, A_2, A_3 sur U_2U_3, U_3U_1, U_1U_2, c'est-à-dire ω.

Si ω, par exemple, tombe sur la circonférence $A_1A_2A_3$, son conjugué isogonal ω' est rejeté à l'infini, et U'_1, U'_2, U'_3 sont en ligne droite.

Les perpendiculaires $(U_1U'_1, U_2U'_2, U_3U'_3)$ et $(\alpha_1\omega, \alpha_2\omega, \alpha_3\omega)$ à A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, déterminent deux points homologues S et ω qui sont, par suite, collinéaires avec ω' (¹).

(¹) Cette démonstration se rapproche un peu de celle que nous avons donnée (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1919, p. 57), pour déterminer les contacts des sphères tangentes aux quatre plans des faces d'un tétraèdre. L

Les cercles ω et ω' sont des cercles inverses, le pôle d'inversion étant S. Ce point S est donc un centre de similitude de ces cercles.

Désignons par K_1, K_2, K_3, les points $(U_2U_3, U'_2U'_3)$, $(U_3U_1, U'_3U'_1)$, $(U_1U_2, U'_1U'_2)$,

$$K_1U_2 \cdot K_1U_3 = K_1U'_2 \cdot K_1U'_3 ; \quad K_2U_3 \cdot K_2U_1 = K_2U'_3 \cdot K_2U'_1 ;$$
$$K_3U_1 \cdot K_3U_2 = K_3U'_1 \cdot K_3U'_2.$$

Ces points déterminent l'axe radical Δ des cercles ω et ω'. Δ est l'axe d'homologie des triangles $U_1U_2U_3$ et $U'_1U'_2U'_3$; cet axe est évidemment perpendiculaire à la droite $S\omega\omega'$ des deux centres. Le centre d'homologie est S.

Considérons les deux triangles $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ et $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$ obtenus avec ω et ω'. Les groupes homothétiques $(U_1U_2U_3, \alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3)$ et $(U'_1U'_2U'_3, \alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ donnent, en désignant par ρ, ρ' et δ les rayons des cercles ω, ω' et $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \equiv \alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$,

$$\frac{S\omega'}{S\omega} = \frac{\rho'}{\rho}, \quad \text{et} \quad \frac{S\omega'}{\omega'\omega} = \frac{U_1\alpha'_1}{\alpha'_1\omega} = \frac{\rho'}{\delta} ;$$

d'où
$$\frac{\rho'}{\rho - \rho'} = \frac{\rho'}{\delta}, \quad \text{soit} \quad \delta = \rho - \rho'.$$

S est le centre de similitude direct des cercles ω et ω', et l'axe focal de la conique de foyers ω, ω', inscrite au triangle $A_1A_2A_3$, égale $(\rho - \rho')$. Le théorème de M. Neuberg peut donc être ainsi complété :

Les triples de points considérés déterminent quatre groupes de deux triangles homologiques. Les centres ω *et* ω' *des deux circonférences passant par les triples d'un même groupe sont collinéaires avec le centre radical* S *des cercles* A_1, A_2, A_3, *et la droite* $S\omega\omega'$ *est perpendiculaire à l'axe d'homologie des triangles correspondants.* S *est l'un des centres de similitude des cercles* ω *et* ω'. *Les points* ω, ω' *sont les foyers d'une conique inscrite au triangle* $A_1A_2A_3$ *dont le cercle principal a pour diamètre la somme ou la différence des rayons des cercles* ω, ω'.

---

méthode que nous avons employée diffère de celles de Hermary et de M. Neuberg. Notre mémoire a, du reste, été écrit à un moment où nous ignorions les travaux de nos devanciers.

2. Il est intéressant de rapprocher les développements précédents des méthodes de Hermary et de M. Neuberg.

Pour fixer les idées, soient I et I_1 les centres des sphères inscrite et exinscrite dans le trièdre tronqué A_4 du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$. Si l'on rabat les faces $A_4A_2A_3$, $A_4A_3A_1$, $A_4A_1A_2$, sur le plan $A_1A_2A_3$ de manière à *écraser* la sphère I, les points de contact des faces rabattues viennent coïncider avec celui de la face $A_1A_2A_3$; ces points ayant été équidistants de A_4, le point de contact de $A_1A_2A_3$ est le centre ω du cercle passant par les trois rabattements U_1, U_2, U_3, de A_4. Si les rabattements écrasent la sphère I_1, le point de contact de cette sphère avec le plan $A_1A_2A_3$ est le centre ω' du cercle passant par les nouveaux rabattements U'_1, U'_2. U'_3 de A_4. On voit aussi que les points U_1 et U'_1, U_2 et U'_2, U_3 et U'_3 sont les intersections des circonférences décrites des points A_1, A_2, A_3 comme centres avec les rayons A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 (Hermary), et que les droites $U_1U'_1$, $U_2U'_2$, $U_3U'_3$ concourent au pied S de la hauteur issue de A_4.

Soient β_1, β_2, β_3 et β'_1, β'_2, β'_3 les coordonnées normales des points de contact ω, ω' du plan $A_1A_2A_3$ avec les sphères I et I_1, r et r_1 les rayons de ces sphères, et λ_1, λ_2, λ_3 les dièdres intérieurs A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 du tétraèdre ; on trouve facilement

$$\beta_1 = r \cot. \frac{1}{2}\lambda_1, \quad \beta'_1 = r_1 \operatorname{tg}. \frac{1}{2}\lambda_1, \text{ etc.};$$

d'où

$$\beta_1\beta'_1 = \beta_2\beta'_2 = \beta_3\beta'_3 = rr_1.$$

Par conséquent, les points ω, ω' sont les foyers d'une conique inscrite au triangle $A_1A_2A_3$ dont le demi-petit axe égale $\sqrt{rr_1}$ (Neuberg, *Mémoire sur le tétraèdre*, p. 23).

Si la droite A_4II_1 rencontre le plan $A_1A_2A_3$ en K, les points A_4, I, K, I_1, forment une division harmonique et il en est de même de leurs projections S, ω, K, ω'.

K *est le centre de similitude inverse des cercles* ω, ω', et

$$\frac{r}{r_1} = \frac{K\omega'}{K\omega} = \frac{S\omega'}{S\omega} = \frac{\rho'}{\rho}. \qquad (1)$$

Si l'on pose $\omega\omega' = d$ et que l'on utilise la valeur précédente du petit axe de la conique de foyers ω, ω' inscrite à $A_1A_2A_3$, on obtient la relation

$$d^2 = (\rho - \rho')^2 - 4rr_1,$$

qui, avec (1), conduit à ces expressions, peut-être nouvelles, des rayons r et r_1 des sphères, en fonction de d, ρ et ρ' :

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho'}{\rho}\left[(\rho - \rho')^2 - d^2\right]}\,; \quad r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\rho'}\left[(\rho - \rho')^2 - d^2\right]}.$$

Des résultats analogues concernent les sphères exinscrites et les sphères des combles du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$.

3. Lorsque les circonférences A_1, A_2, A_3 ont même rayon, le centre radical est le centre du cercle circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$. Les centres ω, ω', conjugués isogonaux par rapport à $A_1A_2A_3$ et collinéaires avec O, sont des points considérés par M. Fontené (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1905, p. 504) (¹). Leur cercle podaire touche le cercle des neuf points du triangle $A_1A_2A_3$ en un point φ, orthopôle du diamètre $O\omega\omega'$, par rapport à ce triangle.

Si l'on fait varier le rayon des circonférences A_1, A_2, A_3, on obtient une infinité de points ω, ω' qui sont situés sur une cubique anallagmatique par inversion isogonale Σ, circonscrite au triangle $A_1A_2A_3$ (²).

4. Une autre configuration remarquable est celle où les triangles $U_1U_2U_3$ et $U'_1U'_2U'_3$, par exemple, sont homologiques avec le triangle $A_1A_2A_3$. Puisque ces triangles sont aussi orthologiques avec $A_1A_2A_3$, la droite $S\omega\omega'$ contient les centres d'homologie Q et Q' (³).

Ce cas est réalisé, en particulier, lorsque les cercles A_1, A_2, A_3 se coupent sous un même angle quelconque 2θ.

Donnons quelques développements sur cette dernière figure. U_1 et U_2, U'_1 et U'_2, par exemple, sont des couples de points antihomologues sur les circonférences A_1 et A_2 ; donc U_1U_2, $U'_1U'_2$

(¹) Voir aussi Nouvelles Annales de Mathématiques, 1880, p. 259, *théorème XVI*, par Weill.

(²) Cette cubique Σ a été étudiée par Weber (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1906, p. 62) comme lieu des points de M. Fontené. Elle a été rencontrée fréquemment ; on peut consulter à ce sujet les *Notes bibliographiques sur les cubiques remarquables*, par Boutin et Vigarié (Journal de Mathématiques spéciales de G. de Longchamps, 1889, p. 265 et 1890, p. 63).

(³) Sondat, Intermédiaire des mathématiciens, 1894, p. 44.

déterminent par leur intersection les centres de similitude directs M et N des circonférences A_2 et A_3, et A_3 et A_1. Les triangles $A_1A_2A_3$, $U_1U_2U_3$, $U'_1U'_2U'_3$ sont deux à deux homologiques ; l'axe commun d'homologie est l'axe de similitude direct Δ_1 des cercles A_1, A_2, A_3. Δ_1 est d'ailleurs aussi l'axe radical des cercles ω, ω'.

Deux des cercles tangents aux trois cercles donnés ont donc leurs centres F_1, F_2 sur la perpendiculaire $S\omega\omega'$ à Δ_1 qui contient ici *sept points remarquables :* S, ω, ω', Q, Q', F_1, F_2. Soient α_1, β_1, γ_1 les contacts du cercle F_1 avec les cercles A_1, A_2, A_3, et P le centre de similitude direct de A_1 et A_2. α_1U_2 et β_1U_1 étant deux cordes antihomologues des cercles A_1, A_2,

$$P\alpha_1 \cdot P\beta_1 = PU_1 \cdot PU_2.$$

P est, par suite, situé sur l'axe radical des cercles F_1 et A_3, par conséquent sur leur tangente commune en γ_1. Comme

$$\overline{PU_1}^2 = PU_2 \cdot PU_3\,;\ \overline{NU_2}^2 = NU_1 \cdot NU_3\,;\ \overline{MU_3}^2 = MU_1 \cdot MU_2,$$

PU_1, NU_2, MU_3, sont les tangentes en U_1, U_2, U_3 au cercle ω ; de même PU'_3, NU'_2, MU'_1 touchent ω'.

Lorsque les cercles A_1, A_2, A_3 *se coupent sous un même angle, les triangles* $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $U_1U_2U_3$, $U'_1U'_2U'_3$ *ont donc même droite de Lemoine* Δ_1 *et* $S\omega\omega'$ *est le diamètre de Brocard commun à ces triangles.*

Ajoutons que, dans ce cas particulier, les cercles ω, ω' sont deux *cercles isogonaux*, d'angle θ, des cercles A_1, A_2, A_3 et que les hexagones $A_1U_3A_2U_1A_3U_2A_1$, $A_1U'_3A_2U'_1A_3U'_2A_1$, sont circonscrits chacun à un cercle de centre ω et ω'.

Remarque. — Ces propriétés peuvent être appliquées à la figure obtenue en rabattant, sur le plan $A_1A_2A_3$, les autres faces d'un tétraèdre dans lequel

$$\textit{angle}\ A_1A_4A_2 = A_2A_4A_3 = A_3A_4A_1,$$

et particulièrement lorsque le tétraèdre est trirectangle en A_4.

II. — SUR DES QUADRUPLES DE SPHÈRES

Les développements suivants, que nous croyons nouveaux, étendent ce qui précède à l'espace.

1. THÉORÈME. — *Quatre sphères décrites des points* A_1, A_2, A_3, A_4, *non situés dans un même plan, comme centres, se coupent, trois à trois, aux points* (U_1, U'_1), (U_2, U'_2), (U_3, U'_3), (U_4, U'_4). *Si l'on partage ceux-ci en deux groupes de quatre points*

$$U_1U_2U_3U_4 \text{ et } U'_1U'_2U'_3U'_4 \; ; \; U_1U_2U_3U'_4 \text{ et } U'_1U'_2U'_3U_4 \; ;$$

$$U_1U_3U_4U'_2 \text{ et } U'_1U'_3U'_4U_2 \; ; \; U_2U_3U_4U'_1 \text{ et } U'_2U'_3U'_4U_1 \; ;$$

les centres des deux sphères passant par des quadruples d'un même groupe sont conjugués isogonaux par rapport au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ *et sont en ligne droite avec le centre radical* S *des quatre sphères* A_1, A_2, A_3, A_4.

Soient α_1, α_2, α_3, α_4 les symétriques du centre ω de la sphère circonscrite au tétraèdre $U_1U_2U_3U_4$, par exemple, par rapport aux faces $A_2A_2A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$. Les six points U_2, U_3, U_4, U'_2, U'_3, U'_4, sont sur la sphère A_1. Le plan $U_2U'_3U_4$ coupe donc le tétraèdre $SU'_2U'_3U'_4$ suivant une section antiparallèle à $U'_2U'_3U'_4$. Mais ce plan $U_2U_3U_4$, perpendiculaire au rayon $A_1\omega$ de la sphère circonscrite au tétraèdre $\omega\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, puisque ω est sur la droite qui joint A_1 au centre du cercle circonscrit au triangle $U_2U_3U_4$, détermine aussi avec les arêtes de ce tétraèdre une section antiparallèle à la face $\alpha_2\alpha_3\alpha_5$. Comme les trièdres $SU'_2U'_3U_4$ et $\omega\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ ont leurs arêtes respectivement parallèles, les plans des faces $U'_2U'_3U'_4$ et $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ sont parallèles. De même $U'_3U'_4U'_1$ et $\alpha_3\alpha_4\alpha_1$, $U'_4U'_1U'_2$ et $\alpha_4\alpha_1\alpha_2$, $U'_1U'_2U'_3$ et $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ sont parallèles et *les tétraèdres* $U'_1U'_2U'_3U'_4$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, *sont inversement homothétiques.*

Le centre d'homothétie est le centre commun ω' de leurs sphères circonscrites, car le centre de la sphère $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ est le point commun aux perpendiculaires abaissées de $A_1A_2A_3A_4$ respectivement sur les plans $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_3\alpha_4\alpha_1$, $\alpha_4\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, et celui de la sphère $U'_1U'_2U'_3U'_4$ l'intersection des perpendiculaires issues des mêmes points sur des plans parallèles aux précédents.

Or, ω' a pour conjugué isogonal, par rapport au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, le point commun aux perpendiculaires des points A_1, A_2, A_3, A_4 sur les plans $U_2U_3U_4$, $U_3U_4U_1$, $U_4U_1U_2$, $U_1U_2U_3$, c'est-à-dire ω.

Les perpendiculaires ($U_1U'_1$, $U_2U'_2$, $U_3U'_3$, $U_4U'_4$) et ($\alpha_1\omega$, $\alpha_2\omega$, $\alpha_3\omega$, $\alpha_4\omega$) aux plans $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$, déterminent deux points homologues S et ω, dans l'homothétie précédente, qui sont par suite collinéaires avec ω'.

Les sphères ω, ω' sont d'ailleurs des sphères inverses, le pôle d'inversion étant S. S est l'un des centres de similitude de ces sphères.

Les intersections des droites U_1U_2 et $U'_1U'_2$, U_2U_3 et $U'_2U'_3$, U_3U_4 et $U'_3U'_4$, U_4U_1 et $U'_4U'_1$, sont situées dans le plan radical (π) des sphères ω et ω'. (π) est le plan d'homologie des tétraèdres $U_1U_2U_3U_4$ et $U'_1U'_2U'_3U'_4$. Ce plan est évidemment perpendiculaire à la droite $S\omega\omega'$ des centres. S est le centre d'homologie des deux tétraèdres. Si l'on désigne par ρ, ρ', δ les rayons des sphères ω, ω', $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \equiv \alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3\alpha'_4$, les groupes de tétraèdres homothétiques ($U_1U_2U_3U_4$, $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3\alpha'_4$) et ($U'_1U'_2U'_3U'_4$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$) donnent, comme en géométrie plane,

$$\frac{S\omega'}{S\omega} = \frac{\rho'}{\rho}, \quad \text{et} \quad \delta = \rho - \rho'.$$

Nous pouvons donc ajouter à notre théorème :

Les quadruples de points considérés déterminent quatre groupes de deux tétraèdres homologiques. Les centres ω, ω' *des deux sphères passant par les quadruples d'un même groupe sont collinéaires avec le centre radical* S *des sphères* A_1, A_2, A_3, A_4 *et la droite* $S\omega\omega'$ *est normale au plan d'homologie des tétraèdres correspondants.* S *est un centre de similitude des sphères* ω, ω'. *Les points* ω, ω' *sont les foyers d'une quadrique inscrite au tétraèdre* $A_1A_2A_3A_4$ *dont la sphère principale a pour diamètre la somme ou la différence des rayons des sphères* ω, ω'.

Si par les six arêtes d'un tétraèdre on mène des plans parallèles à une même droite Δ, les plans polaires isogonaux de ces plans, par rapport aux dièdres correspondants du tétraèdre, concourent en un même point M ; les projections de M sur les faces sont dans un même plan perpendiculaire à Δ. Le lieu de M est une surface du troisième ordre Σ passant par les arêtes du tétraèdre. Réciproquement, les projections de tout point M de la surface Δ, sur les faces du tétraèdre, sont dans un même plan.

Si le centre de la sphère $U_1 U_2 U_3 U_4$, *par exemple, est situé sur la surface* Σ, *les points* U'_1, U'_2, U'_3, U'_4 *sont dans un même plan, et réciproquement.*

2. Si les sphères A_1, A_2, A_3, A_4, ont même rayon, leur centre radical est le centre O de la sphère $A_1A_2A_3A_4$. Les centres des sphères ω, ω' sont alors analogues aux points de M. Fontené dans le triangle. Lorsque le rayon des sphères varie, ω et ω' décrivent une courbe anallagmatique par inversion isogonale dans le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$.

M. C. Servais nous a défini ce lieu : *une courbe gauche du septième ordre située sur cinq cônes du troisième ordre dont les sommets sont* O, A_1, A_2, A_3, A_4. Elle est tangente en A_1, A_2, A_3, A_4, O, aux droites $A_1\Omega$, $A_2\Omega$, $A_3\Omega$, $A_4\Omega$, $O\Omega$, Ω étant le conjugué isogonal de O par rapport au tétraèdre, et contient les *huit* centres des sphères tangentes aux quatre faces du tétraèdre ainsi que les points de rencontre d'une droite joignant deux des cinq points A_1, A_2, A_4, A_4, O avec le plan des trois autres points.

III. — PROPRIÉTÉS DE DEUX TRIPLES DE POINTS QUELCONQUES PRIS SUR LES CÔTÉS D'UN TRIANGLE

1. M. Neuberg a énoncé le théorème suivant (1) qui nous a conduit à une figure fort intéressante :

Une circonférence de centre ω *rencontre les côtés* BC, CA, AB *d'un triangle respectivement en les couples de points* (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2). *On sait que les circonférences* AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 *se coupent en un même point* F_1 ; *de même les circonférences* AB_2C_2, BC_2A_2, CA_2B_2 *passent par un même point* F_2. *Démontrer que* F_1 *et* F_2 *sont des points inverses (conjugués isogonaux) par rapport au triangle* ABC.

Désignons par M, N, P les milieux de BC, BA, AB ; O le centre du cercle ABC. Soient d'abord A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 trois couples de points de BC, CA, AB tels que les perpendiculaires aux milieux

---

(1) Journal de Vuibert, 44e année, p. 40.

M′, N′, P′ des segments A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 concourent en un même point ω. Si λ, μ, ν sont les angles que fait $O\omega$ avec BC, CA, AB et a, b, c les côtés du triangle,

$$\overline{BA_1}^2 - \overline{CA_1}^2 + \overline{BA_2}^2 - \overline{CA_2}^2 = 2a\,(\overline{A_1M} + \overline{A_2M}) = 2a \cdot \overline{O\omega} \cos \lambda,$$

$$\overline{CB_1}^2 - \overline{AB_1}^2 + \overline{CB_2}^2 - \overline{AB_2}^2 = 2b \cdot \overline{O\omega} \cos \mu,$$

$$\overline{AC_1}^2 - \overline{BC_1}^2 + \overline{AC_2}^2 - \overline{BC_2}^2 = 2c \cdot \overline{O\omega} \cos \nu\,;$$

d'où

$$(1) \qquad \Sigma\,(\overline{BA_1}^2 - \overline{CA_1}^2 + \overline{BA_2}^2 - \overline{CA_2}^2) = 2\overline{O\omega}\,(a \cos \lambda + b \cos \mu + c \cos \nu) = 0$$

Cette relation permet d'abord d'énoncer ce théorème qui généralise une propriété connue :

On marque sur les côtés BC, CD…, *d'un polygone plan ou gauche des points* A_1 *et* A_2, B_1 *et* B_2, …, *tels que les perpendiculaires (ou les plans perpendiculaires) aux milieux des segments* A_1A_2. B_1B_2. …, *soient concourantes. On a la relation*

$$\Sigma\,(\overline{BA_1}^2 - \overline{CA_1}^2 + \overline{BA_2}^2 - \overline{CA_2}^2) = 0.$$

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'appliquer la relation (1) aux triangles BCD, BDE, …, et d'additionner les égalités obtenues.

On sait que les droites F_1A_1, F_1B_1, F_1C_1 rencontrent BC, CA, AB sous un même angle θ_1, que F_2A_2, F_2B_2, C_2F_2 rencontrent ces côtés sous un angle θ_2. De plus,

$$\overline{BA_1}^2 - \overline{CA_1}^2 + \overline{CB_1}^2 - \overline{AB_1}^2 + \overline{AC_1}^2 - \overline{BC_1}^2 = -4\,\overline{ABC} \text{ cot. } \theta_1,$$

$$\overline{BA_2}^2 - \overline{CA_2}^2 + \overline{CB_2}^2 - \overline{AB_2}^2 + \overline{AC_2}^2 - \overline{BC_2}^2 = -4\,\overline{ABC} \cot \theta_2.\ (^1)$$

Ces relations transportées dans (1) donnent $\theta_1 = -\theta_2$.

Dans le cas général envisagé dans la relation (1), et plus particulièrement dans le théorème de M. Neuberg, les faisceaux $F_1\,(A_1, B_1, C_1)$ et $F_2\,(A_2, B_2, C_2,)$ rencontrent donc BC, CA, AB sous un même angle θ, les sens étant contraires.

---

(1) Third, PROCEEDINGS OF THE EDINBURG MATHEMATICAL SOCIETY, 1913, pp. 17-34.

La démonstration s'achève, lorsque A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, sont concycliques, en remarquant que les triangles AC_1B_1 et AC_2B_2, BA_1C_1 et BA_2C_2, CA_1B_1 et CA_2B_2 sont semblables.

On a, par exemple, les égalités d'angles

$$\begin{aligned} CF_1B_1 &= CA_1B_1 = CB_2A_2 = CF_2A_2, \\ F_1CB_1 &= F_1B_1A - CF_1B_1 = \theta - CF_1B_1 = \theta - CF_2A_2 \\ &= F_2A_2B - CF_2A_2 = A_2CF_2\ ; \end{aligned}$$

et CF_1, CF_2 sont isogonales dans l'angle C. Il en est de même de AF_1 et AF_2, de BF_1 et BF_2 dans les angles A et B.

2. A_1, B_1, C_1 et A_2, B_2, C_2 étant deux triples *quelconques* sur les côtés d'un triangle ABC, soient ω_a, ω_b, ω_c et ω'_a, ω'_b, ω'_c les centres des circonférences AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 et AB_2C_2, BC_2A_2, CA_2B_2. Ces circonférences déterminent deux points F_1, F_2, tels que

$$\begin{aligned} (BC,\ A_1F_1) &= (CA,\ B_1F_1) = (AB,\ C_1F_1) = \theta_1, \\ (BC,\ A_2F_2) &= (CA,\ B_2F_2) = (AB,\ C_2F_2) = \theta_2. \end{aligned}$$

Les côtés du triangle $\omega_a\omega_b\omega_c$ sont perpendiculaires aux milieux A'_1, B'_1, C'_1 des droites F_1A_1, F_1B_1, F_1C_1, qui font entre elles les angles $(\pi - A)$, $(\pi - B)$, $(\pi - C)$; donc ce triangle est semblable à ABC ; l'angle de similitude est évidemment $\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)$. F_1 est le point double de ces triangles, car les coordonnées normales de F_1 par rapport à $\omega_a\omega_b\omega_c$ sont égales à $\frac{F_1A_1}{2}$, $\frac{F_1B_1}{2}$, $\frac{F_1C_1}{2}$, et ses coordonnées normales par rapport à ABC sont égales à $F_1A_1 \sin\theta_1$, $F_1B_1 \sin\theta_1$, $F_1C_1 \sin\theta_1$. Le rapport de similitude de $\omega_a\omega_{\iota}\omega$ et ABC est donc égal à $\frac{1}{2\sin\theta_1}$.

Le cercle podaire $A'_1B'_1C_1$ de F_1, par rapport à $\omega_a\omega_b\omega_c$ est aussi le cercle podaire de l'inverse F'_1 de F_1 ; il a pour centre le milieu φ de $F_1\,F'_1$; mais le cercle $A_1B_1C_1$ a pour centre le symétrique de φ par rapport à F_1, c'est-à-dire le point F'_1. On verrait de même que les triangles $\omega'_a\omega'_b\omega'_c$ et ABC sont semblables, que F_2 en est le point double, que l'angle et le rapport de similitude sont respectivement $\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right)$ et $\frac{1}{2\sin\theta_2}$. L'angle de similitude de $\omega_a\omega^b\omega_c$ et $\omega'_a\omega'_b\omega'_c$ est par suite $(\theta_1 + \theta_2)$.

Les triangles $\omega_a\omega_b\omega_c$ *et* $\omega'_a\omega'_b\omega'_c$ *sont donc égaux dans le cas envisagé plus haut* (relation (1)), *et en particulier si les triples de points* (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2) *sont sur un même cercle.*

Dans ce dernier cas, F_1 et F_2 sont les conjugués isogonaux du centre ω du cercle, par rapport aux triangles $\omega_a\omega_c\omega_c$ et $\omega'_a\omega'_b\omega'_c$. F_1 et F_2 sont les homologues de ω dans ces triangles.

3. Les points de Brocard Ω_1 et Ω_2 sont les points communs aux triples de cercles $(\omega_a, \omega_b, \omega_c)$, $(\omega'_a, \omega'_b, \omega'_c)$, ainsi déterminés :

ω_a touche AB en B et contient C ;

ω'_a touche CA en C et contient B ; ... (1)

Ces cercles ont été appelés *cercles adjoints.*

Ω_1 et Ω_2 sont les points F_1, F_2, ci-dessus, lorsque la circonférence ω est circonscrite au triangle ABC. Son centre O est un point de Brocard commun aux triangles $\omega_a\omega_b\omega_c$ et $\omega'_a\omega'_b\omega'_c$, car

$$\textit{angle}\ (\omega_b\omega_c, O\omega_c) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \theta = \textit{angle}\ (\omega'_b\omega'_c\ O\omega'_c),$$

θ étant l'angle de Brocard du triangle ABC.

Comme Ω_1 et Ω_2 ont O pour homologue dans les triangles $\omega_a\omega_b\omega_c$, $\omega'_a\omega'_b\omega'_c$:

Les triangles $\omega_a\omega_b\omega_c$, $\omega'_a\omega'_b\omega'_c$, *égaux entre eux et semblables à* ABC, *ont un point commun de Brocard* O, *centre du cercle circonscrit à* ABC, *les autres étant respectivement les points de Brocard* Ω_1, Ω_2 *de* ABC.

Ces triangles $\omega_a\omega_b\omega_c$, $\omega'_a\omega'_b\omega'_c$ sont homologiques, le centre étant O. Pour déterminer l'axe d'homologie, remarquons que les quadrilatères $\omega_a\omega'_a\omega'_b\omega_b$, $\omega'_b\omega_b\omega'_c\omega_c$, $\omega'_c\omega_c\omega'_a\omega_a$, sont inscriptibles dans des circonférences Γ_1, Γ_2, Γ_3 ; car $B\omega_a$, $C\omega'_a$, par exemple, se coupent sur le cercle O en M ; si $\omega_a\omega'_a$ rencontre O en N, MN est bissectrice de l'angle $\omega_a M \omega'_a$, et

$$OM^2 = \overline{ON}^2 = O\omega_a \cdot O\omega'_a.$$

L'axe d'homologie est donc l'axe radical Δ *des cercles* φ_1 *et* φ_2 *circonscrits à* $\omega_a\omega_b\omega_c$ *et* $\omega'_a\omega'_b\omega'_c$.

---

(1) Les *Brocardische Gebilde* du Dr Emmerich (1891) signalent plusieurs de ces propositions comme dues à Hellwig (1855), Stoll et Artzt. Il y a cependant un intérêt scientifique à reproduire ces théorèmes peu connus auxquels nous sommes parvenu, avant d'être averti de leur ancienneté, et qui constituent une application intéressante des propriétés contenues au début du présent Mémoire.

Puisque Γ_1, Γ_2, Γ_2 sont orthogonales à la circonférence O, Δ passe en O. De plus, O est le centre de similitude interne des cercles égaux φ_1, φ_2 et *les points* φ_1, O, φ_2 *sont collinéaires*, O *est milieu de* $\varphi_1\varphi_2$. Comme *angle* $O\varphi_1\Omega_1 =$ *angle* $O\varphi_2\Omega_2$, et que $\varphi_2\Omega_2 = \varphi_2 O = O\varphi_1 = \varphi_1\Omega_1$, *l'axe d'homologie* Δ *des triangles* $\omega_a\omega_b\omega_c$, $\omega'_a\omega'_b\omega'_c$ *est le diamètre de Brocard* OK *du triangle* ABC.

φ_1 et φ_2 sont, de plus, conjugués isogonaux par rapport au triangle $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$; or $\Gamma_1\varphi_1$, $\Gamma_2\varphi_2$ sont perpendiculaires à $\omega_a\omega_b$, $\omega'_a\omega'_b$, ... ; φ_1, φ_2 *sont donc les points de Brocard du triangle* $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$.

Les droites $\varphi_1\Omega_1$, $\varphi_2\Omega_2$ déterminent le centre d'homothétie des triangles ABC. $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$, un point P du diamètre OK de Brocard.

Les distances des côtés homologues de ces triangles sont $\frac{a_3}{2S}$, $\frac{b_3}{2S}$, $\frac{c_3}{2S}$, a, b, c, S étant les côtés et l'aire de ABC.

Les coordonnées normales de P par rapport à ABC et $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ sont donc $(a_3b_3c_3)$, et P *est le conjugué isogonal du centre* D *d'homologie de* ABC *et de son premier triangle de Brocard.*

Autrement, si U et V sont les points où Γ_2P, Γ_3P rencontrent $\Gamma_1\Gamma_3$, $\Gamma_1\Gamma_2$, et que l'on pose

$$\Gamma_2 V : U\Gamma_1 = x, \quad \Gamma_3 U : U\Gamma_1 = y,$$

x et y vérifient les équations

$$a^4x + b^4y = c^4,$$

$$a^2x(b^2 + c^2 - a^2) + b^2y(a^2 + c^2 - b^2) = c^2(a^2 + b^2 - c^2),$$

c'est-à-dire, après réductions, l'équation

$$a^2x + b^2y = c^2,$$

qui exprime que P est un point de OK, inverse triangulaire du point D $\left(\frac{1}{a^3}, \frac{1}{b^3}, \frac{1}{c^3}\right)$.

Les coordonnées normales absolues de P, par rapport à ABC sont

$$\frac{2a^3S}{a^4 + b^4 + c^4}, \quad \frac{2b^3S}{a^4 + b^4 + c^4}, \quad \frac{2c^3S}{a^4 + b^4 + c^4},$$

et le rapport d'homothétie de ABC et $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$,

$$\frac{4S^2}{4S^2 + a^4 + b^4 + c^4}.$$

Remarque. — Il est aisé d'établir que le point K de Lemoine d'un triangle et le point de coordonnées barycentriques $(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ sont sur une parallèle au côté BC du triangle, lorsque

$$a^2 = \frac{\alpha^2(b^2 + c^2)}{\beta^2 + \gamma^2}.$$

(a^4, b^4, c^4) étant les coordonnées barycentriques de P, OK est parallèle à BC, si $a^2(b^2 + c^2) = b^4 + c^4$.

Ce triangle a été étudié déjà (1). Ajoutons ceci :

L'orthopôle de sa droite d'Euler OH *est un point de la médiane* AA_1 *tel que sa distance au pied* A′ *de la hauteur* AA′ *égale la somme de ses distances aux pieds* B′ *et* C′ *des autres hauteurs.*

IV. — TÉTRAÈDRE BORDÉ DE QUATRE PRISMES DROITS

A propos d'un théorème de M. Mantel, M. Neuberg a donné des propriétés intéressantes de la figure formée d'un triangle bordé de trois rectangles (Mathesis, 1906, p. 98) ; nous allons étendre ces propriétés au solide constitué par un tétraèdre quelconque bordé par quatre prismes droits.

1. Considérons un tétraèdre ABCD sur les faces duquel nous supposons placés des prismes droits de hauteurs arbitraires α, β, γ, δ : $ABCA_dB_dC_d$, $BCDB_aC_aD_a$, $CDAC_bD_bA_b$, $DABD_cA_cB_c$.

Pour simplifier, nous supposerons ces quatre prismes extérieurs au tétraèdre ABCD ; en introduisant la règle des signes, on rend d'ailleurs les résultats applicables aux cas où ces prismes sont tournés en partie vers l'intérieur de ABCD, ou en partie vers l'extérieur.

Si l'on prolonge les plans des faces des prismes qui sont parallèles aux faces du tétraèdre, on détermine un tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$

---

(1) E. Lemoine : Mathesis, 1885, p. 105. Association française pour l'Avancement des Sciences, 1885, p. 40 ; 1886, p. 99 ; 1891, p. 147.

homothétique à ABCD. Le centre de similitude L, situé à l'intersection des droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, a pour coordonnées normales α, β, γ, δ, car ses distances aux faces du tétraèdre ABCD sont proportionnelles à ses distances aux faces de $A_1B_1C_1D_1$ et, par suite, proportionnelles aux distances mutuelles des faces homologues des deux tétraèdres.

2. Les perpendiculaires abaissées de $A_1B_1C_1D_1$ respectivement sur les plans $A_bA_cA_d$, $B_aB_cB_d$, $C_aC_bC_d$, $D_aD_bD_c$, sont les isogonales des droites A_1A, B_1B, C_1C, D_1D, par rapport aux trièdres A_1, B_1, C_1, D_1. Ces perpendiculaires concourent donc en un même point Q′, conjugué isogonal de L par rapport au tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$.

De même les perpendiculaires abaissées de A, B, C, D sur les mêmes plans concourent en un point Q, conjugué isogonal de L dans le tétraèdre ABCD. Les coordonnées normales de Q sont $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}\right)$. *Les points* L, Q, Q′, *sont en ligne droite.*

3. Les plans $A_bA_cA_d$, $B_aB_cB_d$, $C_aC_bC_d$, $D_aD_bD_c$, suffisamment prolongés, déterminent un tétraèdre $A_2B_2C_2D_2$ qui est orthologique à $A_1B_1C_1D_1$ et ABCD. Les perpendiculaires abaissées de A_2, B_2, C_2, D_2, sur les faces correspondantes de ABCD concourent donc en un même point U.

4. Les perpendiculaires élevées en A_d, B_d, C_d, sur les plans $A_bA_cA_d$, $B_aB_cB_d$, $C_aC_bC_d$, parallèles aux perpendiculaires élevées de A, B, C, sur les mêmes plans, se rencontrent en un point D′. On obtient de même trois autres points A′, B′, C′.

Les tétraèdres $D'A_dB_dC_d$ et QABC, $A'B_aC_aD_a$ et QBCD, ..., sont respectivement équipollents, et

AQ est équipollent à A_bB', A_cC', A_dD' ;
BQ est équipollent à B_aA', B_cC', B_dD' ;
CQ est équipollent à C_aA', C_bB', C_dD' ;
DQ est équipollent à D_aA', D_bB', D_cC' ;

par suite les prismes $A_bA_cA_dB'C'D'$, ..., $D_aD_bD_cA'B'C'$, qui *bordent* le tétraèdre A′B′C′D′, sont aussi des prismes droits. Ainsi le solide peut être considéré comme provenant soit du tétraèdre ABCD bordé de quatre prismes droits, soit du tétraèdre A′B′C′D′ bordé de quatre prismes droits.

5. Les droites QD′ et AA_d, ..., QA′ et DD_a étant épuipollentes,

les coordonnées tétrapolaires du point Q dans le tétraèdre $A'B'C'D$ sont donc proportionnelles à α, β, γ, δ. Les distances de Q aux faces du tétraèdre $ABCD$ étant inversement proportionnelles à α, β, γ, δ, les produits de ces distances par QA', QB', QC', QD' sont égaux entre eux. Par suite les faces BCD, CDA, DAB, ABC, peuvent être regardées comme les plans polaires par rapport à une certaine sphère de centre Q, et les tétraèdres $ABCD$, $A'B'C'D'$, polaires réciproques par rapport à cette sphère, sont *à la fois orthologiques et hyperboloïdiques ;* le centre commun d'orthologie est le point Q.

6. Remarquons enfin que les perpendiculaires aux milieux a_1, b_1, c_1, d_1, des droites A_1A, B_1B, C_1C, D_1D, sur les plans $A_bA_cA_d$, ..., $D_aD_bD_c$, se coupent en un point Q_1, milieu de QQ'. Les points A_1, A_b, A_c, A_d, ..., D_1, D_a, D_b, D_c, D, sont sur les sphères de centres a_1, b_1, c_1, d_1, et les droites a_1Q_1, b_1Q_1, c_1Q_1, d_1Q_1, sont perpendiculaires aux plans des triangles $A_bA_cA_d$, ..., $D_aD_bD_c$, aux centres de leurs cercles circonscrits. Elles sont par conséquent perpendiculaires aussi aux plans des triangles $B'C'D'$, ..., $A'B'C'$, aux centres de leurs cercles circonscrits, et Q_1 *est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre* $A'B'C'D'$.

(Reçu le 7 avril 1921.)

Théorie analytique des turbines centripètes et centrifuges à réaction

PAR

M. le Comte DE SPARRE

PREMIÈRE PARTIE

La présente étude sera divisée en deux parties.

Dans la première je me propose d'étudier le cas où la turbine travaille à pleine charge dans les conditions normales. Je suppose, par suite, qu'à son entrée dans la turbine la vitesse relative de l'eau est sensiblement tangente à l'aube et que la veine liquide ne subit pas, le distributeur étant complètement ouvert, d'élargissement brusque à son entrée dans la roue.

Je me propose d'abord de déterminer les conditions du rendement maximum, soit d'une façon absolue, soit pour une valeur donnée de l'inclinaison initiale des aubes ou de la vitesse relative (¹). Ensuite, et c'est le but principal de cette première étude, je me propose de déterminer la variation que l'on peut obtenir pour les autres données de la question, en particulier pour la vitesse relative, si on sacrifie sur le rendement une petite fraction dans le voisinage de son maximum. Il arrive souvent en effet, surtout pour les basses chutes, que l'on a besoin d'une turbine aussi rapide que possible ; et l'on a, par suite, grand intérêt à se rendre compte de l'augmentation de la vitesse relative que l'on peut obtenir en sacrifiant sur le rendement une fraction déterminée.

(¹) Problème qui a déjà été résolu, par M. Rateau, dans son *Traité de Turbo-Machines,* au moyen d'une méthode graphique.

Dans la seconde partie j'étudierai le cas où la turbine travaille sous une charge réduite, ou avec une hauteur de chute variable, ainsi que cela se présente pour les basses chutes par suite des crues. Dans ce cas, par suite de la variation du degré de réaction, la vitesse de l'eau à l'entrée de la turbine fait avec l'aube un angle qui peut prendre une valeur importante et, de plus, si le distributeur est plus ou moins fermé, la veine subit un élargissement brusque. Il en résulte une nouvelle perte de charge, et pour en tenir compte j'admettrai avec Résal que la force vive perdue est égale à la force vive due aux vitesses variées.

Comme je le dis en commençant, j'admets dans cette première partie qu'à son entrée dans la roue la vitesse de l'eau est sensiblement tangente à l'aube et que la veine liquide ne subit pas d'élargissement brusque à son entrée dans la roue.

Je me propose de déterminer les conditions du maximum du rendement de la turbine, mais surtout, en développant les résultats que j'ai indiqués dans ma communication du 28 février 1921 à l'Académie des Sciences, de montrer comment on peut, en sacrifiant une faible fraction sur le rendement, amener la turbine à satisfaire à d'autres conditions qu'elle peut avoir à remplir.

I

Je désigne par H la hauteur de chute, par v_0 la vitesse, et par h_1 la pression en colonne d'eau, non compris la pression atmosphérique, à la sortie du distributeur, par h et h' les hauteurs des biefs d'amont et d'aval au-dessus du centre de la turbine ; de sorte que l'on a :

$$H = h - h'$$

Soient ensuite w_0 et w_1 les vitesses relatives de l'eau à l'entrée et à la sortie de la roue, u_0 et u_1 les vitesses d'un point des circonférences d'entrée et de sortie de la roue, r_0 et r_1 les rayons de ces circonférences.

Par suite, si ω est la vitesse angulaire de la roue, on a :

(1) $$\omega = \frac{u_0}{r_0} = \frac{u_1}{r_1}$$

Je désigne de plus par α_o et β_o les angles des vitesses v_o et w_o avec u_o, par β_1 celui de w_1 avec le prolongement, en sens contraire du mouvement, de u, et enfin par av_o^2 la perte de charge dans le distributeur et par $bw_1^2 + cw_o^2$ la perte de charge dans la roue.

Je néglige d'ailleurs, pour l'instant, l'influence des fuites et je me bornerai à en tenir compte, par un terme de correction, dans le rendement.

Pour cela, si ρ_o est le rendement, lorsqu'on ne tient pas compte des fuites, et ϵ_o le degré de réaction donné par la formule

$$\epsilon_o = 1 - \frac{v_o^2}{2gH} \tag{2}$$

j'admettrai que le rendement corrigé de l'influence des fuites sera donné par la formule

$$\rho_o' = \rho_o - e\epsilon_o \tag{3}$$

Je suppose d'ailleurs, ainsi que je l'ai dit, pour cette première partie, que la vitesse relative de l'eau à son entrée dans la roue est sensiblement tangente à l'aube, de sorte que β_o est aussi l'inclinaison initiale des aubes sur u_o.

On a, d'après ce qui précède, pour la vitesse à la sortie du distributeur :

$$v_o^2 = 2g(h - h_1) - av_o^2$$

d'où

$$2gh_1 = 2gh - (1 + a)\,v_o^2 \tag{4}$$

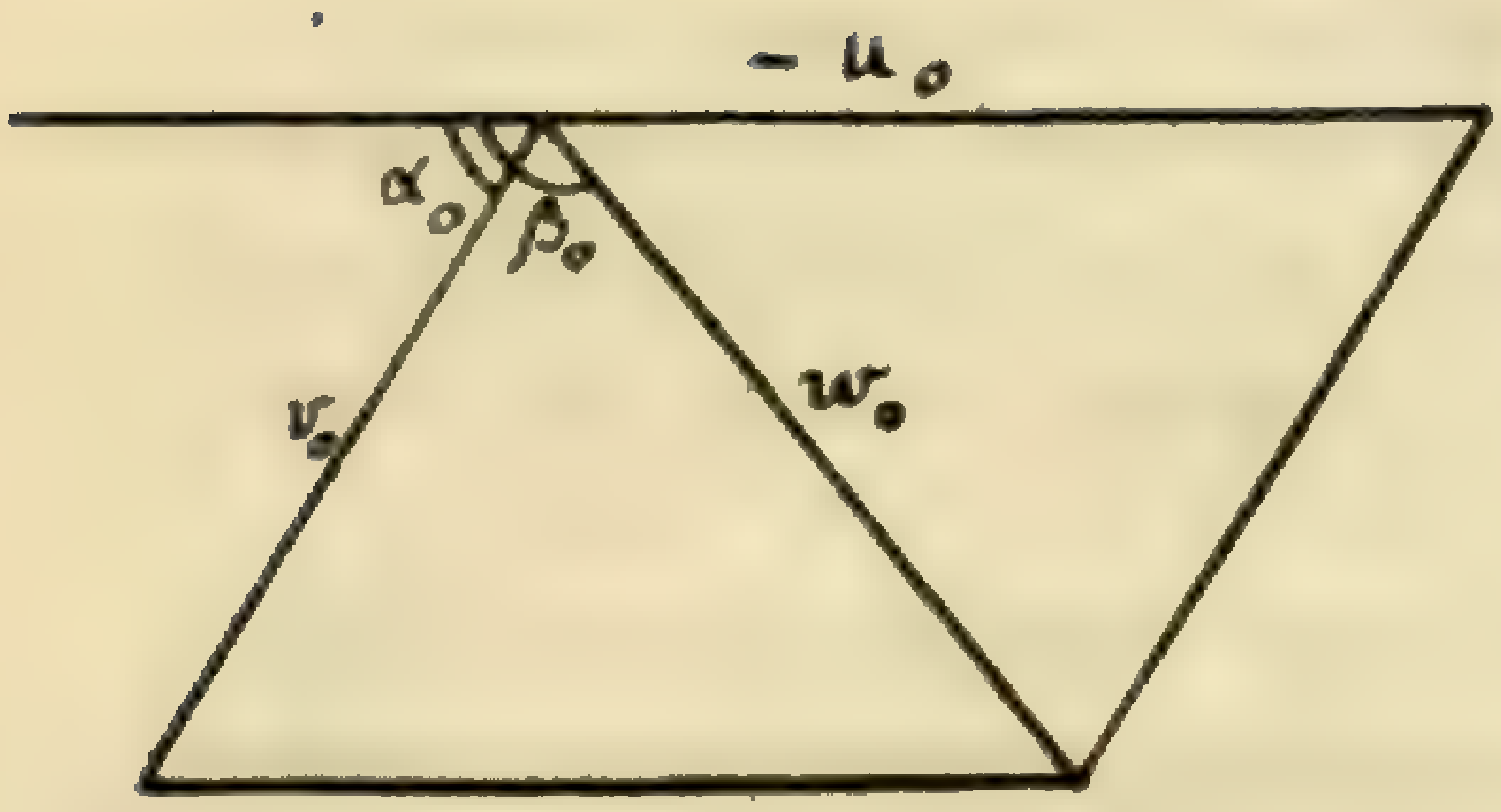
Le théorème de Bernoulli appliqué au mouvement relatif de l'eau dans la turbine donnera ensuite :

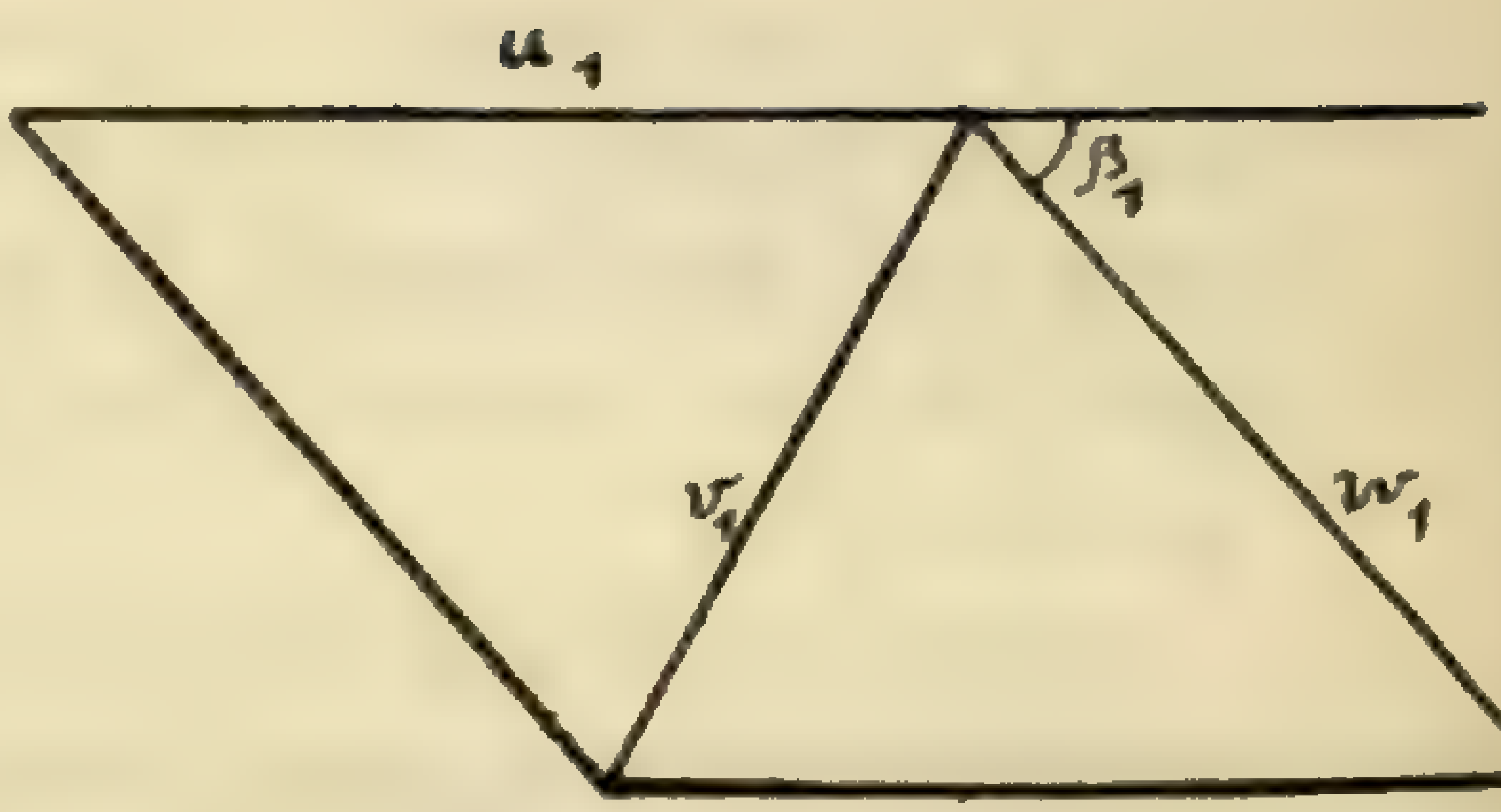
$$w_1^2 = w_o^2 + 2g(h_1 - h') + u_1^2 - u_o^2 - bw_1^2 - cw_o^2$$

En remplaçant dans cette équation h_1 par sa valeur (4) et tenant compte de $H = h - h'$, on aura :

$$w_1^2 = w_o^2 + 2gH + u_1^2 - u_o^2 - (1 + a)\,v_o^2 - bw_1^2 - cw_o^2 \tag{5}$$

D'ailleurs, w_o étant la résultante de v_o et de $-u_o$, le triangle de composition des vitesses à l'entrée de la roue donnera :





$$w_o^2 = v_o^2 + u_o^2 - 2\, v_o\, u_o \,\text{cas}\, \alpha_o \tag{6}$$

$$\frac{u_o}{\sin(\beta_o - \alpha_o)} = \frac{w_o}{\sin\alpha_o} = \frac{v_o}{\sin\beta_o} \tag{7}$$

et l'équation (5) deviendra par suite :

$$w_1^2 = 2g\text{H} - av_o^2 - 2u_o v_o \cos\alpha_o + u_1^2 - bw_1^2 - cw_o^2. \tag{8}$$

Nous poserons alors :

$$w_1 = \mu u_1 = \mu\, \frac{u_o r_1}{r_o}, \tag{9}$$

$$\xi^2 = \frac{u_o^2}{2g\text{H}}, \tag{10}$$

ξ étant ce que M. Rateau appelle la vitesse relative, on déduira alors des équations (7), (8), (9) et (10)

$$\frac{1}{\xi^2} = \frac{2\sin\beta_o\cos\alpha_o}{\sin(\beta_o - \alpha_o)} + \frac{r_1^2}{r_o^2}\left[\mu^2(1+b) - 1\right] + \tag{11}$$

$$+ \frac{c\sin^2\alpha_o + a\sin^2\beta_o}{\sin^2(\beta_o - \alpha_o)}.$$

Nous poserons ensuite :

$$z = \frac{r_o^2}{r_1^2\,\xi^2}, \qquad \text{X} = \frac{r_o^2}{r_1^2}\,\frac{\sin\beta_o}{\sin(\beta_o - \alpha_o)}. \tag{12}$$

On en déduit :

$$\frac{\text{X}\, r_1^2}{r_o^2}\sin(\beta_o - \alpha_o) = \sin[(\beta_o - \alpha_o) + \alpha_o] = \sin(\beta_o - \alpha_o)\cos\alpha_o +$$

$$+ \sin\alpha_o \cos(\beta_o - \alpha_o),$$

et par suite

$$(13) \qquad \cot(\beta_o - \alpha_o) = \frac{X\frac{r_1^2}{r_o^2} - \cos\alpha_o}{\sin\alpha_o},$$

puis

$$\frac{\sin^2\alpha_o}{\sin^2(\beta_o - \alpha_o)} = X^2\frac{r_1^4}{r_o^4} - 2X\frac{r_1^2}{r_o^2}\cos\alpha_o + 1,$$

et l'équation (11) deviendra :

$$(14) \qquad z = \frac{r_1^2}{r_o^2}(a + c)X^2 + 2(1 - c)X\cos\alpha_o + c\frac{r_o^2}{r_1^2} + \\ + \mu^2(1 + b) - 1.$$

Si nous désignons maintenant par v_1 la vitesse absolue de l'eau à la sortie de la turbine, on aura pour le rendement :

$$(15) \qquad \rho_o = 1 - \frac{av_o^2 + bw_1^2 + cw_o^2 + v_1^2}{2gH}.$$

Mais le triangle de composition des vitesses à la sortie donne, puisque v_1 est la résultante de w_1 et de u_1,

$$(16) \qquad v_1^2 = w_1^2 + u_1^2 - 2\,u_1\,w_1\cos\beta_1.$$

Mais on tire de (8) et de (16) :

$$av_o^2 + bw_1^2 + cw_o^2 + v_1^2 = 2(gH - u_ov_o\cos a_o - u_1w_1\cos\beta_1 + u_1^2),$$

et par suite

$$\rho_o = \frac{u_ov_o\cos\alpha_o + u_1w_1\cos\beta_1 - u_1^2}{gH},\ (^1)$$

ou, en tenant compte des relations (7) et (9),

$$\rho_o = \frac{u_o^2}{gH}\left(\frac{\sin\beta_o\cos\alpha_o}{\sin(\beta_o - \alpha_o)} + \frac{r_1^2}{r_o^2}\mu\cos\beta_1 - \frac{r_1^2}{r_o^2}\right)$$

---

(1) Équation que l'on déduit aussi du théorème des moments des quantités de mouvement (voir Rateau, *Traité des Turbo-Machines*, p. 13).

Mais, en tenant compte de (10) et de (12), cette équation devient :

$$\rho_o z = 2 \, X \cos \alpha_o + 2 \, \mu \cos \beta_1 - 2. \tag{17}$$

Mais si nous posons

$$y = \rho_o z + 2, \tag{18}$$

nous aurons :

$$\mu = \frac{y - 2 \, X \cos \alpha_o}{2 \cos \beta_1}, \tag{19}$$

et en portant cette valeur dans (14) il viendra :

$$X^2 \left[\frac{\cos^2 \alpha_o}{\cos^2 \beta_1} (1 + b) + \frac{r_1^2}{r_o^2} (a + c) \right] - \\ - 2 X \cos \alpha_o \left[\frac{1 + b}{2 \cos^2 \beta_1} y - 1 + c \right] + \frac{y^2 (1 + b)}{4 \cos^2 \beta_1} + c \frac{r_o^2}{r_1^2} - 1 - z = 0. \tag{20}$$

Si on suppose α_o et β_1 donnés, ainsi que ρ_o et z, et par suite y, cette équation fera connaître X, et par suite l'inclinaison initiale β_o à donner à l'aube. Mais pour que les racines de l'équation (20) soient réelles, il faut :

$$\cos^2 \alpha_o \left[\frac{1 + b}{2 \cos^2 \beta_1} \, y - 1 + c \right]^2 - \left[\frac{y^2 (1 + b)}{4 \cos^2 \beta_1} + \right. \\ \left. + \frac{c r_o^2}{r_1^2} - 1 - z \right] \left[\frac{\cos^2 \alpha_o}{\cos^2 \beta_1} (1 + b) + \frac{r_1^2}{r_o^2} (a + c) \right] > 0,$$

ou

$$y^2 \, \frac{r_1^2}{r_o^2} \, \frac{(a + c)(1 + b)}{4 \cos^2 \beta_1} + \frac{(1 - c)(1 + b) \cos^2 \alpha_o}{\cos^2 \beta_1} \, y - (1 - c)^2 \cos^2 \alpha_o \\ + \left[\frac{\cos^2 \alpha_o}{\cos^2 \beta_1} (1 + b) + \frac{r_1^2}{r_o^2} (a + c) \right] \left[\frac{c r_o^2}{r_1^2} - 1 - z \right] < 0.$$

Mais, si nous posons

$$A = \frac{1}{a + c} + \frac{r_1^2}{r_o^2} \, \frac{\cos^2 \beta_1}{(1 + b) \cos^2 \alpha_o}, \qquad B = \frac{1 - c}{a + c}, \tag{21}$$

cette condition deviendra :

$$y^2 + 4\mathrm{B}\,\frac{r_o^2}{r_1^2}\cos^2\alpha_o\,y - 4\cos^2\alpha_o\,\mathrm{A}\,\frac{r_o^2}{r_1^2}\left(1 + z - \frac{cr_o^2}{r_1^2}\right) -$$

$$- 4\mathrm{B}^2\,\frac{a+c}{1+b}\cos^2\alpha_o\cos^2\beta_1\,\frac{r_o^2}{r^{12}} < 0.$$

Il résulte de là que si on suppose ξ et par suite z donnés, on devra avoir :

$$y < \mathrm{Y}_1,$$

Y_1 étant la racine positive de l'équation

$$(22) \qquad \mathrm{Y}^2 + 4\mathrm{B}\,\frac{r_o^2}{r_1^2}\cos^2\alpha_o\,\mathrm{Y} - 4\cos^2\alpha_o\,\frac{r_o^2}{r_1^2}\,\mathrm{A}\left(1 + z - \frac{cr_o^2}{r_1^2}\right) -$$

$$- 4\,\mathrm{B}^2\,\frac{a+c}{1+b}\,\frac{r_o^2}{r_1^2}\cos^2\alpha_o\cos^2\beta_1 = 0.$$

On déduit d'ailleurs de l'équation (18)

$$(23) \qquad \rho_o = \frac{y-2}{z} = (y-2)\,\frac{r_1^2}{r_o^2}\,\xi^2,$$

et on aura, par suite, pour la plus grande valeur ρ_1 du rendement correspondant à cette valeur de ξ :

$$(24) \qquad \rho_1 = (\mathrm{Y}_1 - 2)\,\frac{r_1^2}{r_o^2}\,\xi^2.$$

Pour résoudre l'équation (22) nous poserons d'ailleurs :

$$\mathrm{A}_1 = 2\mathrm{B}\,\frac{r_o^2}{r_1^2}\cos^2\alpha_o,$$

$$\mathrm{B}_1 = 4\cos^2\alpha_o\,\frac{r_o^2}{r_1^2}\,\mathrm{A}\left(1 + z - c\,\frac{r_o^2}{r_1^2}\right) +$$

$$+ 4\,\mathrm{B}^2\,\frac{a+c}{1+b}\,\frac{r_o^2}{r_1^2}\cos^2\alpha_o\cos^2\beta_1,$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\sqrt{\mathrm{B}_1}}{\mathrm{A}_1},$$

et nous aurons alors :

$$Y_1 = \sqrt{B_1}\,\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

Pour cette valeur Y_1 de y, les racines de l'équation (20) sont égales et on a par suite pour la valeur correspondante X_1 de X

$$X_1 = \frac{\cos\alpha_o\left[\frac{1+b}{2\cos^2\beta_1}Y_1 - 1 + c\right]}{\frac{\cos^2\alpha_o}{\cos^2\beta_1}(1+b) + \frac{r_1^2}{r_o^2}(a+c)},$$

ce qui peut s'écrire, en tenant compte des valeurs (21) de A et B,

$$(25) \qquad X_1 = \frac{\frac{Y_1}{2(a+c)} - B\frac{\cos^2\beta_1}{1+b}}{A\cos\alpha_o}.$$

X_1 étant connu, on en conclut β_o par la formule (13). On aura ensuite par les formules (2) et (7)

$$1 - \epsilon_o = \frac{v_o^2}{2gH} = \frac{u_o^2}{2gH}\,\frac{\sin^2\beta_o}{\sin^2(\beta_o - \alpha_o)},$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (10) et de (12),

$$(26) \qquad 1 - \epsilon_o = \frac{r_1^4}{r_o^4}\,\xi^2 X_1^2.$$

Enfin si S_o est la surface totale d'entrée et S_1 la surface de sortie de la roue (^{1}), l'équation de continuité donnera :

$$S_o w_o \sin\beta_o = S_1 w_1 \sin\beta_1,$$

d'où

$$\frac{S_o}{S_1} = \frac{w_1\sin\beta_1}{w_o\sin\beta_o},$$

(^{1}) S_o S_1 étant supposé affecté d'nn facteur qui tienne compte du coefficient de contraction.

ou, en tenant compte de (7) et de (9),

$$\frac{S_o}{S_1} = \frac{\mu r_1 \sin \beta_1 \sin (\beta_o - \alpha_o)}{r_o \sin \beta_o \sin \alpha_o};$$

d'ailleurs dans le cas actuel on déduit de (19) et de (12)

$$(26') \qquad \mu = \frac{Y_1 - 2X_1 \cos \alpha_o}{2 \cos \beta_1},$$

$$\frac{\sin \beta_o}{\sin (\beta_o - \alpha^o)} = \frac{r_1^2 X_1}{r_o^2};$$

de sorte que l'on aura en définitive :

$$(27) \qquad \frac{S_o r_1}{S_1 r_o} = \frac{(Y_1 - 2X_1 \cos \alpha_o) tg \beta_1}{2X_1 \sin \alpha_o}.$$

Si, par exemple, on suppose une turbine centripète pour laquelle on ait $\alpha_o = \beta_1 = 20^\circ$ et $r_1 = 0{,}8 r_o$ et que l'on veuille pour la vitesse relative $\xi = 1$, en prenant pour les coefficients a, b et c les valeurs $a = b = 0{,}06$, $c = 0{,}225$ (¹), on trouve pour le maximum de rendement :

$$\rho_1 = 0{,}8159$$

et ensuite pour les autres données :

$$\beta_o = 156^\circ 44'$$

$$\mu = 0{,}8420$$

$$\epsilon_o = 0{,}6678$$

$$\frac{S_o r_1}{S_1 r_o} = 0{,}9351.$$

On aura de plus par la formule (3) pour le rendement corrigé de l'influence des fuites, en prenant $e = 0{,}08$,

$$\rho' = \rho - 0{,}08 \epsilon_o = 0{,}7625.$$

(¹) Valeurs qui correspondent à celles indiquées par M. Rateau dans son *Traité des Turbo-Machines*.

Si nous considérons ensuite une turbine centrifuge pour laquelle $r_1 = 1{,}25 r_o$, $\alpha_o = 29°$, $\beta_1 = 14°$, a, b, c et e gardant d'ailleurs les mêmes valeurs, on trouve, toujours pour $\xi = 1$,

$$\rho_1 = 0{,}7523$$

$$\beta_o = 151°45'$$

$$\mu = 0{,}8855$$

$$\frac{S_o r_1}{S_1 r_o} = 1{,}5247$$

$$\rho' = 0{,}7045$$

$$\epsilon_o = 0{,}5976.$$

II

Si maintenant au lieu de supposer ξ donné on veut lui attribuer la valeur qui fera prendre à ρ_1 la plus grande valeur possible, on devra dans l'équation (22) remplacer z par sa valeur déduite de (18)

$$z = \frac{Y - 2}{\rho_o}, \tag{28}$$

et l'équation (22) deviendra alors

$$Y^2 - \frac{4 r_o^2}{r_1^2} \cos^2\alpha_o \left(\frac{A}{\rho_o} - B\right) Y + 4 \cos^2\alpha_o \frac{r_o^2}{r_1^2} A \left(\frac{2}{\rho_o} - 1 + \frac{c r_o^2}{r_1^2}\right) - \\ - 4B^2 \frac{a + c}{1 + b} \cos^2\alpha_o \cos^2\beta_1 \frac{r_o^2}{r_1^2} = 0. \tag{29}$$

Pour que les racines de cette équation soient réelles, il faut :

$$\left(\frac{A}{\rho_o} - B\right)^2 - \frac{r_1^2}{r_o^2} \frac{A}{\cos^2\alpha_o} \left(\frac{2}{\rho_o} - 1 + \frac{c r_o^2}{r_1^2}\right) + B^2 \frac{a + c}{1 + b} \frac{r_1^2}{r_o^2} \frac{\cos^2\beta_1}{\cos^2\alpha_o} \geqslant 0,$$

ou

$$\frac{A^2}{\rho_o^2} - 2A\left(B + \frac{r_1^2}{r_o^2 \cos^2\alpha_o}\right) \frac{1}{\rho_o} + B^2 \left(1 + \frac{a + c}{1 + b} \frac{r_1^2}{r_o^2} \frac{\cos^2\beta_1}{\cos^2\alpha_o}\right) + \\ + \left(\frac{r_1^2}{r_o^2} - c\right) \frac{A}{\cos^2\alpha_o} \geqslant 0.$$

Mais, si on tient compte de la relation

$$A = \frac{1}{a+c} + \frac{1}{1+b}\,\frac{r_1^2}{r_0^2}\,\frac{\cos^2\beta_1}{\cos^2\alpha_0} \geqslant 0,$$

cette relation pourra s'écrire :

$$\frac{A}{\rho_0^2} - 2\left(B + \frac{r_1^2}{r_0^2\cos^2\alpha_0}\right)\frac{1}{\rho_0} + B^2(a+c) + \frac{1}{\cos^2\alpha_0}\left(\frac{r_1^2}{r_0^2} - c\right) \geqslant 0$$

et pour que cette inégalité soit satisfaite il faut :

$$\rho_0 \leqslant \frac{1}{\zeta_1},$$

ζ_1 étant la plus grande racine de l'équation

(30) $$A\zeta^2 - 2\left(B + \frac{r_1^2}{r_0^2\cos^2\alpha_0}\right)\zeta + B^2(a+c) + \qquad (1)$$

$$+ \frac{1}{\cos^2\alpha_0}\left(\frac{r_1^2}{r_0^2} - c\right) = 0 \text{ (1)}.$$

On aura donc pour la plus grande valeur possible ρ_m de ρ

$$\rho_m = \frac{1}{\zeta_1}.$$

Si d'ailleurs on pose

(31) $$M = B + \frac{r_1^2}{r_0^2\cos^2\alpha_0}, \quad P = B^2(a+c) + \frac{1}{\cos^2\alpha_0}\left(\frac{r_1^2}{r_0^2} - c\right)$$

(32) $$\sin\psi = \frac{\sqrt{AP}}{M}$$

on aura :

$$\zeta_1 = \sqrt{\frac{P}{A}}\cot\frac{\psi}{2}$$

---

(1) L'équation (30) a une racine ζ_1 supérieure à 1, et une autre comprise entre 0 et 1, qui ne répond pas à la question ; en effet pour $\zeta = 1$ le premier nombre de (30) se réduit à

$$\frac{-c(a + c\sin^2\alpha_0)}{(a+c)\cos^2\alpha_0} - \frac{r_1^2}{r_0^2\cos^2\alpha_0}\left(1 - \frac{\cos^2\beta_1}{1+b}\right)$$

et par suite

$$\rho_m = \sqrt{\frac{A}{P}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\psi}{2}. \tag{33}$$

Comme d'ailleurs pour cette valeur de ρ les racines de l'équation (29) sont égales, on aura :

$$Y_1 = \frac{2r_o^2}{r_1^2}\left(\frac{A}{\rho_m} - B\right)\cos^2\alpha_o, \tag{33'}$$

et on déduira ξ par l'équation (24) qui donne ici :

$$\xi^2 = \frac{\rho_m}{Y_1 - 2}\,\frac{r_o^2}{r_1^2}. \tag{34}$$

On aura ensuite X_1, β_o, ϵ_o et $\frac{S_o r_1}{S_1 r_o}$ par les équations (25), (13), (26) et (27).

Si on suppose d'abord une turbine centripète, pour laquelle $\alpha_o = \beta_1 = 20°$, $r_1 = 0{,}8 r_o$ et en prenant comme plus haut $a = b = 0{,}06$, $c = 0{,}225$, $e = 0{,}08$, on trouve :

$$\rho_m = 0{,}9005, \quad X_1 = 1{,}7284, \quad \beta_o = 84°3', \quad \epsilon_o = 0{,}4444$$

$$\xi = 0{,}6739, \quad \frac{S_o r_1}{S_1 r_o} = 0{,}5696, \quad \mu = 0{,}9845$$

et par la formule (3)

$$\rho' = 0{,}8649.$$

Si on suppose ensuite une turbine centrifuge, pour laquelle $\alpha_o = 20°$, $\beta_1 = 15°$, $r_1 = 1{,}25 r_o$, en conservant les mêmes valeurs pour a, b, c, e, on trouve :

$$\rho_m = 0{,}8690, \quad X_1 = 0{,}7929, \quad \beta_o = 68°49', \quad \epsilon_o = 0{,}4368$$

$$\xi = 0{,}6057, \quad \frac{S_o r_1}{S_1 r_o} = 1{,}0008, \quad \rho' = 0{,}8341, \quad \mu = 1{,}0486.$$

III

Lorsqu'on veut une turbine rapide (¹), il conviendra toutefois de faire un certain sacrifice sur le rendement, qui varie lentement dans le voisinage de son maximum, de façon à obtenir une valeur plus grande pour ξ.

Pour cela on calculera la valeur de ρ_m comme nous venons de le dire, puis on prendra une valeur de ρ_o légèrement inférieure à ρ_m et on calculera la valeur correspondante de Y par l'équation (29).

Pour résoudre cette équation (29) nous poserons :

$$(35) \qquad M_1 = \frac{2r_{o1}}{r_1^2}\left(\frac{A}{\rho_o} - B\right)\cos^2\alpha_o$$

$$(36) \quad P_1 = 4A\frac{r_o^2}{r_1^2}\,\frac{2}{\rho_o} - 1 + c\,\frac{r_o^2}{r_1^2}\Big) - 4B^2\,\frac{a+c}{1+b}\,\frac{r_o^2}{r_1^2}\cos^2\alpha_o\cos^2\beta_1$$

$$(37) \qquad \sin\psi = \frac{\sqrt{P_1}}{M_1}.$$

Nous en conclurons deux valeurs de Y_1 correspondant à la même valeur de ρ_o

$$(38) \qquad Y_1 = \sqrt{P_1}\,\mathrm{tg}\,\frac{\psi}{2}$$

$$Y_2 = \sqrt{P_1}\cot\frac{\psi}{2}$$

Mais si nous voulons celle qui donne la plus grande valeur de ξ comme

$$\xi^2 = \frac{r_o^2}{r_1^2}\,\frac{\rho_o}{Y_1 - 2},$$

nous devons prendre la plus petite Y_1 et nous aurons :

$$(39) \qquad \xi^2 = \frac{r_o^2}{r_1^2}\,\frac{\rho_o}{Y_1 - 2}.$$

(¹) J'entends par là une turbine ayant une valeur de ξ aussi grande que possible, ainsi que cela a lieu souvent pour les basses chutes.

Comme pour cette valeur Y_1 de Y les racines de l'équation (20) sont encore égales, on aura X_1, β_o, ϵ_o et $\frac{S_o r_1}{S_1 r_o}$ par les formules (25), (13), (26) et (27).

Si, par exemple, pour la turbine envisagée précédemment où $\alpha_o = \beta_1 = 20°$, $a = b = 0{,}06$, $c = 0{,}225$, $r_1 = 0{,}8 r_o$ et pour laquelle nous avons trouvé

$$\rho_m = 0{,}9005,$$

nous prenons

$$\rho_o = 0{,}89,$$

nous trouverons

$$Y_1 = 0{,}8262,\quad \xi = 0{,}7811,\quad \beta_o = 121°51',\quad \epsilon_o = 0{,}5402,\quad \rho' = 0{,}85.$$

Si nous avions pris $\rho_o = 0{,}88$, nous trouverions

$$Y_1 = 4{,}0145,\quad \xi = 0{,}8262,\quad \beta_o = 133°37',\quad \epsilon_o = 0{,}5727,\quad \rho' = 0{,}83.$$

On voit qu'en sacrifiant 1 pour cent sur ρ_o on gagne 11 pour cent sur ξ et qu'en sacrifiant 2 pour cent sur ρ_o on gagne 15 pour cent sur ξ.

IV

La question du maximum de rendement peut se traiter aussi par une voie un peu différente, en cherchant d'abord pour une valeur de β_o la valeur de la vitesse relative ξ qui donne le rendement maximum.

Dans ce cas on a, en remplaçant dans (20) y par sa valeur (18), et en ordonnant par rapport à z,

$$(40)\quad \rho_o^2 z^2 - 4\left[(X\cos\alpha_o - 1)\,\rho_o + \frac{\cos^2\beta_1}{1+b}\right] z + 4\,(X\cos\alpha_o - 1)^2$$

$$+ 4\,\frac{\cos^2\beta_1}{1+b}\left[X^2\,(a+c)\,\frac{r_1^2}{r_o^2} + 2\,X\cos\alpha_o\,(1-c) + \frac{c r_o^2}{r_1^2} - 1\right] = 0.$$

Pour que les racines de cette équation soient réelles, il faut :

$$\rho_o \leqslant \rho_1,$$

ρ_1 étant la racine positive de l'équation

$$E\rho^2 + 2F\rho - G = 0, \tag{41}$$

où on a posé

$$E = X^2 (a + c) \frac{r_1^{\,2}}{r_o^{\,2}} + 2\,X\,(1 - c) \cos \alpha_o + \frac{c r_o^{\,2}}{r_1^{\,2}} - 1, \tag{42}$$

$$F = 1 - X \cos \alpha_o, \tag{43}$$

$$G = \frac{\cos^2 \beta_1}{1 + b}. \tag{44}$$

Si pour résoudre cette équation on pose

$$tg\ \varphi = \frac{\sqrt{GE}}{F}, \qquad \text{ou} \quad o < \varphi < \pi, \tag{45}$$ (1)

on aura :

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{G}{E}}\ tg\ \frac{\varphi}{2}. \tag{46}$$

Pour cette valeur de ρ, les racines de l'équation (40) étant égales, on aura :

$$z = 2 \left[\frac{X \cos \alpha_o}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1} + \frac{\cos^2 \beta_1}{(1 + b)\, \rho_1^{\,2}} \right], \tag{47}$$

et on en déduit :

$$\xi^2 = \frac{r_o^{\,2}}{r_1^{\,2} z},$$

et on aura ensuite ϵ_o par (26),

puis $$\frac{S_o\, r_1}{S_1\, r_o} = \frac{\mu\, r_1^{\,2} \sin \beta_1 \sin (\beta_o - \alpha)}{r_o^{\,2} \sin \beta_o \sin \alpha_o}.$$

Mais on déduit de (17)

$$\mu = \frac{\rho_o z - 2\,X \cos \alpha_o + 2}{2 \cos \beta_1},$$

---

(1) On a par suite, *si* F $> o$: $o < \varphi < \frac{\pi}{2}$, *si* F $< o$: $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.

d'ailleurs on déduit de l'équation (47), puisque dans le cas actuel $\rho_o = \rho_1$,

$$\rho_o Z - 2\,X \cos \alpha_o + 2 = \frac{2 \cos^2 \beta_1}{(1+b)\,\rho_o},$$

donc

$$\mu = \frac{\cos \beta_1}{(1+b)\,\rho_1},^{(1)} \tag{48}$$

et par suite

$$\frac{S_o r_1}{S_1 r_o} = \frac{\cos \beta_1 \sin \beta_1}{X\,(1+b)\,\rho_1 \sin \alpha_o} = \frac{\mu}{X}\,\frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha_o}. \tag{49}$$

On peut, en partant de l'équation (41) retrouver l'équation (30) qui donne la valeur de ρ_m.

Pour cela, remplaçons E, F, G par leurs valeurs et ordonnons l'équation (41) par rapport à X ; nous aurons :

$$\rho^2\,(a+c)\,\frac{r_1^2}{r_o^2}\,X^2 - 2\rho\,[1-\rho\,(1-c)] \cos \alpha_o\,X + \left(\frac{c\,r_o^2}{r_1^2} - 1\right) \rho^2 + 2\rho - \frac{\cos^2 \beta_1}{1+b} = 0. \tag{50}$$

Pour que les racines de cette équation soient réelles, il faut :

$$\Big[1-\rho\,(1-c)\Big]^2 \cos^2 \alpha_o - \left[\left(\frac{c\,r_o^2}{r_1^2} - 1\right) \rho^2 + 2\rho - \frac{\cos^2 \beta_1}{1+b}\right] (a+c)\,\frac{r_1^2}{r_o^2} > 0,$$

ou

$$\left[(1-c)^2 \cos^2 \alpha_o - \left(\frac{c\,r_o^2}{r_1^2} - 1\right)(a+c)\,\frac{r_1^2}{r_o^2}\right] \rho^2 - 2\left[(a+c)\,\frac{r_1^2}{r_o^2} + (1-c) \cos^2 \alpha_o\right] \rho + \cos^2 \alpha_o + \frac{\cos^2 \beta_1}{1+b}\,\frac{r_1^2}{r_o^2}\,(a+c) > 0,$$

---

(1) Cette valeur de μ se déduirait aussi de (26′) dans le cas du rendement maximum en y remplaçant X_1 par sa valeur (25) et Y_1 par sa valeur (33′).

ce qui, en tenant compte des relations

$$A = \frac{1}{a+c} + \frac{1}{1+b}\,\frac{r_1^2}{r_o^2}\,\frac{\cos^2\beta_1}{\cos^2\alpha_o},\quad B = \frac{1-c}{a+c},$$

posant

$$\zeta = \frac{1}{\rho},$$

et divisant par $(a+c)\,\rho^2\cos^2\alpha_o$, pourra s'écrire :

$$A\zeta^2 - 2\left(B + \frac{1}{\cos^2\alpha_o}\,\frac{r_1^2}{r_o^2}\right)\zeta + \left(\frac{r_1^2}{r_o^2} - c\right)\frac{1}{\cos^2\alpha_o} + B^2(a+c) > 0$$

et exprime bien que $\frac{1}{\rho_m}$ est la plus grande racine de (30).

V

On peut, au lieu de chercher à augmenter la valeur de la vitesse relative ξ, chercher à augmenter le débit pour une valeur donnée de la surface totale S_o du distributeur, et du rendement ρ, puisque par là on réduit les dimensions de la turbine.

Pour cela, on a pour le débit Q^o en pleine charge, en tenant compte de (7)

$$Q_o = S_o\, v_o \sin\alpha_o = \frac{S_o u_o \sin\beta_o \sin\alpha_o}{\sin(\beta_o - \alpha_o)},$$

ou, en vertu de (10) et de (12) :

(51) $$Q_o = S_o\sqrt{2gH}\;\xi\, X\,\frac{r_1^2}{r_o^2}\sin\alpha_o.$$

Si alors nous prenons pour ρ une valeur ρ_1 légèrement inférieure à ρ_m, nous avons pour calculer X l'équation (50), qui, si nous posons

$$E_1 = \rho^2\,(a+c)\,\frac{r_1^2}{r_o^2},$$

$$F_1 = \rho\,[1 - \rho\,(1-c)]\cos\alpha_o,$$

$$G_1 = \left(c\,\frac{r_o^2}{r_1^2} - 1\right)\rho^2 + 2\rho - \frac{\cos^2\beta_1}{1+b},$$

s'écrira :

$$E_1X^2 - 2\,F_1X + G_1 = 0,$$

et donnera, si on pose

$$\sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{E_1G_1}}{F_1},$$

les deux racines

$$X_1 = \sqrt{\frac{G_1}{E_1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi_1}{2}, \tag{52}$$

$$X_2 = \sqrt{\frac{G_1}{E_1}}\,\cot\frac{\varphi_1}{2}. \tag{52'}$$

Avec ces valeurs de X, les racines de l'équation (40) étant égales, on aura par la formule (47)

$$z = 2\left[\frac{X\cos\alpha_0 - 1}{\rho_1} + \frac{\cos^2\beta_1}{(1+b)\,\rho_1^2}\right] \tag{47}$$

Or, en tenant compte de la valeur de z, on a :

$$\xi^2X^2 = \frac{r_0^2}{r_1^2}\,\frac{X^2}{z} = \frac{r_0^2}{2r_1^2}\,\frac{\rho_1^2X^2}{\rho_1(X\cos\alpha_0 - 1) + \dfrac{\cos^2\beta}{1+b}},$$

et si on pose

$$\eta = \frac{r_0^2}{r_1^2}\,\frac{Q_0^2}{gHS_0^2\sin^2\alpha_0},$$

on aura :

$$\eta = \frac{\rho_1^2X^2}{\rho_1X\cos\alpha_0 - \rho_1 + \dfrac{\cos^2\beta_1}{1+b}},$$

d'où on déduit :

$$\frac{d\eta}{dX} = \rho_1^2X\,\frac{\rho_1X\cos\alpha_0 - 2\rho_1 + 2\,\dfrac{\cos^2\beta_1}{1+b}}{\left(\rho_1X\cos\alpha_0 - \rho_1 + \dfrac{\cos^2\beta_1}{1+b}\right)^2}.$$

Or, pratiquement, le numérateur est toujours positif. En effet, X décroît constamment lorsque β_o croît, car on déduit de l'équation (12)

$$\frac{dX}{d\beta_o} = \frac{r_o^2}{r_1^2} \frac{-\sin \alpha_o}{\sin^2(\beta_o - \alpha_o)}.$$

Or, pratiquement on a :

$$\beta_o \leqslant \pi - \alpha_o,$$

de sorte que la valeur minima de X qui correspond à $\beta_o = \pi - \alpha_o$ sera :

$$\frac{r_o^2}{r_1^2} \frac{1}{2 \cos \alpha_o}$$

et la valeur minima du numérateur sera par suite :

$$\frac{2 \cos^2 \beta_1}{1+b} - \rho_1 \left(2 - \frac{r_o^2}{2r_1^2}\right).$$

Or, pour $\beta_o = \pi - \alpha_o$, $\rho_1 = 0{,}83$ environ, $\frac{r_o^2}{2r_1^2}$ sera minimum pour une turbine centrifuge et ne descendra pas au-dessous de 0,32 ; le minimum du numérateur sera, par suite, au moins égal à

$$\frac{2 \cos^2 \beta_1}{1+b} - 1{,}4,$$

et β_1 ne descendant pas au-dessous de 25°, le numérateur est pratiquement toujours positif. Donc le rendement sera, dans le cas qui nous occupe, maximum avec X.

On devra donc, si on veut la turbine donnant avec un rendement élevé un débit aussi fort que possible, après avoir calculé ρ_m par la formule (30), prendre une valeur ρ_1 de ρ légèrement inférieure et prendre pour X la valeur X_2 fournie par la relation (52). On en déduira z et par suite ξ^2 par les formules (47) et (12), puis β_o par la formule (13), ϵ_o par la formule (26), le débit Q_o par la formule (51), μ par la formule (48), $\frac{S_o r_1}{S_1 r_o}$ par la formule (49) et enfin le rendement ρ' corrigé de l'influence des fuites par la formule (3).

Si nous considérons la turbine centripète envisagée précédemment, pour laquelle $\alpha_o = \beta_1 = 20^\circ$, $r_1 = 0{,}8 r_o$, a, b, c, e ayant les valeurs adoptées plus haut, turbine pour laquelle nous avons trouvé

$$\rho_m = 0{,}9005, \quad \xi_m = 0{,}6739, \quad X_m = 1{,}7284, \quad \beta_o = 84^\circ 3'$$

$$\epsilon_o = 0{,}4444, \quad \frac{S_o r_1}{S_1 r_o} = 0{,}5696, \quad \rho' = 0{,}8649, \quad \mu = 0{,}9845,$$

en prenant $\rho = 0{,}89$, et la racine X_2 fournie par la relation (52), nous trouverons par les formules indiquées :

$$X_2 = 2{,}2686, \quad \xi_2 = 0{,}5799, \quad \beta_o = 53^\circ 44'$$

$$\epsilon_o = 0{,}2912, \quad \frac{S_o r_1}{S_1 r_o} = 0{,}4391, \quad \rho' = 0{,}8667, \quad \mu = 0{,}9961.$$

On remarquera que dans ce cas, bien que ρ soit légèrement inférieur à ρ_m, par suite de la diminution du degré de réaction et de l'influence des fuites, ρ'_m est un peu inférieur à ρ'.

On a d'ailleurs pour le rapport des débits, S_o étant supposé le même dans les deux cas,

$$\frac{X\xi}{X_m \xi_m} = 1{,}1295.$$

Le débit se trouve donc augmenté de 13 pour cent environ par un sacrifice de 1 pour cent seulement sur ρ (^{1}). Par contre, on perdrait 14 pour cent environ sur la vitesse relative.

Si nous prenons $\rho = 0{,}88$, nous trouverons dans les mêmes conditions :

$$X_2 = 2{,}5366, \quad \xi_2 = 0{,}5432, \quad \beta_o = 46^\circ 35', \quad \epsilon_o = 0{,}2224$$

$$\frac{S_o r_1}{S_1 r_o} = 0{,}3971, \quad \rho' = 0{,}8622, \quad \mu = 1{,}0074.$$

On a ensuite pour le rapport des débits, dans le cas actuel et dans celui où $\rho = \rho_m$,

$$\frac{X\xi}{X_m \xi_m} = 1{,}1830.$$

(^{1}) Pour le rendement corrigé de l'influence des fuites, il est sensiblement le même dans les deux cas.

On voit qu'en sacrifiant 2 pour cent sur la valeur de ρ on gagne 18 pour cent environ pour le débit, mais avec une diminution de la vitesse relative de 19 pour cent environ.

On remarquera que dans le cas actuel, pour $\rho = 0{,}89$, on a :

$$\frac{S_1 r_o}{S_o r_1} = 2{,}2776,$$

et que pour $\rho = 0{,}88$ on aurait :

$$\frac{S_1 r_o}{S_o r_1} = 2{,}5180.$$

Or, ce rapport est sensiblement celui des hauteurs des aubes à l'entrée et à la sortie de la roue ; donc dans ce cas la turbine centripète se transformerait en réalité en turbine mixte.

RÉSUMÉ DES FORMULES

Je rappelle que j'ai désigné par α_o l'inclinaison des cloisons directrices du distributeur sur la vitesse u_o d'un point de la circonférence d'entrée de la roue, par β_o l'inclinaison initiale des aubes également sur u_o, par β_1 l'inclinaison finale des aubes sur le prolongement (dans le sens contraire du mouvement) de la vitesse u_1 d'un point de la circonférence de sortie, par r_o et r_1 les rayons des circonférences d'entrée et de sortie de la roue, par H la hauteur de chute, par v_o la vitesse de l'eau à la sortie du distributeur, par w_o et w_1 les vitesses relatives de l'eau à l'entrée et à la sortie de la roue.

J'ai admis que la perte de charge dans le distributeur était représentée par av^2_o, et celle dans la roue par $bw^2_1 + cw^2_o$ (1).

J'ai posé :

$$\xi^2 = \frac{u^2_o}{2gH}, \quad \epsilon_o = 1 - \frac{v^2_o}{2gH},$$

---

(1) D'après M. Rateau, on pourrait prendre $a = b = 0{,}06$, $c = 0{,}225$.

ϵ_o étant le degré de réaction, et ξ ce que M. Rateau appelle la vitesse relative, et de plus

$$\mu = \frac{w_1}{u_1}, \qquad z = \frac{r^2{}_o}{r^2{}_1 \xi^2}, \qquad X = \frac{r^2{}_o}{r^2{}_1} \frac{\sin \beta_o}{\sin(\beta_o - \alpha_o)}$$

$$A = \frac{1}{a+c} + \frac{1}{1+b} \frac{r^2{}_1}{r^2{}_o} \frac{\cos^2 \beta_1}{\cos^2 \alpha_o}, \qquad B = \frac{1-c}{a+c}.$$

Si, de plus, on désigne par S_o la surface totale du distributeur complètement ouvert, égal à la surface d'entrée de la roue, par S_1 (¹) la surface totale de sortie de la roue, par Q_o le débit pour le distributeur complètement ouvert, cas dans lequel nous nous supposons placé, et enfin par ρ le rendement, on a dans tous les cas :

$$\cot(\beta_o - \alpha_o) = \frac{X \dfrac{r_1{}^2}{r_o{}^2} - \cos \alpha_o}{\sin \alpha_o},$$

$$1 - \epsilon_o = \frac{r_1{}^4}{r_o{}^4} \xi^2 X^2,$$

$$\frac{S_o r_1}{S_1 r_o} = \frac{\mu}{X} \frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha_o},$$

$$Q_o = S_o \sqrt{2gH}\ \xi X \frac{r_1{}^2}{r_o{}^2} \sin \alpha_o.$$

De plus, les formules qui suivent étant établies sans tenir compte des fuites aux joints, nous admettons que l'on déduit le rendement ρ', corrigé de l'influence de ces fuites, du rendement ρ obtenu sans en tenir compte, par la formule

$$\rho' = \rho - e\epsilon \ (^2).$$

(¹) Nous supposons que S_o et S_1 soient affectés d'un coefficient tenant compte de la contraction.

(²) Où e serait en moyenne voisin de 0,08.

1° Rendement maximum pour des valeurs données de α_o et β_1 (¹). Ce rendement ρ_m est donné par les formules suivantes :

$$M = B + \frac{r_1^2}{r_o^2 \cos^2 \alpha_o}, \qquad P = B^2(a + c) + \frac{1}{\cos^2 \alpha_o}\left(\frac{r_1^2}{r_o^2} - c\right),$$

$$\sin \psi = \frac{\sqrt{AP}}{M},$$

$$\rho_m = \sqrt{\frac{A}{P}}\, tg\, \frac{\psi}{2}.$$

On a de plus, pour obtenir ce rendement maximum,

$$\mu = \frac{\cos \beta_1}{(1 + b)\rho_m},$$

$$Y_1 = \frac{2r_o^2}{r_1^2}\left(\frac{A}{\rho_m} - B\right)\cos^2 \alpha_o,$$

$$\xi^2 = \frac{\rho_m}{Y_1 - 2}\,\frac{r_o^2}{r_1^2},$$

$$X_1 = \frac{\dfrac{Y_1}{2(a + c)} - B\,\dfrac{\cos^2 \beta_1}{1 + b}}{A \cos \alpha_o}.$$

2° On admet pour le rendement ρ une valeur ρ_1 légèrement inférieure à ρ_m, de façon à avoir une valeur plus grande pour ξ. On aura alors, pour calculer les éléments de la turbine,

$$M_1 = \frac{2r_o^2}{r_1^2}\left(\frac{A}{\rho_1} - B\right)\cos^2 \alpha_o,$$

$$P_1 = 4\cos^2 \alpha_o \left(\frac{2}{\rho_1} - 1 + c\,\frac{r_o^2}{r_1^2}\right) - 4B^2\,\frac{a + c}{1 + b}\,\frac{r_o^2}{r_1^2}\cos^2 \alpha_o \cos^2 \beta_1,$$

$$\sin \psi = \frac{\sqrt{P_1}}{M_1},$$

(¹) Le rendement augmente lorsque α_o et β_1 diminuent, mais la question du débit ne permet pas de descendre au-dessous d'une certaine limite.

$$Y_1 = \sqrt{P_1}\, tg\, \frac{\psi}{2},$$

$$\xi^2 = \frac{r_o^2}{r_1^2}\, \frac{\rho_1}{Y_1 - 2},$$

$$X_1 = \frac{\dfrac{Y_1}{2\,(a+c)} - B\,\dfrac{\cos^2 \beta_1}{1+c}}{A \cos \alpha_o},$$

$$\mu = \frac{Y_1 - 2\, X_1 \cos \alpha_o}{2 \cos \beta_1}.$$

3° On prend pour ρ une valeur ρ_1 légèrement inférieure à ρ_m, de façon à obtenir un plus grand débit pour une valeur donnée de S_o.

On a alors

$$E_1 = \rho_1^2\, (a+c)\, \frac{r_1^2}{r_o^2},$$

$$F_1 = \rho_1\, [1 - \rho_1\, (1-c)] \cos^2 \alpha_o,$$

$$G_1 = \left(\frac{c\, r_o^2}{r_1^2} - 1\right) \rho_1^2 + 2\, \rho_1 - \frac{\cos^2 \beta_1}{1+b},$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{\sqrt{E_1 G_1}}{F_1},$$

$$X = \sqrt{\frac{G_1}{E_1}}\, \cot \frac{\varphi}{2},$$

$$\frac{1}{\xi^2} = \frac{2\, r_1^2}{r_o^2} \left[\frac{X \cos \alpha_o}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1} + \frac{\cos^2 \beta_1}{(1+b)\, \rho_1^2}\right],$$

$$\mu = \frac{\cos \beta_1}{(1+b)\, \rho_1}.$$

---

(1) Où $z = \frac{r_o^2}{r_1^2}\, \xi^2$, ainsi qu'il a été dit.

4° On suppose ξ donné, et on veut la valeur maxima ρ_1 correspondante du rendement ρ et la valeur de β_o qui procure ce maximum.

On aura :

$$A_1 = 2B \frac{r_o^2}{r_1^2} \cos \alpha_o,$$

$$B_1 = 4 \frac{r_o^2}{r_1^2} A \left(1 + z - \frac{c\, r_o^2}{r_1^2}\right) + 4B^2 \frac{a + c}{1 + b} \frac{r_o^2}{r_1^2} \cos^2 \alpha_o \cos^2 \beta_1 \;^{(1)},$$

$$tg\, \varphi = \frac{\sqrt{B_1}}{A_1},$$

$$Y_1 = \sqrt{B_1}\, tg \frac{\varphi}{2},$$

$$\rho_1 = (Y_1 - 2) \frac{r_1^2}{r_o^2} \xi^2$$

$$\mu = \frac{Y_1 - 2X_1 \cos \alpha_o}{2 \cos \beta_1}$$

$$X_1 = \frac{\dfrac{Y_1}{2(a + c)} - B \dfrac{\cos^2 \beta_1}{1 + b}}{A \cos \alpha_o}.$$

5° On suppose β_o donné, et on veut la valeur de ξ qui rend ρ maximum, et les valeurs correspondantes des autres données.

On aura (¹) :

$$E = X^2 (a + c) \frac{r_1^2}{r_o^2} + 2X (1 - c) \cos^2 \alpha_o + c \frac{r_o^2}{r_1^2} - 1,$$

$$F = 1 - X \cos \alpha_o,$$

(¹) Où $X = \frac{r_o^2}{r_1^2} \frac{\sin \beta_o}{\sin (\beta_o - \alpha_o)}$, comme il est dit plus haut.

$$G = \frac{\cos^2\beta_1}{1+b},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{GE}}{F}, \qquad 0 < \varphi < \pi,$$

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{G}{E}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

$$\xi^2 = \frac{r_0^2}{r_1^2}\,\frac{\rho_1\cos\varphi}{2F},$$

$$\mu = \frac{\cos\beta_1}{(1+b)\,\rho_1}.$$

(Reçu le 7 avril 1921).

Chironomides de Courlande

PAR

l'abbé J.-J. KIEFFER
Docteur ès sciences

Tous les insectes, dont il sera fait mention dans ce travail, ont été recueillis aux environs de Libau, en Courlande, par le Dr Siebert. Je dois à l'amabilité de M. Schenkling d'avoir pu en prendre connaissance.

I. Sous-famille Ceratopogoninæ

1. *Genre Culicoides Latr.*

1. C. CORDATUS n. sp. Cette espèce sera décrite dans un travail qui paraîtra dans le BULLETIN DE L'INSTITUT PASTEUR D'ALGÉRIE. Par la forme du 4e article tarsal, elle se rapproche de **C. Meinerti** Kieff. et de **C. cordiformitarsis** Carter ; ce caractère la distingue de toutes les autres d'Europe. Les autres espèces du genre **Culicoides** ont toujours le 4e article tarsal moins parfaitement cylindrique que les précédents et parfois avec une transition vers la forme en cœur, mais pas distinctement cordiforme (1).

2. C. CILIPES n. sp. ♀. Brun noir. Tête et mesonotum à poils jaune d'or, courts et assez denses. Palpes comme chez le précédent. Antennes brunes, articles 2-9 jaunâtres, subglobuleux, à peine plus longs que gros, verticilles à 6 poils, soies sensorielles plus courtes et pas plus grosses que les poils des verticilles, situées

---

(1) Voir mon travail « *Chironomides d'Europe* » (ANN. MUS. NAT. HUNG. 1919, v. 17, p. 1-160, avec 60 fig. dans le texte).

près de l'extrémité de l'article, atteignant le milieu de l'article suivant; 10-14 ensemble de moitié plus longs que 2-9 réunis, sans verticille basal, à poils épars, chacun plus de deux fois aussi long que gros, graduellement aminci distalement, le 14^e d'un tiers plus long que le 13^e, sans stylet terminal. Mesonotum gris brun. Balanciers blancs. Aile hyaline, **à poils appliqués**, et denses sur toute sa surface, sans tache; cubitale atteignant le milieu du second tiers alaire, formant avec la radiale deux cellules minces, dont la proximale est la plus longue; pétiole de la discoïdale égalant la transversale, sa bifurcation à peine proximale de celle de la posticale, dont le rameau antérieur est très faiblement arqué; lobe rectangulaire. Pattes jaunâtres, munies sur leur partie dorsale, sauf au dernier article tarsal, **de longs poils dressés,** 2-3 fois aussi longs que la grosseur des pattes, comme chez **Ceratopogon**, métatarses longs, 4^e article obliquement tronqué, mais pas distinctement cordiforme, empodium atteignant le milieu des crochets, ceux-ci à soie basale arquée. L. 1,8 mm. Diffère de **C. Meinerti** Kieff. par la pilosité des pattes, le 4^e article tarsal non cordiforme, la pilosité de la tête et du mesonotum et les articles antennaires 2-9; tous deux diffèrent de tous les congénères d'Europe par la pilosité alaire.

3. C. PULICARIS L. var. *ocellaris* n. var. ♀. Brun noir. Palpes et antennes comme chez le type: les soies sensorielles, qui sont un peu distales du milieu, sont un peu plus grosses et aussi longues que les 6 poils des verticilles. Mesonotum gris blanchâtre, tiers antérieur brun sombre; cette partie brune émet à son bord postérieur trois prolongements bruns, triangulaires et d'égale longueur; les alentours des stigmates transversaux et les côtés du mesonotum portent des poils pâles, médiocres et peu denses. Balanciers blancs. Taches alaires comme chez le type, sauf que les 4 du bord postérieur, situées à l'extrémité de chaque rameau de la discoïdale et de la posticale, sont ocellées, ayant un point blanc au centre. Pattes blanc brunâtre, 4^e article tarsal presque cordiforme. — L. 1,8 mm.

2. *Genre Bezzia Kieff.*

B. Sieberti n. sp. ♀. Brun noir. Tête brun gris. Yeux séparés presque du diamètre du scape. Antennes jaunâtres, articles 1 et 10-14 brun noir; 2-9 ensemble un peu plus courts que 10-14 réunis, 3-9 ovoïdaux ou en ellipsoïde court, 10-14 cylindriques. Mesonotum glabre, gris, pruineux comme tout le thorax, avec deux bandes longitudinales, médianes, brunes et confluentes, sauf à l'extrémité postérieure où elles divergent un peu ; côtés du mesonotum avec une bande longitudinale brune, moins marquée dans sa moitié postérieure et n'atteignant pas le bord postérieur du mesonotum. Scutellum jaune. Balanciers blanc brunâtre, extrémité de la massue assombrie. Aile hyaline, large, à lobe arrondi, cubitale à peine deux fois aussi longue que la radiale, distante de la pointe alaire presque de sa demi-longueur, mais un peu moins que le rameau antérieur de la posticale ; bifurcation de la discoïdale un peu proximale de la transversale, celle de la posticale à peine distale de la transversale. Pattes jaunes, tarses blanchâtres ; anneau avant l'extrémité des quatre fémurs antérieurs, quart distal du fémur postérieur, large anneau avant le milieu des tibias, extrémité des tibias et des articles tarsaux 1-3 et les deux derniers articles noirs ; fémur à deux spinules, les autres inermes ; article 5^e du tarse postérieur à trois spinules ventrales jaunes, un peu arquées, plus longues que sa grosseur et quelques gros poils moins longs et plus proximaux ; crochets tarsaux simples, égalant la demi-longueur de l'article. — L. 3 mm. Dédié à M. le D^r Siebert.

II. **Sous-famille Chironominæ**

A. Chironomariæ

Genre Endochironomus Kieff.

1. E. nigricoxis n. sp. ♂ ♀. Noir brillant. Yeux du ♂ séparés de deux fois leur largeur terminale. Lobes frontaux nuls. Antennes du ♂ brun noir, à panache brun fauve ; 2^e article plus de deux fois aussi long que le 3^e, 3-13 très transversaux, 14^e trois fois aussi long que 2-13 réunis. Antennes de la ♀ jaunes, nœuds et 7^e article

bruns, 2ᵉ article non rétréci au milieu, à col pas plus long que gros, 3-6 à long col, 7ᵉ de moitié plus long que le 6ᵉ. Balanciers jaune pâle. Aile hyaline, nervures antérieures brunâtres, cubitale atteignant presque la pointe alaire, bifurcation de la posticale un peu distale de la transversale, lobe rectangulaire. Pattes d'un jaune vif, hanches noires ou brun noir, tarse antérieur et deux derniers articles des autres tarses assombris, métatarse antérieur d'un cinquième plus long que le tibia, celui-ci non barbu, à écaille allongée, un peu pointue ou obtuse, articles 2-4 graduellement plus courts, 4ᵉ plus de deux fois le 5ᵉ, pulvilles un peu plus courts que l'empodium, qui atteint l'extrémité des crochets, tibias postérieurs à deux éperons courts. Abdomen brun noir, chez la ♀ arqué, aminci en avant et deux fois aussi long que le reste du corps. Pince brun noir ; articles terminaux larges, non amincis au bout, arqués latéralement, presque droits médialement, où la moitié distale porte des poils alignés peu longs et très fins ; appendice supérieur glabre, atteignant l'extrémité de l'article basal, arqué, sublinéaire, partie distale plus mince et fortement incurvée ; appendice inférieur trois fois aussi large que le supérieur, dépassant peu l'article basal, à poils dorsaux courbés, longs et gros, les deux situés à l'extrémité particulièrement longs et peu arqués ; lamelle graduellement amincie en pointe. — L. 6 mm.

2. E. Miki Kieff. ♂♀. Jaune verdâtre et brillant. Lobes frontaux nuls. Yeux séparés de trois fois (♂) ou deux fois (♀) leur largeur terminale. Metanotum, trois bandes raccourcies du mesonotum, dont la médiane manque chez le ♂, et mesosternum fauves. Balanciers blancs. Pattes jaune clair ; tibia antérieur à écaille allongée, jaune, obtuse, terminée par un éperon ou stylet noir (♀) ou pâle (♂) ; tarse antérieur du ♂ à poils deux à trois fois aussi longs que sa grosseur, métatarse de moitié plus long que le tibia ; les quatre tibias postérieurs à deux éperons courts. Antennes et panache du ♂ fauves, 14ᵉ article trois fois plus long que 2-13 réunis ; antennes de la ♀ jaunâtres, 2ᵉ à col aussi long que gros, 3-6 à col presque aussi long que le nœud, qui est ellipsoïdal, verticilles à 7-8 poils, 7ᵉ article de moitié plus long que le 6ᵉ. — L. ♂ 6,5 mm., ♀ 6 mm. (1 ♂, 8 ♀).

Var. maritima n. var. ♂. Jaunâtre. Diffère du type par la coloration. Antennes brunes, à panache fauve. Metanotum, trois bandes du mesonotum raccourcies et brillantes, et mesosternum noirs ou brun noir. Scutellum vert. Balanciers blancs. Aile blanchâtre, lobe rectangulaire, toutes les nervures pâles. Pattes jaunâtres, tibias et tarses blanchâtres, l'éperon de l'écaille du tibia antérieur est noir. Abdomen d'un jaune verdâtre, tergites 2-6 longs, 7^e à peine plus long que large, partie médiane des tergites 2-7 un peu obscurcie, s'élargissant en arrière, segment anal graduellement aminci en avant. Tarse antérieur barbu longuement, surtout au côté latéral, où les poils sont plus de six fois aussi longs que sa grosseur. Pince brun vert ; articles terminaux graduellement amincis dans leur moitié distale ; appendice supérieur arqué fortement, tiers basal élargi et cilié médialement ; appendice inférieur atteignant presque le milieu de l'article terminal, deux fois aussi large que le supérieur ; lamelle terminée par une longue pointe. Le reste comme chez le type. — L. 6,5 mm.

3. E. FLAVICOXIS n. sp. ♀. Noir brillant. Yeux séparés de 1 1/2 fois leur largeur terminale. Lobes frontaux nuls. Palpes longs et brun noir. Antennes d'un jaune vif, 2^e article non rétréci au milieu, à col allongé, 3-6 fusiformes, graduellement amincis en un long col, verticilles à 7 ou 8 poils, 7^e article brun, de moitié plus long que le 6^e, à trois poils distaux, qui atteignent les deux tiers de sa longueur. Scutellum jaune brun. Balanciers jaune vif. Aile jaunâtre, atteignant presque l'extrémité de l'abdomen, nervures antérieures jaune vif, cubitale droite, atteignant presque la pointe alaire, dont elle est bien plus proche que la discoïdale, bifurcation sous la transversale, lobe rectangulaire. Pattes, avec les hanches, d'un jaune vif, tibia antérieur brun sombre, plus long que le fémur, avec une écaille obtuse, graduellement amincie, allongée, quatre tibias postérieurs à deux éperons courts, métatarse antérieur un peu plus long que le tibia, 5^e article et extrémité du 4^e assombris ; empodium égalant les crochets, ses poils ventraux bifurqués proximalement au milieu ; pulvilles un peu plus courts, larges, à longs poils. Abdomen un peu aminci en avant, deux fois aussi long que le reste du corps. — L. 6,5 mm.

Genre Chironomus Meig.

1. C. PLUMOSUS L. ♂ ♀. Yeux séparés de 1 1/2 fois leur largeur terminale. Écaille du tibia antérieur obtuse, aussi longue que large (2 ♂, ♀4).

2. C. FERRUGINEO-VITTATUS Zett. ♂. Yeux séparés de deux fois leur largeur terminale.

3. C. SIEBERTI n. sp. ♂. Jaune. Lobes frontaux nuls. Palpes longs. Antennes et panache fauves, 2^{e} article deux fois aussi long que le 3^{e}, 3-11 un peu transversaux, 12^{e} presque trois fois aussi long que 2-11 réunis. Mesonotum blanchâtre, avec quatre bandes fauves, les deux médianes minces, séparées de leur largeur, raccourcies en arrière, où elles sont réunies et en pointe, les deux latérales en forme de tache arrondie. Balanciers blancs. Aile hyaline, lobée, à nervures blanches, cubitale droite, aussi proche de la pointe alaire que la discoïdale, dépassant de plus du tiers la radiale, bifurcation sous la transversale. Pattes verdâtres, tarse antérieur et les deux ou trois derniers articles des autres, assombris ; tarse antérieur à poils 3-4 fois aussi longs que sa grosseur, métatarse d'un tiers plus long que le tibia, celui-ci égalant le fémur, à écaille obtuse et un peu allongée, articles 2-4 graduellement raccourcis ; 4^{e} deux fois le 5^{e}, qui est long, pulvilles larges, à peine plus courts que l'empodium, celui-ci égalant les crochets ; quatre tibias postérieurs à peigne occupant les trois quarts du pourtour, avec deux éperons, dont le plus grand dépasse le peigne de plus de sa longueur. Abdomen d'un vert intense, tergites 2-7 très allongés, 7^{e}, 8^{e} et la pince jaunes. Articles terminaux de la pince arqués, tiers distal fortement aminci, glabre, muni distalement, au côté médian, de deux rangées longitudinales de six soies rigides et plus courtes que la largeur de l'extrémité de l'article ; appendice supérieur droit, dépassant à peine l'article basal, mince, sublinéaire, extrémité très brièvement crochue ; appendice inférieur ne dépassant pas le supérieur et deux à trois fois plus large, avec de longs poils arqués sur sa partie dorsale au tiers distal ; lamelle à pointe assez longue. — L. 5.5 mm. Dédié au D^{r} Siebert.

4. C. NERVOSUS Stg. ♀. Fauve. Yeux amincis en haut et séparés de deux fois leur largeur terminale. Palpes longs. Lobes frontaux

nuls. Antennes jaunâtres, 2e article rétréci au milieu, à col un peu transversal, 3-5 à col un peu plus long que gros, 6e brun noir, deux fois le 5e, à 1 ou 2 poils distaux égalant sa demi-longueur. Mesonotum blanc jaunâtre, luisant, à trois bandes raccourcies fauves, la médiane très mince, son quart postérieur bifurqué en deux rameaux divergents. Balanciers blanchâtres. Aile hyaline, nervures jaunes, les antérieures et la transversale brunâtres, cubitale arquée, presque double de la radiale, aboutissant presque à la pointe alaire, bifurcation sous la transversale, lobe rectangulaire. Pattes blanchâtres, trois derniers articles tarsaux assombris, métatarse antérieur presque double du tibia, celui-ci distinctement plus court que le fémur, à écaille obtuse, à peine transversale, 2-4 graduellement un peu raccourcis, le 2e égalant à peine la moitié du 1er ; quatre tibias postérieurs à deux éperons courts, peigne occupant les trois quarts du pourtour. Abdomen vert gai, droit, de deux tiers plus long que le reste du corps ; cerci jaunes. — L. 4,5 mm.

5. C. indivisus Kieff. 3 ♂ 5 ♀. Yeux séparés d'un peu plus de leur largeur terminale. Article 12e des antennes du ♂ quatre fois aussi long que 2-11 réunis. Mesonotum pruineux de gris, les trois bandes noires et raccourcies, la médiane non divisée. Pattes jaunes, hanches brun noir, extrémité du fémur antérieur, tiers basal du tibia antérieur et, à toutes les pattes, les quatre derniers articles tarsaux, assombris ; écaille du tibia antérieur plus longue que large, obtuse, mais graduellement amincie ; les deux éperons des quatre tibias postérieurs courts. Tergites 2-7 du ♂ longs. — L. 7-8 mm.

6. C. Thummi Kieff. 3 ♀. Mesonotum plus jaune, moins pruineux, bande médiane divisée. Écaille du tibia antérieur comme chez le précédent.

Genre Clinochironomus n. g.

Caractères de **Chironomus**, dont il diffère par la conformation des antennes du mâle. Celles-ci sont composées de treize articles, avec un panache à poils non étalés, mais appliqués, denses et moins longs que d'ordinaire chez les **Chironominæ** ; tergites transversaux et comprimés. Le type est :

C. VULPINUS n. sp. ♂ Jaune. Yeux peu amincis en haut, arqués, séparés de leur largeur terminale. Lobes frontaux plus longs que larges. Palpes brun noir, longs, 2^e et 3^e articles plus de trois fois aussi longs que gros, le 4^e le plus long. Antennes brun noir, le panache fauve et court leur donne l'aspect de queues de renard ; 2^e article un peu plus gros que les suivants, de moitié plus long que gros, cylindrique, comme les suivants ; 3-5 graduellement un peu allongés, le 3^e à peine aussi long que gros, le 5^e de moitié plus long que gros, 6-9 transversaux, 10^e un peu plus long que le 9^e, obliquement tronqué distalement, comme les deux suivants, 13^e aussi long que 2-12 réunis, élargi au bout. Les deux ♂ observés avaient leurs deux antennes conformées ainsi. Mesonotum gris pruineux, trois bandes raccourcies, metanotum et mesosternum noirs, la bande médiane non divisée, réunie au bord postérieur par une ligne noire. Balanciers jaune soufre. Aile blanchâtre, atteignant l'extrémité de l'abdomen, nervures antérieures brunes, transversale noire, cubitale arquée distalement, aboutissant presque dans la pointe alaire, un peu plus d'un tiers plus longue que la radiale, bifurcation peu distale de la transversale, lobe rectangulaire. Pattes entièrement jaune roux, tibia antérieur un peu plus court que le fémur, à écaille obtuse et un peu plus longue que large, tarse brisé ; peigne des quatre tibias postérieurs occupant les trois quarts du pourtour, les deux éperons courts, métatarse postérieur à crochets ventraux, sauf à leur base, pulvilles aussi longs que l'empodium, un peu plus courts que les crochets tarsaux, larges et réticulés. Abdomen arqué, deux fois aussi long que le reste du corps, tergites tous un peu transversaux et comprimés, d'un brun noir, leur tiers ou quart postérieur blanchâtre. Pince petite, brune ; articles terminaux plus longs que les basaux, fortement courbés, plus du tiers distal glabre, aminci et portant distalement, au bord médial, cinq soies grosses, rigides, plus longues que sa largeur ; appendice supérieur sortant du milieu de l'article basal, qu'il dépasse beaucoup, arqué, glabre, pointu, ayant sa plus grande largeur au milieu ; appendice inférieur plus de deux fois aussi large que le supérieur, atteignant presque le milieu de l'article terminal, pubescent, partie distale à poils dorsaux longs et arqués ; lamelle avec une pointe médiocre. — L. 5,5 mm.,

Genre Glyptotendipes Kieff.

1. G. FULVOFASCIATUS n. sp. ♂. Tête et thorax jaune blanchâtre, un peu pruineux de gris. Yeux amincis un peu en haut, séparés de 1 1/2 fois leur largeur terminale. Front sans lobes. Palpes longs. Antennes brun sombre, à panache fauve, 12e article quatre fois aussi long que 2-11 réunis. Metanotum, trois bandes raccourcies du mesonotum, dont la médiane divisée et mesosternum fauves ; les trois lignes de poils du mesonotum jaunes. Balanciers blancs. Aile hyaline, atteignant le milieu du 6e tergite, transversale brune, cubitale droite, aussi proche de la pointe alaire que la discoïdale, bifurcation sous la transversale. Pattes jaune clair, 5e article tarsal obscur, tarse antérieur barbu, métatarse d'un tiers plus long que le tibia, celui-ci à peine plus court que le fémur, 2-4 graduellement raccourcis ; quatre pattes postérieures fortement ciliées, surtout sur les tibias. Abdomen brun noir, mat, à poils denses et jaunâtres, quart postérieur des tergites 1-5 blanchâtre, 2-7 très allongés, 2-5 avec une raquette au bord antérieur. Pince roux brun, articles terminaux graduellement un peu amincis distalement, appendices inférieurs dépassant à peine les articles basaux. — L. 7,5 mm.

2. G. BREVIFILIS Kieff. var. **inclusus** Kieff. ♀. Blanchâtre, pruineux. Antennes roussâtres, 7e article brun, à poil distal égalant sa demi-longueur. Trois bandes du mesonotum, metanotum et mesosternum noirs, scutellum jaunâtre. Aile à transversale à peine plus sombre que les autres nervures. Pattes jaune clair, 5e article tarsal assombri, métatarse antérieur de moitié ou de deux tiers plus long que le tibia, 2-4 graduellement raccourcis. Abdomen brun noir, quart postérieur des tergites blanchâtre ; tergites 2-6 avec raquette. — L. 6 mm.

Genre Microtendipes Kieff.

1. M. PEDELLUS D. G. Plusieurs femelles.

2. M. LUCIDUS Zett. var., ♂. Noir brillant, y compris le scutellum. Yeux séparés de deux fois leur largeur terminale. Palpes longs. Antennes brun noir, 2e article deux fois le 3e, 3-13 très transversaux, graduellement plus longs, 14e trois fois aussi long

que 2-13 réunis ; panache brun noir, à extrémité grise. Balanciers blancs. Aile hyaline, atteignant le 6e tergite, nervures antérieures brunâtres, cubitale droite, aussi proche de la pointe alaire que la discoïdale, bifurcation distale de deux fois la transversale, lobe arrondi. Pattes brunes, hanches noires, tarses moins brunis, tarse antérieur barbu, à poils 4-5 fois aussi longs que sa grosseur, métatarse presque double du 2e article, pas distinctement plus long que le tibia, celui-ci un peu plus long que le fémur, à écaille obtuse et transversale, articles 2-4 graduellement raccourcis, empodium atteignant le milieu des crochets, pulvilles un peu plus courts que l'empodium, rameux médialement ; quatre pattes postérieures longuement poilues, éperon unique, arqué, assez long, peignes à dents obtuses. Abdomen brun noir ou noir, tergites 1-7 longs, 6e et 7e élargis. Pince brun noir ; articles terminaux à peine aussi longs que les basaux et un peu plus larges qu'eux, en ellipse, plus amincis à l'extrémité qu'à la base, pubescents partout (¹), la moitié distale munie, au côté médial, de poils alignés, assez longs et très fins ; appendice supérieur sortant assez près de la base, glabre, arqué, atteignant l'extrémité de l'article basal, pointu, base un peu élargie médialement et à poils médiaux et courts ; appendice supérieur deux fois aussi large que le milieu du supérieur, ne dépassant pas le tiers proximal de l'article terminal, conformé comme d'ordinaire, lamelle à pointe très longue. — L. 6 mm. (2 ♂).

3. M. URBANUS Kieff. On ne connaissait que le ♂ de cette espèce. La ♀ a la tête et le thorax d'un jaune brunâtre. Antennes jaune clair, 6e article brun, presque deux fois aussi long que le 3e, faiblement rétréci vers le milieu, à col un peu transversal, 3-5 subfusiformes, graduellement amincis en un col aussi long que gros, verticille long, celui du 5e article dépasse l'extrémité du 6e article, à sept poils, dont un de moitié plus long que les autres ; 6e article presque deux fois le 5e, à deux poils distaux d'un quart plus courts que lui. Mesonotum brillant, trois bandes raccourcies et bien

---

(¹) Je ne fais pas mention des poils très longs et épars, dont sont munis les articles terminaux dans tout le groupe des **Chironomariæ**.

séparées, metanotum et mesosternum noirs ; scutellum blanc jaunâtre. Balanciers jaune clair. Tiers antérieur du thorax prolongé par-dessus la tête, ce qui n'est pas le cas pour les espèces précédentes. Aile hyaline, dépassant l'abdomen, nervures antérieures jaunes, comme la transversale, cubitale arquée, aussi proche de la pointe alaire que la discoïdale, d'un tiers plus longue que la radiale, bifurcation distale de deux fois la transversale. Pattes colorées comme chez le ♂ ; métatarse antérieur un peu plus du tiers plus long que le tibia, celui-ci à écaille transversale ; quatre tibias postérieurs à éperon unique et arqué. Abdomen comprimé, de deux tiers plus long que le reste du corps, rougeâtre, tiers postérieur graduellement plus sombre. — L. 4 mm. (5 ♀).

4. M. Schenklingi n. sp. ♀. Semblable à l'espèce précédente, dont elle diffère par les caractères suivants : Antennes de sept articles, jaune clair, 7ᵉ article brun, à poils distaux égalant les deux tiers de sa longueur, 2ᵉ un peu plus long que le 3ᵉ, tronqué au bout, 3ᵉ à col aussi long que gros, non fusiforme, poils du 6ᵉ n'atteignant pas l'extrémité du 7ᵉ. Thorax moins prolongé en avant. Les pattes n'ont que l'extrémité du fémur antérieur et la base du tibia antérieur noires, tarses jaune clair, avec les articulations brun noir, ou entièrement brun noir, métatarse d'un tiers plus long que le tibia. Abdomen entièrement brun noir, arqué, comprimé. — L. 4 mm. (17 ♀).

Genre Paratendipes Kieff.

P. albimanus Meig. ♀. Tibia antérieur à écaille transversale munie d'un court éperon ; peignes des quatre tibias postérieurs à dents aiguës et libres dans leur moitié distale, les deux éperons courts. Cubitale aussi proche de la pointe alaire que la discoïdale.

Genre Polypedilum Kieff.

1. P. ciliatimanus Kieff. var. ♂ ♀. Brun noir, mat. Article 5ᵉ des antennes de la ♀ à col pas plus long que gros. Tarse antérieur du ♂ à poils 2-3 fois aussi longs que sa grosseur, tibia antérieur d'un cinquième plus court que le fémur, à écaille pointue, triangulaire, aussi longue que large, métatarse de moitié plus long que

le tibia, presque deux fois le 2ᵉ, 4ᵉ presque deux fois le 5ᵉ, empodium égalant les crochets, aussi long que les quatre pulvilles filiformes. — L. ♂ 5,5 mm., ♀ 3 mm. C'est la même variété que celle qui a été obtenue d'éclosion en Allemagne, à Bielefeld.

2. P. COGNATUM Kieff. var., ♂. Brun noir. Palpes longs, articles 2-4 graduellement plus longs, 2ᵉ et 3ᵉ à poils longs et denses. Antennes et panache brun noir, 2ᵉ article deux fois le 3ᵉ, 3-13 d'abord un peu transversaux, puis aussi longs que gros, 14ᵉ de moitié plus long que 2-13 réunis. Mesonotum à trois bandes raccourcies luisantes, noirâtres et peu distinctes ; metanotum et mesosternum noirs. Scutellum roux ou brun. Balanciers blancs, massue brune. Aile hyaline, sans tache, atteignant la pince, à peine lobée, cubitale un peu arquée au bout, atteignant presque la pointe alaire, d'un tiers plus longue que la radiale, bifurcation de la posticale distale de deux fois la transversale. Pattes jaune roussâtre ; fémur antérieur d'un tiers plus long que le tibia, celui-ci à écaille allongée, obtuse, mais graduellement amincie ; métatarse de moitié plus long que le tibia, articles 2-4 graduellement raccourcis, 4ᵉ deux fois le 5ᵉ, empodium égalant presque les crochets, filiforme et à poils bifurqués, pulvilles aussi longs que l'empodium, les deux médians filiformes comme l'empodium et sortant de la base des deux latéraux, qui sont un peu plus larges ; les quatre tibias postérieurs à éperon unique et long. Tergites 2-7 allongés. Articles terminaux de la pince droits, plus longs et à peine plus minces que les basaux, graduellement un peu amincis dans leur moitié distale, qui porte, près du bord médial, une rangée longitudinale de quatre ou cinq poils raides et longs ; appendice supérieur glabre, sortant près de la base de l'article, mince, tiers distal incurvé et graduellement aminci, atteignant l'extrémité de l'article basal ; appendice inférieur plus de deux fois aussi large que le supérieur, ne dépassant pas le tiers proximal de l'article terminal ; lamelle à pointe assez longue. — L. 3,8 mm. (1 ♂).

Genre Pentapedilum Kieff.

P. RIPARIUM n. sp. ♂. Brunâtre. Yeux très amincis en haut, séparés de une à deux fois leur largeur terminale. Bouche très petite, non ou à peine proéminente. Palpes brisés. Antennes et panache brun noir, scape roux brun, 2^e article deux fois le 3^e, qui est à peine plus long que le 4^e, 4-13 assez fortement transversaux, 14^e deux fois aussi long que 2-13 réunis. Metanotum, trois bandes raccourcies du mesonotum et mesosternum noirs et brillants. Scutellum jaune clair. Balanciers blancs, à massue brun noir. Aile très poilue en entier, atteignant la pince, non lobée, transversale comme chez **Chironomus**, cubitale d'un tiers plus longue que la radiale, aussi proche de la pointe alaire que la discoïdale, non arquée, bifurcation de la posticale sous la transversale, les deux rameaux déviant peu de la direction de la tige. Pattes brunes ; métatarse antérieur deux fois le 2^e article, de moitié plus long que le tibia, celui-ci plus court que le fémur, articles 2-4 graduellement raccourcis, 4^e deux fois le 5^e, empodium un peu plus court que les crochets, les quatre pulvilles égalant l'empodium, les deux médians sortant de la base des latéraux, ceux-ci rameux médialement ; quatre tibias postérieurs à éperon unique et long. Abdomen à poils longs, gris et dressés, quatre premiers tergites bruns, à bord postérieur blanchâtre, les quatre derniers brun noir, 2-7 plus longs que larges. Pince brun noir, articles terminaux plus longs que les basaux, poilus longuement jusqu'à l'extrémité, appendices inférieurs plus clairs, parallèles, ne dépassant pas le tiers proximal des articles terminaux. — L. 4 mm.

Genre Rheotanytarsus Bause

R. LAPIDICOLA Kieff. var., ♂. Jaunâtre. Yeux très arqués, séparés de trois fois leur largeur terminale ou du quart de leur longueur, partie amincie plus de deux fois aussi longue que large. Palpes longs, bruns. Antennes brunâtres, à panache gris, 2^e article grossi fortement, plus long que le 3^e, 3-13 allongés, 10-13 deux fois aussi longs que gros, 2-13 ensemble d'un tiers plus longs que le 14^e. Metanotum, trois bandes raccourcies du mesonotum et mesosternum brillants et brun noir. Balanciers blancs. Aile hyaline, poilue entièrement, atteignant presque la pince, sans lobe ni transversale marquée, cubitale droite, deux fois plus éloignée de la pointe alaire que la discoïdale, bifurcation de la posticale notablement distale, rameau antérieur continuant la direction de la tige, l'inférieur très oblique. Pattes d'un blanchâtre sale, tarse antérieur à poils 2-3 fois aussi longs que sa grosseur, métatarse égalant le fémur, un peu plus de moitié plus long que le tibia, dont l'écaille est obtuse, transversale et sans éperon, 2ᵉ article à peine plus long que la moitié du 1ᵉʳ, 4ᵉ deux fois le 5ᵉ, empodium ne dépassant pas le tiers proximal des crochets, pulvilles nuls ou très courts ; quatre tibias postérieurs avec deux éperons dépassant les peignes de plus de leur longueur, ceux-ci à peine séparés, occupant chacun un peu plus du quart du pourtour, chacun à douze dents obtuses. Abdomen brun verdâtre, plus sombre en arrière. Pince brune ; articles terminaux moins larges que les basaux, un peu moins de leur moitié distale est subitement aminci, n'ayant que le quart de la grosseur proximale, subcylindrique, glabre, portant médialement une rangée longitudinale de poils assez longs et fins ; appendice supérieur aussi large que l'inférieur, celui-ci dépassant à peine le tiers proximal de l'article terminal ; brosse arquée, linéaire, portant médialement des poils simples, denses et assez longs. – L. 3 mm. (5 ♂).

Genre Micropsectra Kieff.

M. EXSECTA Kieff. ♀. Couleur du précédent, thorax luisant. Yeux séparés de leur demi-longueur. Articles antennaires 3 5 fusiformes, verticilles à sept poils longs, ceux du 5ᵉ atteignant l'extrémité du 6ᵉ article, celui-ci deux fois le 5ᵉ, à long poil distal. Aile dépassant l'abdomen. Métatarse antérieur de moitié plus long que le tibia, celui-ci un peu plus court que le fémur, sans éperon, peigne des quatre tibias postérieurs non interrompu, occupant les deux tiers du pourtour, sans éperon ; empodium atteignant le milieu des crochets. — L. 3 mm.

B. ORTHOCLADIARIAE

Genre Camptocladius V. d. Wulp

1. Empodium atteignant l'extrémité des crochets ou à peine plus courts — 2.
— Empodium ne dépassant pas le milieu des crochets — 5.
2. Antennes de 14 articles (♂) — 3.
— Antennes de 6 articles (♀) — 4.

3. Abdomen jaune sale, scutellum jaune ; aile blanc de lait, cubitale non dépassée par la costale ... 1. *C. flaviventris* n. sp.

— Abdomen et scutellum brun noir ; aile subhyaline, un peu brunâtre, cubitale dépassée par la costale ... 2. *C. fusciventris* n. sp.

4. Antenne à soies sensorielles simples ; aile lactée ... 3. *C. aphyllus* n. sp.

— Antennes à soies sensorielles élargies en foliole ; aile un peu brunâtre ... 4. *C. albifolium* n. sp.

5. Antenne de 14 articles (♂) ; thorax et abdomen noirs en entier ; article 4ᵉ du tarse antérieur plus long que le 5ᵉ — 6.

— Antenne de 7 articles (♀) ; scutellum, pleures et 1ᵉʳ segment abdominal jaunes ; article 4ᵉ du tarse antérieur plus court que le 5ᵉ ... 5. C. *fuscifolium* n. sp.

6. Aile lactée ; 4ᵉ article de tous les tarses du tiers ou de moitié plus long que le 5ᵉ ... 6. *C. aterrimus* Meig.

— Aile hyaline ; 4ᵉ article des 4 tarses postérieurs pas plus long que le 5ᵉ ... 7. *C. atriventris* n. sp.

1. C. FLAVIVENTRIS n. sp., ♂. Noir velouté et mat. Antenne et panache brun noir, extrémité de ce dernier blanchâtre, articles 5-13 aussi longs que gros, 14ᵉ de un cinquième plus long que 2-13 réunis, 3ᵉ et 4ᵉ transversaux. Scutellum jaune. Balanciers bruns. Aile d'un blanc de lait, nue, lobe rectangulaire, nervures pâles, cubitale droite, non dépassée par la costale, convergente vers elle sur tout son parcours, deux fois la radiale, un peu plus éloignée de la pointe alaire que le rameau antérieur de la posticale ; bifurcation notablement distale, rameau postérieur fortement sinueux. Pattes blanchâtres, genoux noirâtres, 5ᵉ article tarsal sombre, tibia antérieur plus long que le fémur, deux fois le métatarse, éperon simple, plus long que la grosseur du tibia, 4ᵉ article tarsal plus long que le 5ᵉ, aux quatre pattes postérieures à peine égal au 5ᵉ, empodium égalant ou dépassant les crochets, ceux-ci avec deux soies basales, dont la proximale en forme de dent, terminée graduellement en soie. Pince brune. — L. 2 mm.

2. C. FUSCIVENTRIS n. sp., ♂. Noir. Palpes longs. Antenne et panache brun noir, 14ᵉ égalant la moitié de 2-13 réunis, 3ᵉ et 4ᵉ transversaux, 5ᵉ au moins aussi long que gros, 6-13 allongés, graduellement plus longs, les derniers plus de deux fois aussi

longs que gros. Thorax luisant. Balanciers brun noir. Aile hyaline ou un peu brunâtre, lobe peu marqué, nervures antérieures brunes, cubitale dépassée par la costale de 1 1/2 fois la transversale, un peu plus proche de la pointe alaire que le rameau antérieur de la posticale, bifurcation notablement distale, rameau postérieur fortement sinueux après le milieu. Pattes roux brun, tibia antérieur plus long que le fémur, deux fois le métatarse, son éperon simple, plus long que sa grosseur, 4ᵉ article plus court que le 5ᵉ à tous les tarses, empodium dépassant les crochets, ceux-ci à deux soies basales et arquées, la proximale grossie proximalement, où elle semble former un rameau du crochet. Abdomen brun noir.— L. 2,5 mm.

3. C. **aphyllus** n. sp., ♂. Noir, mat, velouté. Antenne roux brun, soies sensorielles pas plus grosses que les cinq poils des verticilles, 2ᵉ article deux fois aussi long que gros, plus long et un peu plus gros que le 3ᵉ, subcylindrique, 3-5 ellipsoïdaux, un peu plus amincis distalement que proximalement, 6ᵉ de trois quarts plus long que le 5ᵉ, dépourvu de verticille. Balanciers brun noir, tige blanchâtre. Aile lactée, nue, nervures antérieures jaunâtres, cubitale longuement dépassée par la costale, se confondant graduellement avec elle, plus proche de la pointe alaire que le rameau antérieur de la posticale, rameau postérieur fortement sinueux dans sa moitié distale, bifurcation distale de deux fois la transversale. Pattes roux sombre, tibia antérieur de moitié plus long que le fémur, double du métatarse, son éperon simple, plus court que sa grosseur, 4ᵉ article à peine plus long que le 5ᵉ, aux quatre tarses postérieurs subégal au 5ᵉ ; empodium atteignant l'extrémité des crochets, ceux-ci à deux soies basales, dont la proximale est grossie proximalement, en forme de dent graduellement amincie en soie. Abdomen noir, mais non velouté. — L. 1,5 mm.

4. C. **albifolium** n. sp., ♀. Noir, non velouté, mat. Antenne roux brun, sauf le scape ; 2ᵉ article de moitié plus long que gros, subcylindrique, un peu plus gros que les suivants, 3-5 ellipsoïdaux, le 6ᵉ de deux tiers plus long que le 5ᵉ, dépourvu de verticille, à poil distal égalant le tiers de sa longueur ; verticilles à cinq poils, celui du 5ᵉ article atteint l'extrémité du 6ᵉ, comme chez l'espèce précédente ; soies sensorielles de 2-6 élargies en folioles

blanches, à tiers distal subitement aminci. Balanciers brun sombre. Aile subhyaline, un peu brunâtre, nue, à lobe très développé et dirigé proximalement, nervures brunes, cubitale longuement dépassée par la costale, arquée, aussi loin de la pointe alaire que le rameau antérieur de la posticale, rameau postérieur très sinueux dans sa moitié distale, bifurcation très distale. Pattes roux brun, tibia antérieur plus long que le fémur, deux fois le métatarse, son éperon simple, plus long que sa grosseur, 4ᵉ article un peu plus long que le 5ᵉ, au tarse intermédiaire à peine égal au 5ᵉ; empodium atteignant les deux tiers ou presque l'extrémité des crochets, ceux-ci à deux soies basales, arquées, simples, non grossies proximalement. Abdomen brun noir. — L. 2 mm. (3 ♀).

5. C. FUSCIFOLIUM n. sp., ♀. Tète et thorax noirs, mats, veloutés. Antenne brun noir, de sept articles, dont le 2ᵉ transversal, obconique, un peu plus gros que les suivants ; 3-6 subglobuleux, 5ᵉ et 6ᵉ un peu plus longs que gros, 7ᵉ deux fois et demie aussi long que gros, sans verticille ; soies sensorielles des articles 2-7 élargies en forme de folioles brunes, lancéolées, subitement amincies à l'extrémité ; verticilles à cinq poils, celui du 6ᵉ article n'atteint pas l'extrémité du 7ᵉ. Scutellum et pleures jaunes. Balanciers brun noir, tige blanchâtre. Aile blanc de lait, nue, dépassant l'abdomen, lobe rectangulaire, nervures pâles, cubitale longuement dépassée par la costale, arquée, aussi éloignée de la pointe alaire que le rameau antérieur de la posticale, rameau postérieur très sinueux dans sa moitié distale, bifurcation très distale. Pattes brun sombre, fémurs deux fois aussi gros que les tibias, l'antérieur plus court qne le tibia, celui-ci deux fois le métatarse, son éperon simple, plus long que sa grosseur, 4ᵉ article de tous les tarses un peu plus court que le 5ᵉ, empodium n'atteignant pas ou à peine le milieu des crochets, ceux-ci à deux soies basales simples, arquées comme d'ordinaire. Abdomen brun jaunâtre, premier segment jaune. — L. 1,5 mm.

6. C. ATERRIMUS Meig., ♂. Noir profond, mat et velouté, y compris la pince. Yeux séparés de plus de leur longueur. Palpes longs. Antenne brun noir, à articles du flagellum peu séparés, 14ᵉ deux fois aussi long que 2-13 réunis, 2ᵉ deux fois le 3ᵉ, 3-13 très transversaux, trois à quatre fois aussi gros que longs, panache

brun noir, comme les balanciers. Aile blanche, atteignant au moins l'extrémité de l'abdomen, lobe rectangulaire, nervures pâles, cubitale un peu dépassée par la costale, deux fois la radiale, plus proche de la pointe alaire que le rameau antérieur de la posticale, mais moins que la discoïdale, rameau postérieur fortement sinueux après son milieu, bifurcation notablement distale. Pattes roux brun ; tous les fémurs et les quatre tibias postérieurs à longs poils, fémur antérieur plus long que le tibia et presque deux fois plus gros, celui-ci de deux tiers plus long que le métatarse, son éperon simple, aussi long que sa grosseur, 4e article de tous les tarses d'un tiers ou de moitié plus long que le 5e, empodium atteignant le milieu des crochets, ceux-ci avec les deux soies arquées non grossies proximalement. Articles terminaux de la pince un peu plus courts que les basaux, pubescents, sans longs poils, graduellement amincis au tiers proximal, stylet terminal précédé et suivi d'une courte soie et formant angle droit avec le grand axe de l'article, dont l'extrémité est tronquée, côté médian de l'article échancré avant le stylet, un peu élargi avant cette échancrure ; lamelle à pointe courte. — L. 2,8 mm. (2 ♂).

7. C. ATRIVENTRIS n. sp., ♂. Noir profond, mat et velouté, y compris la pince. Yeux très éloignés au vertex. Antenne et panache brun noir ; 14e article deux fois et demie aussi long que 2-13 réunis ; 2e deux fois le 3e, 2-5 bien plus gros que les suivants, 2-13 transversaux, graduellement un peu plus longs. Balanciers brun sombre. Aile hyaline, atteignant au moins l'extrémité de l'abdomen, lobe rectangulaire, nervures antérieures brunâtres, cubitale notablement dépassée, à peine plus proche de la pointe alaire que le rameau antérieur de la posticale, milieu du rameau postérieur fortement sinueux, bifurcation très distale. Pattes brun sombre, tibia antérieur au moins deux fois aussi long que le métatarse, son éperon simple, aussi long que sa grosseur, le fémur plus court et deux fois aussi gros que le tibia, 4e article tarsal à peine plus long que le 5e, aux quatre tarses postérieurs égal au 5e ; empodium atteignant le milieu des crochets, ceux-ci à deux soies arquées simples : les quatre pattes postérieures à longs poils. — L. 2 mm.

Genre Trichocladius Kieff. (Paratrichocladius Abreu 1918) (¹)

1. T. LOBATUS n. sp., ♂. Tête, thorax et abdomen noir brillant. Yeux pubescents, séparés de plus de leur longueur. Antenne et panache brun noir, articles 3-13 trois fois aussi gros que longs, 14ᵉ presque deux fois aussi long que 2-13 réunis. Balanciers blanc sale, extrémité de la massue brunie. Aile blanche, atteignant la pince, nervures pâles, transversale un peu plus sombre, cubitale droite, à peine dépassée par la costale, plus proche ou au moins aussi proche de la pointe alaire que la discoïdale, double de la radiale, bifurcation de la posticale sous la transversale ; **lobe remarquable**, arrondi au bout, dirigé un peu proximalement et suivi d'une légère découpure du bord inférieur de l'aile. Pattes jaune roussâtre, sauf les hanches ; fémur antérieur un peu plus court que le tibia et deux fois aussi gros, celui-ci d'un tiers plus long que le métatarse, à éperon simple et aussi long que sa grosseur, 4ᵉ article des tarses antérieurs et postérieurs de moitié plus long que le 5ᵉ ; empodium atteignant au moins le milieu des crochets. — L. 4 mm.

2. T. MICROSANDALUM n. sp., ♀. Jaune, brillant. Yeux pubescents. Antenne brun noir, 2ᵉ article non rétréci au milieu, plus long que le 3ᵉ, 3-5 deux fois et demie aussi longs que gros, à peine amincis aux deux bouts, 6ᵉ brisé. Metanotum, trois bandes raccourcies du mesonotum et mesosternum brun noir. Balanciers blanc pur. Aile hyaline, assez fortement lobée, nervures brunes, cubitale droite, dépassée par la costale de une fois et demie la transversale, aussi distante de la pointe alaire que le rameau antérieur de la posticale, dont la bifurcation est à peine distale. Hanches, trochanters et base des fémurs jaunes, reste des fémurs brun noir ; tibia antérieur blanc pur, de deux tiers plus long que le métatarse, base et tiers distal ainsi que le tarse brun noir ; quatre tibias postérieurs jaunâtres ou brunâtres, base et tiers distal brun noir, tarse brunâtre ; 4ᵉ article de moitié plus long que le 5ᵉ, au tarse antérieur, un peu plus court que le 5ᵉ à l'intermédiaire, un peu plus long que le 5ᵉ

(¹) Voir la remarque à la fin de ce travail, p. 297.

au tarse postérieur ; empodium atteignant à peine le milieu des crochets, pulvilles nuls, base des crochets à dent noire transformée graduellement en une soie hyaline et arquée, l'autre soie simple. Abdomen noir, mat, deux premiers segments jaune blanchâtre ; cerci blanc pur. — L. 2,5 mm.

3. T. CALOSANDALUM n. sp., ♀. Ressemble au précédent, sauf ce qui suit : antenne brune, 6^e^ article brun noir, presque deux fois et demie aussi long que le 5^e^, avec un poil distal médiocre, 2^e^ article faiblement rétréci avant le milieu, deux fois le 3^e^, 3-5 allongés, deux fois aussi longs que gros, faiblement amincis distalement. Les trois bandes du mesonotum presque confluentes. Cubitale dépassée seulement d'un point. Tibia antérieur noir, avec un anneau blanc pur près de sa base et un peu plus court que la partie distale noire, les quatre tibias postérieurs blanc sale, sauf les deux bouts, tarses tous bruns ; empodium aussi long que les crochets. Abdomen entièrement noir et mat dorsalement, roux brunâtre ventralement, les cerci seuls blanc pur. — L. 1,5 mm.

Genre Metriocnemus V. d. Wulp

1. M. FUSCIPES Meig., ♂. Noir, mat. Yeux un peu amincis en haut, séparés d'au moins deux tiers de leur longueur. Palpes longs, 2^e^ article à poils denses et deux fois aussi longs que sa grosseur. Antenne et panache brun noir, 2^e^ article deux fois le 3^e^, 3-6 grossis et très transversaux, 7-13 graduellement plus minces et plus longs, 10^e^ et 11^e^ aussi longs que gros, 12^e^ et 13^e^ allongés, 14^e^ fusiforme au bout, aussi long que 2-13 réunis. Thorax et abdomen à poils dressés et noirs, mesonotum luisant. Balanciers blanc sale, extrémité de la massue brunâtre. Aile hyaline, poilue, atteignant l'extrémité de l'abdomen, nervures brunâtres, cubitale dépassée de la longueur de la transversale, double de la radiale, un peu plus proche de la pointe alaire que le rameau antérieur de la posticale, celui-ci à bifurcation notablement distale. Pattes brun noir, tibia antérieur plus long que le fémur, de deux tiers plus long que le métatarse, son éperon simple et plus long que sa grosseur ; 4^e^ article d'un tiers plus long que le 5^e^ au tarse antérieur et postérieur, empodium très court, crochets à trois soies basales arquées,

grand éperon postérieur ayant de chaque côté sept dents, sauf au quart distal. Abdomen et pince brun noir ; tergites 1-4 un peu plus longs que larges ; articles terminaux de la pince allongés, non élargis au bout. — L. 3 mm.

2. M. ATRATULUS Zett. var., ♂. Noir, mat, velouté. Antenne et panache noirs, 2e article trois fois aussi long que le 3e, 3-13 très transversaux, plus de trois fois aussi gros que longs, 14e trois fois un quart aussi long que 2-13 réunis. Dessus du thorax et abdomen à longs poils noirs et dressés. Balanciers brun noir, tige plus claire. Aile hyaline, velue, faiblement lobée, atteignant l'extrémité de l'abdomen, cubitale médiocrement dépassée par la costale, à peine plus éloignée de la pointe alaire que le rameau antérieur de la posticale, dont la bifurcation est distale de deux fois la transversale. Pattes brun noir, fémur antérieur deux fois plus gros que le tibia, plus court que lui, celui-ci de deux tiers plus long que le métatarse, son éperon simple ; grand éperon du tibia postérieur dentelé dans sa moitié proximale, 4e article du tarse postérieur plus long que le 5e ; empodium atteignant à peine le milieu des crochets, avec deux courtes soies à la base. — L. 3,8 mm.

III. Tanypodinæ

Genre Tanypus Meig.

1. T. MONILIS L., ♂. Les quatre bandes du mesonotum noires ; tergites 2-5 blanchâtres, avec deux taches dorsales juxtaposées, allongées et très minces ; tarse antérieur inerme ; rameau postérieur de la posticale subitement incurvé au bout. — L. 3,5 mm. (4 ♂).

2. T. PHATTA Egg., ♂. Semblable à **monilis**, mais tarse antérieur barbu, à poils quatre fois aussi longs que sa grosseur ; bandes du mesonotum brunes ; tergites 3-5 blanchâtres, avec une tache dorsale unique, grande, allongée, brun noir. Pince jaune brunâtre, conformée comme chez **monilis**. -- L. 4,5 mm. (2 ♂).

3. T. BARBATIPES Kieff. var., ♀. Entièrement jaune ferrugineux, avec trace de trois bandes roussâtres sur le mesonotum, balan-

ciers blancs. Yeux peu amincis en haut, distants de 1 1/2 fois leur largeur terminale. Antenne jaune, de douze articles, dont le 2^e presque double du 3^e et à peine plus gros, 3-11 amincis au tiers basal, graduellement plus longs, le 3^e de moitié plus long que gros, le 11^e deux fois et demie ; poils des verticilles à 5 ou 6, inégaux, les longs situés du même côté, doubles des autres, 6-8 fois aussi longs que la grosseur des articles, 12^e plus de deux fois le 11^e, avec un verticille basal et une courte soie distale. Aile blanchâtre, les deux transversales noires et ceintes de noir ; deux bandes transversales enfumées et peu limitées, la proximale oblique, large, traversant les deux transversales jusqu'au bord postérieur, brun noir, à cet endroit elle s'étend distalement jusqu'au milieu du rameau postérieur, laissant libres le bord antérieur, la radiale et la cubitale, qui sont jaunes, en bas elle s'étend jusque près de la base de la cellule anale ; bande distale allant de l'extrémité de la cubitale ; un trait sombre sur la partie distale des deux rameaux de la posticale, dont l'inférieur est médiocrement incurvé au bout ; cubitale non dépassée par la costale, aussi proche de la pointe alaire que la discoïdale ; bord antérieur de l'aile jaune, sauf la partie noire vis-à-vis des transversales. Pattes entièrement jaunes ; éperons brun noir, le grand éperon postérieur de moitié plus long que la grosseur du tibia, arqué proximalement, son quart basal muni, de chaque côté, de trois ou quatre dents fines, pointues, presque parallèles ; empodium n'atteignant pas le milieu des crochets, pulvilles atrophiés et à peine perceptibles. — L. 2,5 mm.

4. T. Ariasi n. sp., ♂. Blanchâtre. Yeux séparés de deux fois leur largeur terminale, partie amincie presque linéaire, quatre fois aussi longue que large, formant angle droit avec la partie élargie, un peu plus mince à la base qu'à l'extrémité. Antenne jaune blanchâtre, 2^e article guère plus long que le 3^e, 3-13 presque aussi longs que gros, 14^e de moitié plus long que 2-13 réunis, 15^e conique et plus pâle. Mesonotum à quatre bandes fauves. Aile hyaline, sans tache, à poils pâles, toutes les nervures pâles, cubitale non dépassée par la costale, proche de la pointe alaire, rameau postérieur de la posticale non incurvé distalement. Tibia antérieur d'un quart plus long que le métatarse, articles tarsaux 2-5 graduellement raccourcis, empodium très court ; éperons du tibia

postérieur très courts, comme chez **curticalcar**, mais bruns, à peine apparents, n'atteignant pas le quart de la grosseur du tibia, formés par quatre à six dents pointues, dont l'une un peu plus longue que les autres. Abdomen blanc, brillant, à longs poils dressés blancs. Articles basaux de la pince sans appendice, un peu plus longs que les terminaux, ceux-ci minces, à peine arqués, graduellement amincis distalement et terminés par un stylet brun. — L. 3 mm. Cette espèce est dédiée à M. le D^r Arias, professeur à l'Université de Barcelone.

REMARQUE. Un auteur espagnol, E. S. Abreu, vient de publier dans les MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DE BARCELONE (1918, série 3, v. 14) un mémoire couronné par la dite Académie et intitulé : « *Ensayo de una monographia de los Tendipedidos de las Islas Canarias* ». L'auteur y établit (p. 34) un genre **Paratrichocladius** Abr., qui différerait de **Trichocladius** Kieff. par trois caractères, à savoir : les yeux à poils microscopiques, le flagellum du ♂ non fendu, et la base du flagellum non renflée. Or le premier de ces trois caractères est précisément celui que j'ai assigné à **Trichocladius**, dès 1906, en établissant ce genre. Quant au flagellum du ♂, j'ai reconnu et indiqué depuis longtemps qu'il offre, non seulement chez **Trichocladius**, mais chez tous les **Chironominae**, une fente latérale plus ou moins distincte ; Abreu fait donc erreur en croyant que le flagellum des ♂ d'**Orthocladius**, de **Camptocladius**, de **Metriocnemus** etc. est dépourvu de cette fissure. Enfin le renflement de la base du flagellum est un caractère spécifique et non générique, car on le retrouve chez des espèces appartenant aux genres les plus divers des **Chironomides**, et encore en particulier chez deux espèces décrites dans ce travail et appartenant à deux genres différents (**Camptocladius atriventris** p. 294 et **Metriocnemus fuscipes** p. 296). Depuis 1906, date de la création du genre **Trichocladius**, j'ai décrit plus de cinquante espèces de ce genre qui ont la base du flagellum non renflée ou indistinctement renflée. Malheureusement Abreu a ignoré les nombreux travaux publiés sur les Chironomides depuis 1908 ; il en est résulté que ses espèces nouvelles sont en grand nombre énigmatiques, étant insuffisamment décrites, de sorte qu'on ne sait même à quels genres on doit les rapporter. J'ai pu identifier les suivantes :

Helea nemestrina, avec les var. **albidipes**, **flavihalterata**, **flavicans**, **fulviventris** et **distincta**, **H. vicina**, **H. brunnipes** Meig, **H. rostrata** Winn. et **Ceratopogon flavoscutellatus** Beck. reviennent au genre **Atrichopogon** Kieff.

Helea nitens (¹), **H. murina** Winn. var. **abdominalis** et **H. postrema** appartiennent au genre **Forcipomyia** Meg.

Forcipomyia pulcherrima, **F. bipunctata** L. var. **pallidipes** et **obscura**, **F. litoralis**, **F. praecincta**, **F. kaltenbachii** Winn., **F. flavicincta**, **F. fulvescens**, **F. palmensis** reviennent à **Forcipomyia** Meg. sous-genre **Prohelea** Kieff.

Culicoides varicornis, **C. versicolor** Winn., avec les var. **albidipes**, **brunneus**, **canariensis**, **fenestralis**, **flavimanus**, **flaviventris** (²), **luteipalpis** et **ornatigaster**, **C. sericatus** Winn. avec les var. **albohalteratus** et **luteoscutellatus**, **C. egens** Winn., **C. scutellatus** Meig. var. **tigalatensis**, **C. abdominalis**, **C. fraterculus**, **C. erythrogaster**, **C. pulchripes**, **C. intermedius**, **C. eximius**, **C. hiemalis**, avec les var. **albidigaster** et **immaculatus**, font partie du genre **Dasyhelea** Kieff.

Paratrichocladius formosus, **millenarius**, **tenuipes** Beck., **multicolor**, **nigrovittatus**, **ornaticollis**, **pseudoictericus**, **pulchrigaster** et **sororians** font partie du genre **Trichocladius** Kieff.

Pelopia chorea Meig. revient à **Trichotanypus** Kieff.

Ablabesmyia pseudornata, **suturalis**, **viriduliventris**, **monilis** L., **nigropunctata** Stg. et **melanops** Meig. var. **rubicundula**, reviennent au genre **Tanypus** Meig. (**Pelopia** Meig.).

Peritaphreuusa Beck. (non **Peritaphreusa**, comme écrit Abreu) ne forme pas un genre distinct, mais peut tout au plus être considéré comme sous-genre de **Tanypus**.

(¹) Comme j'ai décrit en 1919 un **Ceratopogon nitens**, provenant de Hongrie, je change ce nom en **C. hungaricus** n. nov. (**nitens** Kieff. non Abr.).

(²) Goetghebuer ayant décrit un **Culicoides flaviventris** en 1910, ce nom devra être changé.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

PAGES
Statuts 5
Règlement arrêté par le Conseil pour l'encouragement des recherches scientifiques 9
Lettres de S. S. le Pape Léon XIII au Président et aux membres de la Société scientifique de Bruxelles 11
Lettre de S. É. le Card. R. Merry del Val, Secrétaire d'État de S. S. le Pape Pie X, au Président de la Société scientifique de Bruxelles, en réponse à l'adresse au Saint-Père 13
Lettre de S. S. le Pape Benoît XV au Président et aux membres de la Société scientifique de Bruxelles 14
Listes des membres de la Société scientifique de Bruxelles (année 1921) 16
    Liste des membres fondateurs 16
    — des membres honoraires 17
    — générale 19
    — géographique 45
    — des membres décédés 51
    — des membres inscrits dans les sections 52
    Membres du Conseil (1914-1920) 59
    — — (1920-1921) 60
    Bureaux des sections (1920-1921) 61
Session du 20 novembre 1920, à Lille 63
    Séances des sections : Première section 63
        Deuxième section 73
        Troisième section 88
    Assemblée générale 130
    Discours de M. Lagasse de Locht 130
    Conférence de M. le Chanoine Grégoire 132
    Discours de Mgr Quilliet, évêque de Lille 132

Session du 27 janvier 1921, à Bruxelles 135
Séances des sections : Première section 135
Deuxième section 167
Troisième section 179
Quatrième section 191
Sixième section 199
Assemblée générale 200
Conférence de M. Camille Matignon 200
Session des 6 et 7 avril 1921, à Bruxelles 203
Séances des sections : Première section 203
Deuxième section 234
Troisième section 253
Quatrième section 283
Assemblée générale du 6 avril 1921 298
Rapport sur la *Société Bibliographique* de Paris 298
Conférence de M. le docteur Lemaire. 302
Assemblée générale du 7 avril 1921 302
Résultats des élections : Conseil général. 303
Bureaux des sections 303
Rapport du Secrétaire général 304
Recettes et dépenses de la Société en 1920 311
Conférence de M. J. de Lapparent 312
Liste des ouvrages offerts à la Société scientifique de Bruxelles, du 1er mai 1920 au 1er mai 1921 313

COMMUNICATIONS DIVERSES

La puissance réfractive et son influence sur le calcul de la réfraction astronomique, par M. Alliaume 63
Correction des erreurs systématiques. Pendules et chronomètres, par M. Goedseels. 67
Notes, de M. Goedseels 71
Une nouvelle méthode de mesure de la tension superficielle, par M. Charron 74
L'inversion diastasique du sucre de canne obéit-elle à la loi d'action de masse ? par M. Colin et Mlle Chaudun. 78
Les sagittae et les volsellae des Hyménoptères supérieurs ont-elles leurs homologues chez les Chalastogastres ? par M. Boulangé 88
Une trouvaille de l'âge du bronze en Flandre, par M. Claerhout . . . 97
Matériaux pour l'étude des Alchemilla d'Afrique, par M. De Wildeman . 99
Les fossiles de la tourbe du littoral, par M. Proost 102
A propos d'un travail du Dr H. Bolton sur la faune du terrain houiller du Kent. Comparaison des couches houillères du Kent et du Pas-de-Calais au moyen des méthodes paléontologiques, par M. Pruvost . . 103

Nouveaux Bethylides du Soudan Egyptien, par M. Kieffer 111
Les débuts de nos connaissances sur les failles de refoulement du Hainaut, par M. Stainier. 114
Sur une lettre inédite de Fermat, publiée par Giovanozzi, par le R. P. Bosmans, S. J. 136
La nouvelle édition des œuvres de Torricelli, par le R. P. Bosmans, S. J. 141
Sur les permanents d'éléments 1 et x, par M. Lecat 148
Sur certains groupes de figures semblables, par M. Thébault 152
Notes de géométrie, par M. Neuberg 157
Schéma d'une étude générale de l'aberration chromatique, par M. Alliaume 167
La mesure de l'épaisseur des lueurs sur les fils dans la décharge, par le R. P. Schaffers, S. J. 177
Colonies frisonnes dans la plaine maritime belge, par M. Claerhout. . 179
Description de quelques Chironomides exotiques, par M. Kieffer . . . 181
Deux sterculiacées africaines nouvelles, par M. De Wildeman 188
Un cas de myxo-lipome pharyngo-épiglottique opéré par un procédé spécial de pharyngotomie thyro-hyoïdienne, par M. Goris 191
Quelques nouveaux cas de maladie de Morton, par M. Boine 194
Pneumo-péritoine et ventriculographie, par M. Boine 197
A propos d'un ouvrage sur « l'Indiscipline des mœurs », par M. Warlomont 199
La signalisation de nos chemins de fer, par M. Van der Mensbrugghe . 199
De la réfraction géodésique et de la réfraction astronomique dans une atmosphère dont les surfaces équiréfringentes ne sont qu'approximativement planes ou sphériques, par M. Alliaume 204
Sur la théorie élémentaire de la Fonction Gamma, par le R. P. Egan, S. J. 213
Notes de géométrie, par M. Neuberg 222
Complément à un schéma d'étude générale de l'aberration chromatique, par M. Alliaume 234
Sur un nouveau manomètre à lecture électrique, par M. Goubau . . . 241
Sur un nouveau procédé d'analyses gazométriques, par M. Goubau . . 243
Quelques formules de potentiels explosifs, par le R. P. Schaffers, S. J. . 247
Manomètres à lecture rapide pour pressions de l'ordre du cm., par le R. P. Schaffers, S. J. 251
Une station aurignacienne avec ossements humains : l'abri sous roche du Roua, par le R. P. Pierre Charles, S. J. 254
Un ciliate astome nouveau : Intoschellina rhynchelmis, par M. Paul Debaisieux 261
Note sur un contact par faille entre le calcaire carbonifère et le Houiller inférieur à Hozémont, par M. Delépine. 266
Synopse de la tribu des Chironomariae, par M. Kieffer 269
Note préliminaire sur les *ficus* africains, par M. De Wildeman. . . . 277

La stase intestinale étudiée à la lumière des dernières acquisitions de la physiologie, par M. Fouarge 283

Deux signes périphériques de l'insuffisance du myocarde : le pouls veineux systolique et le pouls alternant, par M. Houdmont 292

CONFÉRENCES

Progrès et tendances dans l'évolution végétale, par M. le Chanoine Grégoire 132

Le bassin potassique d'Alsace et l'état actuel de son exploitation, par M. Camille Matignon 200

La genèse des globules du sang, par M. le Docteur Lemaire 302

L'histoire de la terre expliquée par le microscope, par M. Jacques de Lapparent 312

QUESTIONS DE CONCOURS

Première section 203

Deuxième — 234

Troisième — 253

Quatrième — 298

AUTEURS

Alliaume, 63, 167, 204, 234. — Bertrand, 233. — Biot, 175. — Boine, 194, 197. — Bosmans, 136, 141, 233. — Boulangé, 88. — Charles, 254. — Charron, 74. — Chaudun, 78. — Claerhout, 97, 179, 187. — Colin, 78. — Debaisieux, 261. — De Jonghe, 269. — Delépine, 266. — De Neyer, 233. — De Wildeman, 99, 188, 277. — Egan, 213. — Fouarge, 283. — Goedseels, 67, 71, 136, 233. — Goris, 191. — Goubau, 241, 243. — Grégoire, 132. — Guermonprez, 198. — de Hemptinne, 78, 234. — Houdmont, 292. — Kaisin, 266. — Kieffer, 111, 181, 269. — de Lapparent, 312. — Lecat, 148. — Lemaire, 302. — de Limburg-Stirum, 187, 269, — Matignon, 200. — Neuberg, 157, 222. — d'Ocagne, 73. — Pasquier, 70. — Proost, 102, 187. — Pruvost, 103. — Renier, 111, 187. — Schaffers, 177, 247, 251. - de Sparre, 63. - Stainier, 114. — Thébault, 152. — Vanderlinden, 74. — Van der Mensbrugghe, 199. — Warlomont, 199.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

Déterminants d'éléments X et 1, par M. Lecat 1
Propriétés se rattachant à la génération projective des coniques, par L. Casteels 23
Sur les alidades multiples, par P. J. E. Goedseels 37
Notes de géométrie, par J. Neuberg 46
Cercles et sphères remarquables du triangle et du tétraèdre, par V. Thébault 59
Notes sur la Flore du Katanga (suite), par E. De Wildeman. 65
Notes bryologiques et lichénologiques sur les environs d'Avesnes (Nord), par l'abbé A. Carpentier 129
La détermination de la Robusticité constitutionnelle, par le Dr L. Vervaeck 141
Sur les névroptères nouveaux ou critiques, par R. P. Longin Navas, S. J. 225
Contributions à la géométrie du triangle et du tétraèdre, par V. Thébault 233
Théorie analytique des turbines centripètes et centrifuges à réaction, par M. le comte de Sparre 249
Chironomides de Courlande, par l'abbé J. J. Kieffer 275

AUTEURS

A. Carpentier, 129. — L. Casteels, 23. — E. De Wildeman, 65. — P. J. E. Goedseels, 37. — J. J. Kieffer, 275. — M. Lecat, 1. — J. Neuberg, 46. — R. P. Longin Navas, S. J., 225. — de Sparre, 249 — V. Thébault, 59, 233. — L. Vervaeck, 141.

DATES DE PUBLICATION

1er fascicule : pages **1-134**, 1-128, 2 février 1921.
2me fascicule : pages **135-202**, 129-232, 29 avril 1921.
3me et 4me fascicules : pages **203-323**, 233-303, 30 juin 1921.